УДК 517.9+518
DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.25-31

А. Ф. Верлань*, д-р. техн. наук, профессор,
С. А. Положаенко,** д-р. техн. наук, профессор,
С. Ю. Протасов*,** канд. техн. наук

* Институт проблем моделирования в энергетике
имени Г. Е. Пухова НАН Украины, г. Киев,
**Одесский национальный политехнический университет, г. Одесса,
***Черкасский государственный технологический университет,
г. Черкассы

ИДЕНТИФИКАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПЕРАТИВНОГО КОНТРОЛЯ ПРОЦЕССА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При компьютерном исследовании динамических задач обычно применяются численные методы решения дифференциальных уравнений. Существенная важность при численных расчетах имеет гарантированная точность вычисленного решения, которая зависит от точности используемого компьютера и влияния на решение неизбежных ошибок входных данных и ошибок округления. Хотя вычислительные правила строятся исходя из условий обеспечения их возможного роста относительно погрешности, однако при большом числе шагов отклонение решения, полученного численным методом, от точного может быть весьма значительным.

Получение удовлетворительных оценок оперативного численного решения дифференциальных уравнений является достаточно сложной задачей, которую во многих практических случаях решить не удается. Таким образом, актуальной задачей с вычислительной точки зрения, является разработка подходов и методов, позволяющих осуществить контроль вычислительного процесса.

В настоящей работе рассматривается возможность контроля погрешности численного решения путем использования методов параметрической идентификации, которые широко применяются при решении практических задач идентификации линейных и нелинейных систем. При этом достоверность контроля не должна завесить от причин, вызывающих погрешность решения. Сам процесс контроля состоит из следующих этапов: восстанавливаются с некоторой точностью параметры уравнений, для которых получаемое численное решение является точным. Оцениваемые параметры (коэффициенты сравниваются с коэффициентами исходных уравнений; разность коэффициентов является информацией, которая используется для оценки поведения решения на участке восстановления (участок восстановления — отрезок численного решения, который используется для параметрической идентификации).

Ключевые слова: *методы идентификации, дифференциальные уравнения, контроль численного решения.*

Введение. Существующие априорные оценки погрешности решения дифференциальных уравнений [1] служат в основном для качественного анализа роста погрешности. Их использование для оценки точности конкретного результата численного решения затруднено тем, что значения входящих в них величин для большинства задач получить трудно, а когда это удаётся, то оценка погрешности может дать очень завышенное значение.

Получение апостериорных оценок наиболее часто связано с проведением параллельных расчетов [2] и их использование может дать удовлетворительные результаты для оценки погрешности на шаге. При определении погрешности конечного результата, получаемые оценки являются в общем случае неудовлетворительными. Контроль погрешности решения с помощью названных оценок затруднен также необходимостью учета ошибок округления [2].

Изложение основного материала. Рассмотрим задачу Коши

$$x = f\left(x,q,t\right),\ \ x\left(t_0\right) = x_0, \tag{1}$$

на отрезке $[t_0, t_N]$, где t — независимая переменная; q — m-мерный вектор параметров; f — вектор-функция; x — n-мерный вектор входных переменных.

Для решения системы (1) можно использовать любой численный метод [1, 2], и значения искомой функции определяются в фиксированных точках $t_i, i = \overline{1,N}$. Требуется оценить погрешность на определенном участке решения, при этом для задачи контроля достаточно установить факт нахождения погрешности в допустимых пределах.

Из-за методической погрешности численных методов и ошибок округления траектории точки в фазовом пространстве для точного решения и полученного численным методом будут различными.

Предположим, что непрерывная функция $z(t)$, соответствующая решетчатой функции $z_i = z(t_i), i = \overline{0,N}$ численного решения (1), является решением системы уравнений

$$z = f\left(z,q^*,t\right),\ \ z\left(t_0\right) = z_0 = x_0. \tag{2}$$

Здесь $q^* \neq q$ и в общем случае может быть функцией независимой переменной. Определение значений вектора параметров q^* может быть осуществлено достаточно просто в случае линейности оператора (2) относительно q^*, т.е. когда систему (2) можно представить в виде

$$z = \varphi\left(z,t\right)q^{*},\ z\left(t_0\right) = z_0 = x_0, \tag{3}$$

где $\varphi(z,t)$ — матрица размером $n \times m$.

Способы получения системы линейных алгебраических уравнений для определения оценки неизвестного вектора параметров по существу определяются видом операторов, применяемых к входным и выходным переменным [3], при этом может использоваться численное дифференцирование или численное интегрирование. Так как в данном случае значения входных и выходных переменных в узлах являются точными, то необходимо иметь число независимых уравнений, равное числу восстанавливаемых элементов вектора q^{*}. Используя, например, численное дифференцирование для определения производных в узловых точках, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$Z = \Phi q^{*}, \tag{4}$$

где Z — m-мерный вектор, составленный из оценок вектора производных в узловых точках, полученных численным дифференцированием; Φ — $m \times m$ матрица, получаемая путем компоновки соответствующих строк матрицы φ. Из выражения (3) получаем оценку искомого вектора

$$\hat{q}^{*} = \Phi^{-1}Z,$$

при условии, что матрица Φ неособенная.

Для определения производных в узловых точках удобно применять метод скользящего дифференцирования, когда производная вычисляется для средней точки интерполируемого участка, а вычисление производных для следующих точек производится сдвигом участка интерполяции. При этом коэффициенты при производных в остаточных членах будут иметь наименьшее значение. Следует отметить, что для определения производных в узлах желательно применять методы численного дифференцирования высокого порядка точности [4].

В случае, когда (2) представляет собой нелинейный относительно вектора параметров оператор, поиск корней (определение q^{*}) соответствующей системы нелинейных алгебраических уравнений является более сложной задачей.

Учитывая изложенное о сложности восстановления параметров в нелинейном случае, а также конечную цель восстановления (контроль погрешности численного решения задачи Коши), следует признать целесообразным выделение в исходной задаче (1) и последующее восстановление фиктивных параметров p, относительно которых задача восстановления является линейной. Заметим, что выделение таких параметров для задачи (1) возможно в общем случае. Действительно, представляя (1) в виде

$$x = F\left(x,q,t\right)p,\ x\left(t_0\right) = x_0,$$

где $F(x, q, t)$ — диагональная матрица, элементы которой равны соответствующим компонентам вектор-функции $f(x, q, t)$, а p — вектор, все элементы которого равны единице, убеждаемся в справедливости указанного замечания. Определение оценки $\hat{p}*$ вектора p для системы уравнений

$$z = F\left(z, q, t\right) p^*,\ \ z\left(t_0\right) = z_0 = x_0,$$

теперь может быть осуществлено так, как указывалось ранее.

В частных случаях в задаче (1) вектор параметров q можно представить в виде прямой суммы векторов q_1 и q_2, причем система (1) может быть записана в виде

$$x = \Psi_1(x, q_1, t) + \Psi_2(x, q_1, t) q_2,\ \ x\left(t_0\right) = x_0,$$

где Ψ_2 — $m \times l$ матрица, l — размерность вектора q_2. И в этих случаях процедура восстановления части параметров с целью контроля численного решения может быть легко осуществлена относительно q_2 аналогично ранее изложенному способу с очевидными изменениями процедуры образования вектора правых частей системы (3). Возможно также решение задачи совместного восстановления фиктивных параметров p и части параметров q.

Следует отметить, что в общем случае вектор восстанавливаемых параметров из-за отклонения численного решения от точного при накоплении погрешностей является функцией независимой переменой, а так как процесс восстановления осуществляется на конечном интервале, то определяя вектор параметров из соответствующей системы алгебраических уравнений, аппроксимируется функция $q^*(t)$ ($p^*(t)$) ступенчатой функцией, постоянной на участках восстановления. Разность между полученной оценкой параметров $\hat{q}*(\hat{p}*)$ и параметрами исходной системы уравнений $q(p)$ является той информацией, которая может быть использована для оценки поведения решения на участке восстановления. Сложность и точность получения оценок во многом определяется видом исходных уравнений.

Для линейных дифференциальных уравнений можно, например, использовать оценки, полученные в работе [5]. При исходной системе уравнений

$$\dot{x} = A\left(t\right) x + f, \quad x\left(0\right) = x_0, \tag{5}$$

где $A\left(t\right) = \left\{a_{ij}\left(t\right)\right\}_1^n$; $f - \left(f_1\left(t\right), \ldots, f_n\left(t\right)\right)^T$; $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right)^T$; T — знак транспонирования, решение которой определяется численным методом, система уравнений, восстановленная на отрезке $\left[t_1, t_2\right]$, численного решения имеет вид

$$\dot{z} = \hat{A}*\left(t\right) z + f, \quad z\left(0\right) = z_0 = x_0. \tag{6}$$

Уравнение для равности решений (5) и (6) имеет вид

$$\Delta x' = \hat{A}*(t) \Delta x + \Delta A(t), \quad \Delta x\left(0\right) = 0. \tag{7}$$

Здесь $\Delta A(t) = A(t) - \hat{A}^*(t), \Delta x = x - z.$ Если элементы матриц и векторов выражения (7) являются непрерывными функциями независимой переменной, то имеет место оценка

$$\left\|\Delta x\right\| \int_{t_1}^{t_2} \exp \int_{\tau}^{t_2} \gamma(\hat{A}^*(\tau_1)\, d\tau_1 \left\|\Delta A(\tau)\right\| \left\|x(\tau)\right\| d\tau,$$

где

$$\gamma\left(A^*(t)\right) = \lim_{h \to +0} \frac{\left\|E - \hat{A}^*(t)\right\| - 1}{h}.$$

В тех случаях, когда это возможно, для оценки погрешности решения могут быть привлечены методы теории чувствительности [6].

Пример. На ЭВМ решается методом Рунге-Кутта четвертого порядка с шагом 0,01 система уравнений $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0$, где $x = (1, 0)^T$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -900 & 0 \end{bmatrix}$. Через 100 шагов численного интегрирования после решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (4) для получения оценки $\hat{A}^*$ матрицы A^* восстанавливаемой системы уравнений $\dot{z} = A^* z, \quad z(0) = z_0 = x_0$ получаем разность

$$\Delta A = A - \hat{A}^* = \begin{bmatrix} 0,5 \cdot 10^{-3} & 0,653 \cdot 10^{-4} \\ -0,588 \cdot 10^{-1} & 0,5 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Для сравнения приведем матрицу ΔA, полученную аналитическим путем без учета погрешностей высшего порядка малости:

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0,675 \cdot 10^{-4} \\ 0,6075 \cdot 10^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Для получения оценок производной в узлах использовался метод численного дифференцирования высокого порядка точности. Как видно из выражения (8), полученное по предлагаемой методике возмущение ΔA элементов матрицы A, отражающее погрешность численного решения, достаточно близко к расчетному (9). Отличие в элементах главной диагонали объясняется неучетом при аналитическом определении ΔA погрешностей высшего порядка малости.

Заключение. Таким образом, в работе предложен простой с вычислительной точки зрения подход оперативного контроля численного решения дифференциальных уравнений с использованием методов идентификации, который позволяет судить о ходе вычислительного процесса. Исходя из точности описания реального процесса системой уравнений (1) можно определить область параметров D. Погрешность решения не превышает неустранимой погрешности из-за неадекватности математической модели (1) реальному процессу, если вектор $\Delta q(\Delta p)$ принадлежит этой области. Следует иметь в виду, что при восстановлении вектора q^* полученную оценку $\hat{q}^*$ можно связать с физической сущностью задачи и сделать определенные выводы о влиянии Δq на решение. Вектор p^* лишен математической интерпретации и для определения влияния на решение вектора $\Delta p = p - \hat{p}^*$ требуются дополнительные исследования.

Список использованной литературы:

1. Киясов С. Н. Дифференциальные уравнения. Основы теории, методы решения задач : учебное пособие / С. Н. Киясов, В. В. Шурыгин. — Казань : Казанский федеральный университет, 2011. — 112 с.
2. Горбань А. В. Устойчивость и оценка погрешности параллельных одношаговых численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [Електронний ресурс] / А. В. Горбань — 2005. — Режим доступа: http://masters.donntu.org/2005/fvti/gorban/diss/index.htm.
3. Сергиенко И. В. Методы получения достоверных решений систем линейных алгебраических уравнений / И. В. Сергиенко, А. Н. Химич, М. Ф. Яковлев // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 1. — С. 68–80.
4. Демидович Б. П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б. П. Демидович, Н. А. Марон, Э. З. Шувалова. — М. : Наука, 1967. — 368 с.
5. Абрегов М. Х. Устойчивый численный метод решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка / М. Х. Абрегов, В. З. Канчукоев, И. К. Машуков // Фундаментальные исследования. — 2016. — № 2 (1) — С. 9–12.
6. Городецкий В. И. Методы теории чувствительности в автоматическом управлении / В. И. Городецкий, Ф. М. Захарин, Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов. — М. : Энергия, 1971. — С. 344.

IDENTIFICATION METHOD OF OPERATIONAL CONTROL THE PROCESS A NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATION

In computer studies of dynamic problems, numerical methods for solving differential equations are usually used. Essential importance in numerical calculations is guaranteed accuracy of the calculated solution, which depends on the accuracy of the computer used and the influence on the decision of inevitable errors of input data and rounding errors. Although the computational rules are built on the basis of the conditions for ensuring their possible growth with respect to the error, however, with a large number of steps, the deviation of the solution obtained by a numerical method from the exact one can be quite significant.

Obtaining satisfactory estimates of the operational numerical solution of differential equations is a rather complicated task, which in many practical cases cannot be solved. Thus, an urgent task from a computational point of view is the development of approaches and methods that allow control of the computational process.

In this paper, we consider the possibility of controlling the error of numerical solution by using the methods of parametric identification, which are widely used in solving practical problems of identifying linear and nonlinear systems. At the same time, the accuracy of the control should not depend on the reasons causing the error of the decision. The control process itself consists of the following steps: the parameters of the equations for which the resulting numerical solution is accurate are restored with some accuracy. The estimated parameters (the coefficients are compared with the coefficients of the original equations; the difference of the coefficients is the information that is used to evaluate the behavior of the solution on the restoration site (the recovery section is the segment of the numerical solution that is used for parametric identification).

Key words: *identification methods, differential equations, control of numerical solution.*

Отримано: 21.11.2018

УДК 519.64
DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.31-38

А. Ф. Верлань, д-р техн. наук, профессор,
Ю. О. Фуртат, канд. техн. наук

Институт проблем моделирования в энергетике имени Г.Е. Пухова НАН Украины, Украина, г. Киев

МЕТОД РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ФОРМЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Интегральные уравнения Вольтерра второго рода являются универсальной математической моделью в задачах идентификации и компьютерного моделирования. При этом сингулярность этих уравнений значительно затрудняет решение данных задач. Для решения этой проблемы используются алгоритмы регуляризации некорректных задач. Параметр регуляризации при этом может быть определен различными способами, в частности, способом модельных примеров. В статье также показан способ решения полученного приближенного выражения из алгоритма регуляризации с применением квадратурных формул.

Также рассматривается задача определения погрешности решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода на основе метода квадратурных формул. Оценивание погрешности проводится путём доказательства соответствующей теоремы и следствий из неё. Одно из следствий из теоремы об огра-

