УДК 517.946
DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.86-99

І. М. Конет, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Т. М. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ПРОСТОРІ З ПОРОЖНИНОЮ

У пропонованій статті методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному за радіальною змінною клиновидному за кутовою змінною циліндрично-круговому просторі з циліндричною порожниною.

Розглянуто випадки задання на гранях клина крайових умов Діріхле і Неймана та їх можливих комбінацій (Діріхле–Неймана, Неймана–Діріхле).

Для побудови розв'язків досліджуваних задач застосовано скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної, інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо аплікатної змінної та гібридне інтегральне перетворення типу Вебера на полярній осі з n точками спряження щодо радіальної змінної.

Послідовне застосування інтегральних перетворень дозволяє звести тривимірні початково-крайові задачі до задачі Коші для звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку, єдиний розв'язок якої виписано в замкнутому вигляді.

Застосування обернених інтегральних перетворень відновлює в явному вигляді розв'язки розглянутих задач через їх інтегральне зображення.

Ключові слова: *параболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

Вступ. Теорія крайових і початково-крайових (мішаних) задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в наш час інтенсивно розвивається.

Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, механіки, хімії, біології, медицини, економіки, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та початково-крайових задач для рівнянь параболічного типу одержано у відомих працях Городецького В. В. [2], Житарашу М. В., Ейдельмана С. Д. [6], Загорського Т. Я. [7], Івасишена С. Д. [8], Ладиженської О. А., Солоннікова В. А., Уральцевої Н. М. [13], Ландіса Є. М. [14], Матійчука М. І. [15], Пукальського І. Д. [17], Фрідмана А. [21], Ейдельмана С. Д. [23] та інших вітчизняних і зарубіжних математиків.

Відомо, що складність досліджуваних крайових і мішаних задач суттєво залежить як від коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометричної структури області (гладкість межі, наявність кутових точок тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто різноманітні методи побудови розв'язків (точні та наближені) крайових задач для лінійних, квазілінійних і деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач в сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [4, 5, 18].

Відомо, що крім методу відокремлення змінних та його узагальнень, одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в однорідних середовищах є метод інтегральних перетворень, який дає можливість побудувати в аналітичному вигляді точні розв'язки задач через їх інтегральне зображення.

У той же час для досить широкого класу лінійних задач у кусково-однорідних середовищах ефективним виявився метод гібридних інтегральних перетворень, що породжені відповідними гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [3, 9-12].

У цій статті за допомогою методу інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків параболічних початково-крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з циліндричною порожниною.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t,r,\varphi,z): t>0; r\in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1}(R_{j-1};R_j),\ R_0>0, R_{n+1}=+\infty;$$

$$\varphi\in(0;\varphi_0), 0<\varphi_0<2\pi; z\in(-\infty;+\infty)\}$$

класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу 2-го порядку [16]

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_j + \tag{1}$$

$$+\chi_j^2 u_j = f_j(t,r,\varphi,z);\ r\in I_j;\ j=\overline{1,n+1},$$

з початковими умовами

$$u_j(t,r,\varphi,z)\big|_{t=0} = g_j(r,\varphi,z);\ \ r\in I_j;\ \ j=\overline{1,n+1} \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\right|_{z=-\infty}=0;\ \left.\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\right|_{z=+\infty}=0;\ \ s=0,1;\ \ j=\overline{1,n+1} \tag{3}$$

$$\left.\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0\right)u_1\right|_{r=R_0} = g_0(t,\varphi,z);\ \ \left.\frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s}\right|_{r=+\infty}=0;\ \ s=0,1; \tag{4}$$

одними з крайових умов на гранях клина [11]

$$u_j\big|_{\varphi=0} = g_{1j}(t,r,z);\ \ u_j\big|_{\varphi=\varphi_0} = w_{1j}(t,r,z);\ \ j=\overline{1,n+1}, \tag{5}$$

$$u_j\big|_{\varphi=0} = g_{2j}(t,r,z);\ \ \left.\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{2j}(t,r,z);\ \ \ j=\overline{1,n+1}, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0} = g_{3j}(t,r,z);\ \ u_j\big|_{\varphi=\varphi_0} = w_{3j}(t,r,z);\ \ j=\overline{1,n+1}, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0} = g_{4j}(t,r,z);\ \ \left.\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{4j}(t,r,z);\ \ j=\overline{1,n+1} \tag{8}$$

та умовами спряження [12]

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k\right)u_k - \left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\right|_{r=R_k} = 0; \tag{9}$$

$$j=1,2;\ \ k=\overline{1,n},$$

де a_{rj}, $a_{\varphi j}$, a_{zj}, χ_j, α_{js}^k, β_{js}^k — деякі сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0;\ \ c_{1k} \cdot c_{2k} > 0;\ \ \alpha_{11}^0 \le 0,\ \ \beta_{11}^0 \ge 0;$$

$$\left|\alpha_{11}^0\right| + \beta_{11}^0 \neq 0;$$

$$f(t,r,\varphi,z) = \left\{ f_1(t,r,\varphi,z), f_2(t,r,\varphi,z), \ldots, f_{n+1}(t,r,\varphi,z) \right\};$$

$$g(r,\varphi,z) = \left\{ g_1(r,\varphi,z), g_2(r,\varphi,z), \ldots, g_{n+1}(r,\varphi,z) \right\};$$

$$g_0(t,\varphi,z)\ ,\ g_{pj}(t,r,z)\ ,\ w_{pj}(t,r,z)\ ;\ (p = \overline{1,4}\ ;\ j = \overline{1,n+1})$$

— задані обмежені неперервні функції;

$$u(t,r,\varphi,z) = \left\{ u_1(t,r,\varphi,z), u_2(t,r,\varphi,z), \ldots, u_{n+1}(t,r,\varphi,z) \right\}$$

— шукана неперервно диференційовна за змінною t і двічі неперервно диференційовна за геометричними змінними (r,φ,z) функція.

Зауважимо, що:

1) у випадку $\chi_j \equiv 0$ ($j = \overline{1,n+1}$) рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням теплопровідності (дифузії) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;
2) якщо $\alpha_{11}^k = 0$, $\beta_{11}^k = 1$; $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$; $\alpha_{21}^k = \lambda_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$; $\alpha_{22}^k = \lambda_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де λ_1^k, λ_2^k — коефіцієнти теплопровідності, то умови спряження (9) збігаються з умовами ідеального теплового (термічного) контакту;
3) якщо $\alpha_{11}^k = b_k$, $\beta_{11}^k = 1$; $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$; $\alpha_{21}^k = \lambda_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$; $\alpha_{22}^k = \lambda_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де b_k – коефіцієнт термоопору, то умови спряження (9) збігаються з умовами неідеального теплового контакту.

Таким чином, у зазначених випадках 1, 2 (або 1, 3) розглянута параболічна крайова задача математичної фізики моделює процеси теплопровідності в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з порожниною.

Основна частина. Припустимо, що розв'язки параболічних початково-крайових задач спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) існують і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [12, 19, 20].

Згідно з [20] визначимо скінченні пряме $F_{m,ik}$ та обернене $F_{m,ik}^{-1}$ інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної $\varphi \in (0;\varphi_0)$ за формулами:

$$F_{m,ik}[f(\varphi)] = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi)U_{m,ik}(\varphi)d\varphi \equiv f_{m,ik}, \tag{10}$$

$$F_{m,ik}^{-1}[f_{m,ik}] = \frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} f_{m,ik}U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \tag{11}$$

де

$$U_{m,11}(\varphi) = \sin(\beta_{m,11}\varphi);\;\; \beta_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0};$$

$$U_{m,12}(\varphi) = \sin(\beta_{m,12}\varphi);\;\; \beta_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0};$$

$$U_{m,21}(\varphi) = \cos(\beta_{m,21}\varphi);\;\; \beta_{m,21} = \beta_{m,12};$$

$$U_{m,22}(\varphi) = \cos(\beta_{m,22}\varphi);\;\; \beta_{m,22} = \beta_{m,11};$$

$$\varepsilon_0^{ik} = 0;\;\; \varepsilon_m^{ik} = 1 \text{ при } ik = 11, 12, 21;\;\; m = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$\varepsilon_0^{22} = \frac{1}{2};\;\; \varepsilon_m^{22} = 1 \text{ при } m = 1, 2, 3, \ldots.$$

При цьому для інтегрального оператора $F_{m,ik}$ виконується тотожність

$$F_{m,ik}\left[\frac{d^2 f}{d\varphi^2}\right] = -\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik} + \Phi_{m,ik};\;\; i,k = 1,2, \tag{12}$$

де

$$\Phi_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0}\left[f(0) + (-1)^{m+1} f(\varphi_0)\right];$$

$$\Phi_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(0) + (-1)^m \left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0};$$

$$\Phi_{m,21} = -\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(\varphi_0);$$

$$\Phi_{m,22} = -\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} + (-1)^m \left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}.$$

Інтегральний оператор $F_{m,ik}$, який діє за формулою (10), внаслідок тотожності (12) тривимірній початково-крайовій задачі спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D' = \left\{(t,r,z); t > 0; r \in I_n^+; z \in (-\infty; +\infty)\right\}$ класичного розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь параболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t}-\left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2}\right)+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_{jm,ik}+\chi_j^2 u_{jm,ik}= \tag{13}$$
$$=G_{jm,ik}(t,r,z);\; r\in I_j;\; j=\overline{1,n+1}$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik}(t,r,z)\big|_{t=0}=g_{jm,ik}(r,z);\; r\in I_j;\; j=\overline{1,n+1}, \tag{14}$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s}\right|_{z=-\infty}=0;\; \left.\frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s}\right|_{z=+\infty}=0;\; s=0,1;\; j=\overline{1,n+1}, \tag{15}$$

$$\left.\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0\right)u_{1m,ik}\right|_{r=R_0}=g_{0m,ik}(t,z);\; \left.\frac{\partial^s u_{n+1,m,ik}}{\partial r^s}\right|_{r=+\infty}=0; \tag{16}$$
$$s=0,1$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^p\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^p\right)u_{pm,ik}-\left(\alpha_{j2}^p\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^p\right)u_{p+1,m,ik}\right]\right|_{r=R_p}=0; \tag{17}$$
$$j=1,2;\quad p=\overline{1,n},$$

де $\nu_{jm,ik}=a_{rj}^{-1}a_{\varphi j}\beta_{m,ik}$;

$$G_{jm,ik}(t,r,z)=f_{m,ik}(t,r,z)+a_{\varphi j}^2 r^{-2}\Phi_{m,ik}(t,r,z).$$

Застосуємо до двовимірної початково-крайової задачі спряження (13)–(17) інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $(-\infty;+\infty)$ щодо змінної z [19]:

$$F\left[g(z)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(z)\exp(-i\sigma z)dz\equiv\tilde{g}(\sigma),\;\; i=\sqrt{-1}, \tag{18}$$

$$F^{-1}[\tilde{g}(\sigma)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}(\sigma)\exp(i\sigma z)d\sigma\equiv g(z), \tag{19}$$

$$F\left[\frac{d^2g}{dz^2}\right]=-\sigma^2F[g(z)]\equiv-\sigma^2\tilde{g}(\sigma). \tag{20}$$

Інтегральний оператор F, який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20) крайовій задачі (13)–(17) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D''=\left\{(t,r);t>0;r\in I_n^+\right\}$ класичного розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь B-параболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial \tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t} - a_{rj}^2 B_{\nu_{jm,ik}}[\tilde{u}_{jm,ik}] + \left(a_{zj}^2\sigma^2 + \chi_j^2\right)\tilde{u}_{jm,ik} = \\ = \tilde{G}_{jm,ik}(t,r,\sigma);\ r \in I_j;\ j = \overline{1,n+1} \tag{21}$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm,ik}(r,\sigma);\ \ r \in I_j;\ \ j = \overline{1,n+1}, \tag{22}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0\right)\tilde{u}_{1m,ik}\Bigg|_{r=R_0} = \tilde{g}_{0m,ik}(r,\sigma);\ \ \frac{\partial^s \tilde{u}_{n+1,m,ik}}{\partial r^s}\Bigg|_{r=+\infty} = 0; \tag{23}$$

$$s = 0,1$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p\right)\tilde{u}_{pm,ik} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p\right)\tilde{u}_{p+1,m,ik}\right]\Bigg|_{r=R_0} = 0; \tag{24}$$

$$j = 1,2;\ \ p = \overline{1,n},$$

де $B_{\nu_{jm,ik}} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2}$ — класичний диференціальний оператор Бесселя.

До одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)–(24) застосуємо гібридне інтегральне перетворення типу Вебера на полярній осі $I_n^+(R_0 > 0)$ з n точками спряження щодо радіальної змінної r [12]:

$$M_{(n)}\left[f(r)\right] = \int\limits_{R_0}^{+\infty} f(r)V(r,\lambda)\sigma(r)rdr \equiv \tilde{f}(\lambda), \tag{25}$$

$$M_{(n)}^{-1}\left[\tilde{f}(\lambda)\right] = \int\limits_{0}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda)V(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \equiv f(r), \tag{26}$$

$$M_{(n)}\left[B_{(m,ik)}[f(r)]\right] = -\lambda^2\tilde{f}(\lambda) - \sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k^2 \int\limits_{R_{k-1}}^{R_k} f(r)V_k(r,\lambda)\sigma_k r dr - \\ - \frac{a_1^2 R_0 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(R_0,\lambda)\left(\alpha_{11}^0 \frac{df}{dr} + \beta_{11}^0 f\right)\Bigg|_{r=R_0}. \tag{27}$$

У формулах (25)–(27) беруть участь, виписані в [12], спектральна функція $V(r,\lambda)$, вагова функція $\sigma(r)$, спектральна щільність $\Omega(\lambda)$ та гібридний диференціальний оператор Бесселя

$$B_{(m,ik)} = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \theta(r - R_{j-1})\theta(R_j - r)B_{\nu_{jm,ik}} + a_{n+1}^2\theta(r - R_n)B_{\nu_{n+1,m,ik}},$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (21) та початкові умови (22) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a_1^2 B_{\nu_{1m,ik}} + q_1^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{1m,ik}(t,r,\sigma) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a_2^2 B_{\nu_{2m,ik}} + q_2^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{2m,ik}(t,r,\sigma) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a_{n+1}^2 B_{\nu_{n+1,m,ik}} + q_{n+1}^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{n+1,m,ik}(t,r,\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{1m,ik}(t,r,\sigma) \\ \tilde{G}_{2m,ik}(t,r,\sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{G}_{n+1,m,ik}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\left.\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m,ik}(t,r,\sigma) \\ \tilde{u}_{2m,ik}(t,r,\sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m,ik}(r,\sigma) \\ \tilde{g}_{2m,ik}(r,\sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m,ik}(r,\sigma) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

де $q_j^2(\sigma) = a_{zj}^2\sigma^2 + \chi_j^2;\quad j = \overline{1, n+1}.$

Інтегральний оператор $M_{(n)}$, який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$M_{(n)}[\cdots] = \Bigg[\int_0^{R_1} \cdots V_1(r,\lambda)\sigma_1 r dr \qquad \int_{R_1}^{R_2} \cdots V_2(r,\lambda)\sigma_2 r dr$$
$$\int_{R_{n-1}}^{R_n} \cdots V_n(r,\lambda)\sigma_n r dr \qquad \int_{R_n}^{+\infty} \cdots V_{n+1}(r,\lambda)\sigma_{n+1} r dr\Bigg] \quad (30)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d}{dt} + \lambda^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma)\right)\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{G}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma) -$$
$$-\frac{a_1^2 R_0 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(R_0,\lambda)\tilde{g}_{0m,ik}(t,\sigma), \quad (31)$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma)\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}^1_{jm,ik}(\lambda,\sigma), \quad (32)$$

де $\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma) = \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr;$

$$\tilde{\tilde{G}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma) = \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{G}_{jm,ik}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j rdr; \; j=\overline{1,n+1},$$

$$\tilde{\tilde{g}}_{jm,ik}(\lambda,\sigma) = \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jm,ik}(r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j rdr, \quad j=\overline{1,n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $\max\left\{q_1^2(\sigma), q_2^2(\sigma),...,q_{n+1}^2(\sigma)\right\} = q_1^2(\sigma)$ і покладемо всюди $\gamma_j^2 = = q_1^2(\sigma) - q_j^2(\sigma); \; j=\overline{1,n+1}$. Задача Коші (31), (32) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}}{dt} + \Delta^2(\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{u}}_{m,ik} = \tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma) - \frac{a_1^2 R_0 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(R_0,\lambda)\tilde{g}_{0m,ik}(t,\sigma), \tag{34}$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma); \; \tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\tilde{G}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma);$$

$$\tilde{\tilde{g}}_{m,ik}(\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\tilde{g}}^1_{jm,ik}(\lambda,\sigma); \; \Delta^2(\lambda,\sigma) = \lambda^2 + q_{z1}^2\sigma^2 + \chi_1^2.$$

Легко перевірити, що єдиним розв'язком задачі Коші (33), (34) є функція

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma) &= N(t,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{g}}_{m,ik}(\lambda,\sigma) + \int\limits_0^t N(t-\tau,\lambda,\sigma) \times \\ &\times \left[\tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(\tau,\lambda,\sigma) - \frac{a_1^2 R_0 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(R_0,\lambda)\tilde{g}_{0m,ik}(t,\sigma) \right] d\tau, \end{aligned} \tag{35}$$

де розв'язуюча функція (функція Коші) $N(t,\lambda,\sigma) = \exp(-\Delta^2(\lambda,\sigma)t)$.

Оскільки суперпозиція операторів $M_{(n)}$ та $M_{(n)}^{-1}$ є одиничним оператором, то оператор $M_{(n)}^{-1}$, як обернений до оператора, визначеного за формулою (30), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$M_{(n)}^{-1}[\cdots] = \begin{bmatrix} \int\limits_0^{+\infty} \cdots V_1(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \\ \int\limits_0^{+\infty} \cdots V_2(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int\limits_0^{+\infty} \cdots V_{n+1}(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \end{bmatrix} \tag{36}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma)\right]$, де функція $\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma)$ визначена формулою (35). Одержуємо єдиний розв'язок одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)–(24):

$$\tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)=\int_0^{+\infty}N(t,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{g}}_{m,ik}(\lambda,\sigma)V_j(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda+$$
$$+\int_0^t\int_0^{+\infty}N(t-\tau,\lambda,\sigma)\left[\tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(\tau,\lambda,\sigma)-\right. \tag{37}$$
$$\left.-\frac{a_1^2R_0\sigma_1}{\alpha_{11}^0}V_1(R_0,\lambda)\tilde{g}_{0m,ik}(t,\sigma)\right]\times V_j(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda d\tau;\quad j=\overline{1,n+1}.$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)$, визначених формулами (37), обернені оператори F^{-1} та $F_{m,ik}^{-1}$, і виконавши елементарні перетворення, одержуємо функції

$$u_{j,ik}(t,r,\varphi,z)=\sum_{p=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\times$$
$$\times\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho+\sum_{p=1}^{n+1}a_{\varphi p}^2\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_{-\infty}^{+\infty}Q_{jp}^{ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)\sigma_p\rho^{-1}d\xi d\rho d\tau+ \tag{38}$$
$$+\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}W_{jr,ik}(t-\tau,r,\varphi,\alpha,z-\xi)g_0(\tau,\alpha,\xi)d\xi d\alpha d\tau;\quad j=\overline{1,n+1},$$

які визначають єдині розв'язки параболічних початково-крайових задач спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) при відповідних значеннях ik (11, 12, 21, 22).

У формулах (38) застосовано компоненти

$$E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}K_{jp}^{m,ik}(t,r,\rho,z)U_{m,ik}(\varphi)U_{m,ik}(\alpha) \tag{39}$$

матриці впливу (функції впливу), функції Гріна

$$Q_{jp}^{ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}K_{jp}^{m,ik}(t-\tau,r,\rho,z-\xi)\times$$
$$\times\Phi_{m,ik}(\tau,\rho,\xi)U_{m,ik}(\varphi) \tag{40}$$

та компоненти $W_{jr,ik}(t,r,\varphi,\alpha,z)=-\dfrac{a_1^2R_0\sigma_1}{\alpha_{11}^0}E_{j1}^{ik}(t,r,R_0,\varphi,\alpha,z)$ радіальної матриці Гріна (радіальні функції Гріна) відповідних початково-крайових задач спряження, де

$$K_{jp}^{m,ik}(t,r,\rho,z)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}N(t,\lambda,\sigma)V_j(r,\lambda)V_p(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)\cos(\sigma z)d\lambda d\sigma.$$

Проаналізуємо формули (38) в залежності від типу крайових умов на гранях кусково-однорідного клиновидного циліндрично-кругового простору з циліндричною порожниною. Розглянемо, наприклад, випадок крайових умов (5). У цьому випадку функції Гріна

$$Q_{jp}^{11}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2}{\varphi_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}mK_{jp}^{m,11}(t-\tau,r,\rho,z-\xi)\times$$

$$\times\left[g_{1p}(\tau,\rho,\xi)+(-1)^{m+1}\omega_{1p}(\tau,\rho,\xi)\right]\sin\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0}.$$

Якщо визначити тангенціальні функції Гріна

$$W_{jp,1}^{11}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2}{\varphi_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}mK_{jp}^{m,11}(t-\tau,r,\rho,z-\xi)\sin\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0},$$

$$W_{jp,2}^{11}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2}{\varphi_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}K_{jp}^{m,11}(t-\tau,r,\rho,z-\xi)\sin\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0},$$

то розв'язок параболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(4), (5), (9) можна записати у вигляді

$$u_{j,11}(t,r,\varphi,z)=\sum_{p=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{11}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\times$$

$$\times\sigma_\rho\rho d\xi d\alpha d\rho+\sum_{p=1}^{n+1}a_{\varphi_p}^2\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_{-\infty}^{+\infty}[W_{jp,1}^{11}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)g_{1p}(\tau,\rho,\xi)+$$

$$+W_{jp,2}^{11}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)\omega_{1p}(\tau,\rho,\xi)]\sigma_p\rho^{-1}d\xi d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}W_{jr,11}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)g_0(\tau,\alpha,\xi)d\xi d\alpha d\tau;\quad j=\overline{1,n+1}.$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jp}^{11}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)$ і функцій Гріна $W_{jp,s}^{11}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)$, $(s=1,2)$, $W_{jr,11}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_{j,11}(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (41), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4), (5) та умови спряження (9) в сенсі теорії узагальнених функцій [22].

Єдиність розв'язку (41) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) параболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(4), (5), (9).

Методами з [1, 22] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (41) визначають обмежений класичний розв'язок розглянутої задачі.

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j(r,\varphi,z)$, $g_{1j}(t,r,z)$, $\omega_{1j}(t,r,z)$, $(j=\overline{1,n+1})$ задовольняють умови:

1) неперервно диференційовні за змінною t і двічі неперервно диференційовані за геометричними змінними;
2) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;
3) абсолютно сумовні за змінною z на $(-\infty;+\infty)$;
4) абсолютно сумовні з ваговою функцією $r\sigma(r)$ за змінною r на кусково-однорідній полярній осі I_n^+;
5) справджують умови спряження, а функція $g_0(t,\varphi,z)$ також задовольняє умови 1)–3), то параболічна початково-крайова задача спряження (1)–(4), (5), (9) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (41).

Випадки крайових умов (6), (7) чи (8) на гранях клина $\varphi=0$, $\varphi=\varphi_0$ аналізуються аналогічно.

Зауваження 1. У випадку $a_{rj}=a_{\varphi j}=a_{zj}\equiv a_j>0$ формули (38) визначають структури розв'язків розглянутих задач в ізотропному кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з циліндричною порожниною.

Зауваження 2. Випадок зміни φ в межах від φ_1 до φ_2 зводиться до розглянутого заміною $\varphi'=\varphi-\varphi_1$ $(\varphi_0\equiv\varphi_2-\varphi_1)$.

Зауваження 3. Параметри α_{11}^0, β_{11}^0 дозволяють виділяти з формул (38) розв'язки початково-крайових задач спряження у випадках задання на радіальній поверхні $r=R_0$ крайових умов 1-го роду, 2-го роду та 3-го роду.

Зауваження 4. Аналіз формул (38) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j(r,\varphi,z)$, $g_{kj}(t,r,z)$, $\omega_{kj}(t,r,z)$, $j=\overline{1,n+1}$, $k=\overline{1,4}$, $g_0(t,\varphi,z)$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

Висновки. За допомогою методу інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з циліндричною порожниною. Одержані інтегральні зображення розв'язків носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків математичних моделей еволюційних процесів у кусково-однорідних середовищах.

Список використаних джерел:

1. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 274 с.
2. Городецький В. В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В. В. Городецький. — Чернівці : Рута, 1998. — 225 с.
3. Громик А. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2011. — 200 с.
4. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. — К. : Наук. думка, 2001. — 606 с.
5. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
6. Житарашу Н. В. Параболические граничные задачи / Н. В. Житарашу, С. Д. Эйдельман. — Кишинев : Штиинца, 1992. — 327 с.
7. Загорский Т. Я. Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа / Т. Я. Загорский. — Львов : Изд-во ЛГУ, 1961. — 115 с.
8. Ивасишин С. Д. Матрица Грина параболических задач / С. Д. Ивасишин. — К. : Вища школа, 1990. — 199 с.
9. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2013. — 120 с.
10. Конет І. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2016. — 244 с.
11. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
12. Конет І. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2017. — 80 с.
13. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. — М. : Наука, 1967. — 736 с.

14. Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов / Е. М. Ландис. — М. : Наука, 1971. — 288 с.
15. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями / М. І. Матійчук. — Чернівці : Прут, 2003. — 248 с.
16. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — К. : Либідь, 2006. — 424 с.
17. Пукальський І. Д. Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженостями і особливостями / І. Д. Пукальський. — Чернівці : Рута, 2008. — 253 с.
18. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
19. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 668 с.
20. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. — М. : Гостехтеориздат, 1956. — 204 с.
21. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. — М. : Мир, 1968. — 428 с.
22. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

PARABOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN A PIECEWISE HOMOGENEOUS WEDGE-SHAPED CYLINDRICAL-CIRCULAR SPACE WITH A CAVITY

By the method of integral and hybrid integral transforms, in combination with the method of main solutions (matrices of influence and Green matrices) the only exact analytical solutions of the parabolic boundary value problems of mathematical physics in a piecewise homogeneous wedge-shaped cylindrical circular space with a cylindrical cavity were constructed for the first time.

The cases of the Dirichlet and Neumann boundary conditions and their possible combinations (Dirichlet-Neumann, Neumann-Dirichlet) on the edges of the wedge are considered.

The finite integral Fourier transform relative to the angular variable, Fourier integral transform on the Cartesian axis relative to the variable z and Weber-type hybrid integral transform on the polar axis with n conjugation points relative to the radial variable are used to construct solutions.

The sequential application of integral transforms allows us to reduce the three-dimensional initial-boundary value problems to the Cauchy problem for the ordinary linear non-uniform differential equation of the 1st order, the only solution of which is written in a closed form.

The use of inverse integral transforms restores the solutions of the considered problems in explicit form through their integral image.

Key words: *parabolic equation, initial and boundary conditions, conjugation conditions, integral transforms, main solutions.*

Отримано: 12.11.2018