УДК 519.6:519.622.1:519.624.2

П. С. Сеньо, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВІ МАТЕМАТИКИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕРВАЛІВ

У роботі запропоновані алгоритми на основі математики функціональних інтервалів [3] розв'язування граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Ці методи дають двохсторонні апроксимації розв'язків таких задач сплайнами. Так отримані функціональні інтервали гарантовано містять точний розв'язок задачі.

Кожен такий алгоритм складається із кроків, які можна розбити на два блоки. Перший блок реалізує процедуру побудови найпростіших функціональних інтервалів, які містять першу прохідну та функцію, відповідно. Крім цього, одночасно будуються інтервали, в яких гарантовано містяться значення функції і її похідної на кінцях інтервалу інтегрування. Формули (37)–(46), (48)–(58), (66)–(78) відображають зв'язки між функцією і її похідної на протилежних кінцях інтервалу інтегрування. Тому їх використовуємо для побудови інтервалів, які гарантовано містять ці величини.

Другий блок реалізує процедуру побудови на інтервалі інтегрування функціональних інтервалів, які містять першу прохідну функції, та розв'язок задачі, відповідно. Цей блок кроків алгоритму формуємо на основі висновків теорем 3, 4 за наведеними там формулами.

Теореми 3, 4 є узагальненнями теореми 1 та теореми 2 з [5]. Ці теореми дають можливість аналізувати та усувати різноманітні невизначеності, пов'язані з неперервно диференційовними функціями. Висновки цих теорем дають можливість суттєво звузити двохсторонні апроксимації розв'язку задачі Коші (1)–(2) та граничної задачі (3)–(5). Тому ці висновки можна трактувати як конкретизацію і узагальнення теореми про середнє функції і її похідної.

Запропоновані алгоритми будують функціональні інтервали розв'язку задачі з будь-якою бажаною як завгодно малою шириною.

Ключові слова: *задача Коші, гранична задача, інтервал, функціональний інтервал, двохстороння апроксимація, сплайн.*

Вступ. В [1, 2] двохсторонні апроксимації розв'язку граничної задачі будуються за допомогою ермітових сплайнів. Для цього попередньо здійснюється дискретизація задачі за допомогою відповідних різницевих схем. В результаті цього для досягнення бажаної точності потрібно розв'язувати систему різницевих рівнянь великої розмірності.

В [5] побудовані три методи двохсторонніх апроксимацій сплайнами розв'язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь на основі математики функціональних інтервалів. Так отримані двохсторонні апроксимації є функціональними інтервалами [3], які гарантовано містять точний розв'язок задачі. Однак, ширина таких функціональних інтервалів збільшується при зростанні ширини інтервалу аргументу, на якому шукається розв'язок задачі. У [5] цей ефект послідовно усувається за допомогою потрібної кількості повторені кроків запропонованих алгоритмів.

У цій роботі запропоновані методи двохсторонніх апроксимацій розв'язку задачі Коші та граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь у вигляді функціональних інтервалів. Вони використовують узгодженість між двохсторонніми апроксимаціями функції і її похідної, які є висновками теореми 3 із [5], а також відповідне послідовне зменшення ширини таких функціональних інтервалів, описане нижче.

Формулювання задачі та основні напрямки її розв'язання. Нехай потрібно побудувати на проміжку $[a, b]$ двохсторонні апроксимації сплайнами розв'язку задачі Коші

$$y' = f(x, y(x)), \tag{1}$$

$$y(a) = y_a, \tag{2}$$

та граничної задачі

$$y'' = u(x, y(x), y'(x)), \tag{3}$$

$$v_1(y_a, y_b, y'_a, y'_b) = 0, \tag{4}$$

$$v_2(y_a, y_b, y'_a, y'_b) = 0, \tag{5}$$

де y_a, y_b, y'_a, y'_b — значення функції $y(x)$ та її першої похідної на кінцях проміжку $[a, b]$, відповідно, які гарантовано містять точні розв'язки цих задач. Такі методи будемо будувати на основі математики функціональних інтервалів. При цьому, так отримані функціональні інтервали повинні мати якомога меншу ширину [3].

В основу побудови покладемо наступні лему 1, теореми 1, 2, та висновки з них. Ці результати отримані в [4, 5].

Лема 1. Нехай функція $y(x)$ один раз неперевно диференційовна у кожній точці x інтервалу $[a, b]$ і функції $\underline{g}(x)$, $\overline{g}(x)$ такі, що на цьому інтервалі виконується подвійна нерівність

$$\underline{g}(x) \le y'(x) \le \overline{g}(x). \tag{6}$$

Тоді виконуються наступні нерівності:

$$y_a + \int_a^x \underline{g}(t)dt \le y(x) \le y_a + \int_a^x \overline{g}(t)dt, \tag{7}$$

якщо $x \geq a$,

$$y_b - \int_x^b \overline{g}(t)dt \leq y(x) \leq y_b - \int_x^b \underline{g}(t)dt\,, \tag{8}$$

якщо $x \leq b$,

де
$$y_a = y(a)\,,\ y_b = y(b)\,. \tag{9}$$

Нехай визначені функції

$$\underline{g}(x) = \underline{k}\ x + \underline{m}\,, \tag{10}$$

$$\overline{g}(x) = \overline{k}\ x + \overline{m}\,, \tag{11}$$

$$\overline{p}_a(x) = 0.5\,\overline{k}\ x^2 + \overline{m}\,x - 0.5\,\overline{k}\ a^2 - \overline{m}\,a + y_a\,, \tag{12}$$

$$\underline{p}_a(x) = 0.5\,\underline{k}\ x^2 + \underline{m}\,x - 0.5\,\underline{k}\ a^2 - \underline{m}\,a + y_a\,, \tag{13}$$

$$\overline{p}_b(x) = 0.5\,\underline{k}\ x^2 + \underline{m}\,x - 0.5\,\underline{k}\ b^2 - \underline{m}\,b + y_b\,, \tag{14}$$

$$\underline{p}_b(x) = 0.5\,\overline{k}\ x^2 + \overline{m}\,x - 0.5\,\overline{k}\ b^2 - \overline{m}\,b + y_b\,, \tag{15}$$

$$\omega_a(x) = \overline{p}_a(x) - \underline{p}_a(x)\,, \tag{16}$$

$$\omega_b(x) = \overline{p}_b(x) - \underline{p}_b(x)\,, \tag{17}$$

де
$$y_a = y(a)\,,\ y_b = y(b)\,, \tag{18}$$

$\underline{k}$, $\underline{m}$, $\overline{k}$, $\overline{m}$ — деякі константи. Тоді виконується наступна теорема.

Теорема 1. Нехай в інтервалі $X = [a, b]$ функція $y(x)$ неперервно диференційовна і її похідна $y'(x)$ задовольняє подвійну нерівність

$$\underline{g}(x) \leq y'(x) \leq \overline{g}(x)\,. \tag{19}$$

Тоді:
$$\underline{p}_a(x) \leq y(x) \leq \overline{p}_a(x)\,, \tag{20}$$

$$\underline{p}_b(x) \leq y(x) \leq \overline{p}_b(x)\,; \tag{21}$$

функція $\omega_a(x)$ монотонно зростаюча, а функція $\omega_b(x)$ монотонно спадна, і їх прирости співпадають з точністю до знака;
для будь-якого $x \in X = [a, b]$

$$\omega_a(x) + \omega_b(x) = C > 0\,, \tag{22}$$

де константа

$$C = 0.5\,(\overline{k} - \underline{k})\,(b^2 - a^2) + (\overline{m} - \underline{m})\,(b - a)\,; \tag{23}$$

якщо $\underline{k} \neq \overline{k}$, то в інтервалі $[a, b]$ рівнянь

$$\overline{p}_a(x) = \overline{p}_b(x)\,, \tag{24}$$

$$\underline{p}_a(x) = \underline{p}_b(x) \tag{25}$$

мають розв'язки $\overline{x}^*$, $\underline{x}^*$, відповідно, і вони єдині;

максимальна віддаль $diam_y$ в інтервалі $[a, b]$ вздовж осі OY між точками множини точок, обмежених параболами $\overline{p}_a(x), \overline{p}_b(x)$, $\underline{p}_a(x)$, $\underline{p}_b(x)$ («параболічного паралелограма»), задовольняє співвідношення

$$diam\ _y = \min(Y1, Y2) \le 0.5\, C\ , \tag{26}$$

де

$$Y_2 = 0.5\, \overline{k}\ (b^2 - a^2) + \overline{m}\ (b-a) + y_a - y_b\,, \tag{27}$$

$$Y_1 = y_b - y_a - 0.5\, \underline{k}\ (b^2 - a^2) - \underline{m}\ (b-a)\,. \tag{28}$$

Теорема 2. Нехай на проміжку $[a, b]$ функція $y(x)$ двічі неперервно диференційовна і її друга похідна $y''(x)$ обмежена -

$$\underline{k} \le y''(x) \le \overline{k}\ , \tag{29}$$

де $\underline{k}$, $\overline{k}$ — деякі константи; відоме значення її похідної $y'_a = y'(a)$, $y'_b = y'(b)$ на кінцях інтервалу $[a, b]$.

Тоді:

$$y'_a + \underline{k}\cdot(b-a) \le y'_b \le y'_a + \overline{k}\cdot(b-a)\,, \tag{30}$$

$$\underline{l}(x) \le y'(x) \le \overline{l}\,(x)\,, \tag{31}$$

де

$$\underline{l}(x) = \begin{cases} \underline{k}\cdot x + (y'_a - \underline{k}\cdot a), & a \le x < x_2, \\ \overline{k}\cdot x + (y'_b - \vec{k}\cdot b), & x_2 < x \le b, \end{cases} \tag{32}$$

$$\overline{l}\,(x) = \begin{cases} \overline{k}\cdot x + (y'_a - \overline{k}\cdot a), & a \le x < x_1, \\ \underline{k}\cdot x + (y'_b - \underline{k}\cdot b), & x_1 < x \le b, \end{cases} \tag{33}$$

$$x_1 = ((y'_b - y'_a) - \underline{k}\cdot b + \overline{k}\cdot a) / (\overline{k} - \underline{k})\,, \tag{34}$$

$$x_2 = -((y'_b - y'_a) - \overline{k}\cdot b + \underline{k}\cdot a) / (\overline{k} - \underline{k})\,, \tag{35}$$

$$x_1 + x\ _2 = a + b\ . \tag{36}$$

Методи звуження на кінцях інтервалу двохсторонніх апроксимацій розв'язку задачі Коші та граничних задач. Лема 1 та теореми 1, 2 дають можливість аналізувати та усувати різноманітні невизначеності, пов'язані з неперервно диференційовними функціями. Зокрема, застосування їх до задачі Коші (1)–(2) та граничної задачі (3)–(5) породжує наступну теорему 3.

Нехай визначені многочлени

$$\overline{p1}_a(x) = 0.5\, \overline{k}\ x^2 + (y'_a - \overline{k}\ a)\ x + 0.5\, \overline{k}\ a^2 - (y'_a - \overline{k}\ a)\ a + y_a\,, \tag{37}$$

$$\underline{p1}_a(x) = 0.5\, \underline{k}\ x^2 + (y'_a - \underline{k}\ a)\ x + 0.5\, \underline{k}\ a^2 - (y'_a - \underline{k}\ a)\ a + y_a\,, \tag{38}$$

$$\overline{p2}_a(x) = 0.5\,\underline{k}\,x^2 + (y_b' - \underline{k}\,b)\,x - 0.5\,\underline{k}\,a^2 - (y_b' - \underline{k}\,b)\,a + y_a\,, \quad (39)$$

$$\underline{p2}_a(x) = 0.5\,\overline{k}\,x^2 + (y_b' - \overline{k}\,b)\,x - 0.5\,\overline{k}\,a^2 - (y_b' - \overline{k}\,b)\,a + y_a\,; \quad (40)$$

$$\overline{p1}_b(x) = 0.5\,\underline{k}\,x^2 + (y_a' - \underline{k}\,a)\,x - 0.5\,\underline{k}\,b^2 - (y_a' - \underline{k}\,a)\,b + y_b\,, \quad (41)$$

$$\underline{p1}_b(x) = 0.5\,\overline{k}\,x^2 + (y_a' - \overline{k}\,a)\,x - 0.5\,\overline{k}\,b^2 - (y_a' - \overline{k}\,a)\,b + y_b\,, \quad (42)$$

$$\overline{p2}_b(x) = 0.5\,\overline{k}\,x^2 + (y_b' - \overline{k}\,b)\,x + 0.5\,\overline{k}\,b^2 - (y_b' - \overline{k}\,b)\,b + y_b\,, \quad (43)$$

$$\underline{p2}_b(x) = 0.5\,\underline{k}\,x^2 + (y_b' - \underline{k}\,b)\,x + 0.5\,\underline{k}\,b^2 - (y_b' - \underline{k}\,b)\,b + y_b\,, \quad (44)$$

та сплайни

$$\overline{s}_a(x) = \begin{cases} \overline{p1}_a(x), & a \le x \le x_1, \\ \overline{p2}_a(x) - \overline{p2}_a(x_1) + \overline{p1}_a(x_1), & x_1 \le x \le b, \end{cases} \quad (45)$$

$$\underline{s}_a(x) = \begin{cases} \underline{p1}_a(x), & a \le x \le x_2, \\ \underline{p2}_a(x) - \underline{p2}_a(x_2) + \underline{p1}_a(x_2), & x_2 \le x \le b, \end{cases} \quad (46)$$

де точки x_1, x_2 визначаються за формулами (34), (35), відповідно.

Тоді y_a, y_b, y_a', y_b' — значення функції $y(x)$ та її першої похідної на кінцях проміжку $[a, b]$, відповідно, узгоджуються між собою згідно висновків наступної теореми.

Теорема 3. Нехай функція $y(x)$ двічі неперервно диференційовна на проміжку $[a, b]$ і на цьому проміжку

$$\underline{k} \le y''(x) \le \overline{k}\,, \quad (47)$$

де $\underline{k}, \overline{k}$ деякі константи; відоме її значення $y_a = y(a)$ і значення її похідної $y_a' = y'(a)$, $y_b' = y'(b)$ на кінцях інтервалу $[a, b]$.

Тоді:

1) $$y_b \in [c_1, d_1] \cap [c_2, d_2]\,, \quad (48)$$

де $$[c_1, d_1] \equiv [\underline{s}_a(b), \overline{s}_a(b)]\,, \quad (49)$$

$$\overline{s}_a(b) = y_a + (2\,(\overline{k}\;y_b' - \underline{k}\;y_a')\,(b-a) - \\ -\overline{k}\;\underline{k}\,(b-a)^2 - (y_b' - y_a')^2)\,/\,(2\,(\overline{k} - \underline{k})), \quad (50)$$

$$\underline{s}(b) = y_a + (-2\,(\underline{k}\;y_b' - \overline{k}\;y_a')\,(b-a) + \\ +\overline{k}\;\underline{k}\,(b-a)^2 + (y_b' - y_a')^2)\,/\,(2\,(\overline{k} - \underline{k})); \quad (51)$$

$$[c_2, d_2] \equiv [\underline{p1}_a(b), \overline{p2}_a(b)]\,, \quad (52)$$

якщо $\overline{p2}_a(b) < \overline{p1}_a(b)$, або

$$[c_2, d_2] \equiv [\underline{p2}_a(b), \overline{p1}_a(b)], \tag{53}$$

якщо $\overline{p2}_a(b) \geq \overline{p1}_a(b)$;

2)
$$\begin{aligned} &\left|\overline{p1}_a(b) - \overline{p2}_a(b)\right| = \left|\underline{p1}_a(b) - \overline{p2}_a(b)\right| = \\ &= \left|\overline{p1}_b(a) - \overline{p2}_b(a)\right| = \left|\underline{p1}_b(a) - \overline{p2}_b(a)\right| = \Delta, \end{aligned} \tag{54}$$

де
$$\Delta = 0.5\,(\overline{k} + \underline{k})\,(b-a)^2 + (y'_a - y'_b)\,(b-a); \tag{55}$$

3)
$$\begin{aligned} &\overline{p1}_a(b) - \underline{p1}_a(b) = \overline{p2}_a(b) - \underline{p2}_a(b) = \\ &= \overline{p1}_b(a) - \underline{p1}_b(a) = \overline{p2}_b(a) - \underline{p2}_b(a) \overset{df}{=} \omega, \end{aligned} \tag{56}$$

де
$$\omega = 0.5\,(\overline{k} - \underline{k})\,(b-a)^2, \tag{57}$$

$$\begin{aligned} \omega_{ab} \overset{df}{=} \overline{s}_a(b) - \underline{s}_a(b) = ((\overline{k} + \underline{k})\,(y'_b - y'_a)\,(b-a) - \\ -\overline{k}\ \underline{k}\,(b-a)^2 - (y'_b - y'_a)^2)\,/\,(\overline{k} - \underline{k}). \end{aligned} \tag{58}$$

Доведення. Виконання умов цієї теореми гарантує виконання умов теореми 2. Тому виконуються всі співвідношення (30)–(36), які відображають узгодженості між константами $\overline{k}, \underline{k}$ та значення y'_a, y'_b першої похідної функції $y(x)$ на кінцях проміжку $[a, b]$. Зокрема,

$$\underline{l}(x) \leq y'(x) \leq \overline{l}(x), \tag{59}$$

де $\underline{l}(x), \overline{l}(x)$ лінійні сплайни (32), (33). Очевидно, що

$$\underline{k} \cdot x + (y'_a - \underline{k} \cdot a) \leq \underline{l}(x) \leq y'(x) \leq \overline{l}(x) \leq \overline{k} \cdot x + (y'_a - \overline{k} \cdot a), \tag{60}$$

$$\overline{k} \cdot x + (y'_b - \overline{k} \cdot b) \leq \underline{l}(x) \leq y'(x) \leq \overline{l}(x) \leq \underline{k} \cdot x + (y'_b - \underline{k} \cdot b). \tag{61}$$

Нерівність (60) є нерівністю (19), де

$$\underline{m} = y'_a - \underline{k} \cdot a, \ \ \overline{m} = y'_a - \overline{k} \cdot a, \tag{62}$$

і нерівність (61) є нерівністю (19), в якій

$$\underline{m} = y'_b - \overline{k} \cdot b, \ \ \overline{m} = y'_b - \underline{k} \cdot b. \tag{63}$$

Отже, умови теореми 2 виконуються при двох різних описах (62), (63) поведінки похідної функції $y(x)$ на протилежних кінцях інтервалу $[a, b]$. Тому, згідно теореми 2 та (62), (63), формули (37), (38) є формулами (12), (13) при (62), а формули (39), (40) є формулами (14), (15) при (63), відповідно. Тут враховано те, що згідно (8) леми 1, інтегрування здійснюється від точки b до точки a (у зворотному напрямку). Тепер істинність співвідношень (50), (51), (54)–(58) перевіряється безпосередньо, використовуючи (37)–(46) (див. рис. 1).

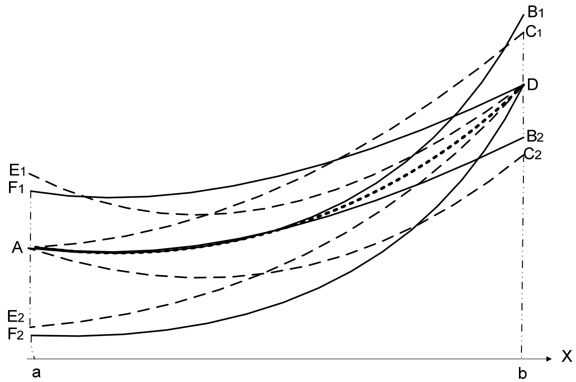

Рис. 1. *Параболи узгодження значень функції $y(x)$ на проміжку $[a, b]$ та її значень і значень її похідної y_a, y_b, y'_a, y'_b, відповідно, в точках a, b*

На рисунку:

- криві AB_1, AB_2 зображають графіки парабол $\overline{p1}_a(x)$, $\underline{p1}_a(x)$;
- криві AC_1, AC_2 зображають графіки парабол $\overline{p2}_a(x)$, $\underline{p2}_a(x)$;
- криві DF_1, DF_2 зображають графіки парабол $\overline{p1}_b(x)$, $\underline{p1}_b(x)$;
- криві DE_1, DE_2 зображають графіки парабол $\overline{p2}_b(x)$, $\underline{p2}_b(x)$;
- крива AD зображає графік функції $y(x)$.

Всі відрізки B_1B_2, C_1C_2, E_1E_2, F_1F_2 мають однакову довжину ω, яка визначається за формулою (56), а всі відрізки B_1C_1, B_2C_2, E_1F_1, E_2F_2 мають однакову довжину Δ, яка визначається за формулою (57).

З теореми 1 випливає, що значення $y_b = y(b)$ функції $y(x)$ гарантовано належить інтервалам B_1B_2 і C_1C_2. Отже це значення належить перетину цих інтервалів, тобто $y_b \in [c_2, d_2]$, де межі цього інтервалу визначаються за формулами (52), або (53).

Нехай

$$\overline{g}(x) \overset{df}{=} \overline{s}_a(x), \underline{g} \overset{df}{=} \underline{s}_a(x). \qquad (64)$$

Очевидно, що умови леми 1 виконуються. Оскільки значення y_b невідоме, то застосуємо нерівність (7) при $x = b$. Отримаємо нерівність $\underline{s}_a(b) \le y_b \le \overline{s}_a(b)]$. Отже $y_b \in [c_1, d_1]$. Оскільки $y_b \in [c_1, d_1]$ і $y_b \in [c_2, d_2]$, то $y_b \in [c_1, d_1] \bigcap [c_2, d_2]$. **Теорема доведена.**

Зауваження 1. Якщо відомі значення y_b, y'_a, y'_b і потрібно знайти межі інтервалу, у якому знаходиться значення y_a, то застосовуємо висновки наступної теореми.

Теорема 4. Нехай функція $y(x)$ двічі неперервно диференційовна на проміжку $[a, b]$ і на цьому проміжку

$$\underline{k} \le y''(x) \le \overline{k}\,, \tag{65}$$

де $\underline{k}, \overline{k}$ деякі константи; відоме її значення $y_b = y(b)$ і значення її похідної $y'_a = y'(a)$, $y'_b = y'(b)$ на кінцях інтервалу $[a, b]$.

Тоді:

1) $$y_b \in [c_1, d_1] \cap [c_2, d_2]\,, \tag{66}$$

де $$[c_1, d_1] \equiv [\underline{s}_b(a), \overline{s}_b(a)]\,, \tag{67}$$

$$\overline{s}_b(a) = y_b + (-2\,(\overline{k}\ y'_b - \underline{k}\ y'_a)\,(b-a) - \overline{k}\ \underline{k}\,(b-a)^2 - (y'_b - y'_a)^2)\,/\,(2\,(\overline{k} - \underline{k})), \tag{68}$$

$$\underline{s}_b(a) = y_b + (2\,(\underline{k}\ y'_b - \overline{k}\ y'_a)\,(b-a) + \overline{k}\ \underline{k}\,(b-a)^2 + (y'_b - y'_a)^2)\,/\,(2\,(\overline{k} - \underline{k}));\tag{69}$$

$$[c_2, d_2] \equiv [\underline{p2}_b(a), \overline{p1}_b(a)]\,, \tag{70}$$

якщо $\overline{p1}_b(a) < \overline{p2}_b(a)$, або

$$[c_2, d_2] \equiv [\underline{p1}_b(a), \overline{p2}_b(a)]\,, \tag{71}$$

якщо $\overline{p1}_b(a) \ge \overline{p2}_b(a)$;

2) $$\begin{aligned} &\left|\overline{p1}_a(b) - \overline{p2}_a(b)\right| = \left|\underline{p1}_a(b) - \overline{p2}_a(b)\right| = \\ &= \left|\overline{p1}_b(a) - \overline{p2}_b(a)\right| = \left|\underline{p1}_b(a) - \overline{p2}_b(a)\right| = \Delta, \end{aligned} \tag{72}$$

де $$\Delta = 0.5\,(\overline{k} + \underline{k})\,(b-a)^2 + (y'_a - y'_b)\,(b-a)\,; \tag{73}$$

3) $$\begin{aligned} &\overline{p1}_a(b) - \underline{p1}_a(b) = \overline{p2}_a(b) - \underline{p2}_a(b) = \\ &= \overline{p1}_b(a) - \underline{p1}_b(a) = \overline{p2}_b(a) - \underline{p2}_b(a) \overset{df}{=} \omega, \end{aligned} \tag{74}$$

де $$\omega = 0.5\,(\overline{k} - \underline{k})\,(b-a)^2\,, \tag{75}$$

$$\begin{aligned} \omega_{ba} \overset{df}{=} \overline{s}_b(a) - \underline{s}_b(a) = ((\overline{k} + \underline{k})\,(y'_b - y'_a)\,(b-a) - \\ -\overline{k}\ \underline{k}\,(b-a)^2 - (y'_b - y'_a)^2)\,/\,(\overline{k} - \underline{k}). \end{aligned} \tag{76}$$

Тут

$$\overline{s}_b(x) = \begin{cases} \overline{p2}_b(x) - \overline{p2}_b(x_2) + \overline{p1}_b(x_2), & a \le x \le x_2, \\ \overline{p1}_b(x), & x_2 \le x \le b, \end{cases} \tag{77}$$

$$\underline{s}_b(x)=\begin{cases}\underline{p2}_b(x)-\underline{p2}_b(x_1)+\underline{p1}_b(x_1),\ a\le x\le x_1,\\ \underline{p1}_b(x),\ x_1\le x\le b,\end{cases} \tag{78}$$

Доведення теореми 4 аналогічне доведенню теореми 3.

Зауваження 2. Теореми 3, 4 є узагальненнями теореми 1 та теореми 2 з [5] Висновки цих теорем дають можливість суттєво звузити двохсторонні апроксимації розв'язку задачі Коші (1)–(2) та граничної задачі (3)–(5).

Зауваження 3. Формули (37)–(46), (48)–(58), (66)–(78) відображають зв'язки між функцією $y(x)$ і її похідної на протилежних кінцях інтервалу $[a,b]$. Тому їх використовуємо для побудови інтервалів, які гарантовано містять величини y_a, y_b, y'_a, y'_b.

Приклад 1. Функція $y(x)$ в точці a = 0 набуває значення 2, а її перша похідна — 0. Перша похідна в точці b = 0.0319 рівна 0.134145, і $2.98724\le y''(x)\le 5.58151$ в інтервалі $[a,b]$. Знайти інтервал, який гарантовано містить невідоме значення $y(b)$.

Згідно (55), (57), $\Delta=$ 0.00008071, $\omega=0.00132005$. За формулами (50), (51), (58) отримуємо: $\overline{s}_a(b)=$ 2.00246846, $\underline{s}(b)=2.0018109$, $\omega_{ab}=$ 0.000657559. Отже інтервал [2.0018109, 2.00246846] гарантовано містить значення $y(b)$.

Умови прикладу 1 співпадають із відповідними значеннями функції — розв'язку задачі Коші з [5], значення якої $y(b)$ = 2.0021036992621526.

Алгоритм побудови методів розв'язування граничних задач на основі математики функціональних інтервалів. Кожен алгоритм розв'язування таких задач, заснований на математиці функціональних інтервалів, складається із кроків, які можна розбити на два блоки.

Перший блок реалізує процедуру побудови на інтервалі $[a,b]$ функціонального інтервалу, який містить першу похідну $y'(x)$ функції $y(x)$, та функціонального інтервалу, який містить функцію $y(x)$. Верхні і нижні обмежуючі функції цих інтервалів повинні бути двох ланковими кусково-лінійними функціями. Крім цього, одночасно будуються інтервали, в яких гарантовано містяться значення y_a, y_b, y'_a, y'_b. Це реалізуємо на основі висновків теореми 2, які почергово застосовуємо до похідної $y'(x)$, та функції $y(x)$.

Другий блок реалізує процедуру побудови на інтервалі $[a,b]$ функціонального інтервалу, який містить першу похідну $y'(x)$ функції $y(x)$, та функціонального інтервалу, який містить функцію $y(x)$. Обмежуючі функції функціонального інтервалу похідної отримуємо у вигляді квадратичних сплайнів, а функціонального інтервалу функції — у вигляді кубічних сплайнів. Алгоритм будує обидва функціональні інтервали з будь-якою як завгодно малою шириною.

Приклад 2. Побудувати алгоритм на основі математики функціональних інтервалів розв’язування на інтервалі $[a, b]$ граничної задачі

$$y'' = u(x, y(x), y'(x)), \tag{79}$$

$$y(a) = y_a, \tag{80}$$

$$y(b) = y_b, \tag{81}$$

Будуємо перший блок кроків алгоритму.

1. Визначаємо кутовий коефіцієнт k_0 прямої, яка проходить через точки (a, y_a), (b, y_b).

$$k_0 = (y_b - y_a)/(b - a). \tag{82}$$

2. Вибираємо довільні значення коефіцієнтів $\overline{k'}_0, \underline{k'}_0$, але таких, що $k_0 < \overline{k'}_0, \underline{k'}_0 < k_0$.
3. Знаходимо ординати $\overline{m}_0, \underline{m}_0$ точок перетинів прямих

$$y = \overline{k'}_0 \cdot x + (y_a - \overline{k'}_0 \cdot a),\ y = \underline{k'}_0 \cdot x + (y_b - \underline{k'}_0 \cdot b), \tag{83}$$

та

$$y = \overline{k'}_0 \cdot x + (y_b - \overline{k'}_0 \cdot b),\ y = \underline{k'}_0 \cdot x + (y_a - \underline{k'}_0 \cdot a), \tag{84}$$

відповідно.

4. Із теореми 2 слідує, що початковий функціональний інтервал, який містить $y(x)$ має такі обмежуючі функції:

$$y = \overline{m}_0,\ y = \underline{m}_0, \tag{85}$$

а початковий функціональний інтервал, який містить $y'(x)$ — такі:

$$y = \overline{k'_0},\ y = \underline{k'}_0, \tag{86}$$

Отже всі гіпотетичні значення функції $y(x)$ містяться в інтервалі $[\underline{m}_0, \overline{m}_0]$, а всі гіпотетичні значення функції $y'(x)$ — в інтервалі $[\underline{k'}_0, \overline{k'}_0]$.

5. Підставляємо у (79) інтервали $[a, b]$, $[\underline{m}_0, \overline{m}_0]$, $[\underline{k'}_0, \overline{k'}_0]$ замість $x, y(x), y'(x)$, відповідно, знаходимо інтервальне розширення $[\underline{k''}_0, \overline{k''}_0]$ функції $u(x, y(x), y'(x))$. Отже початковий функціональний інтервал, який містить $y''(x)$ має такі обмежуючі функції:

$$y = \overline{k''_0},\ y = \underline{k''}_0, \tag{87}$$

Далі узгодження між так отриманими функціональними інтервалами з обмежуючими функціями (85)–(87) здійснюємо повторюючи кроки алгоритму 2–4 декілька разів.

Другий крок блок кроків алгоритму формуємо на основі висновків теорем 3, 4 за наведеними там формулами.

Висновки. В роботі розроблена методика побудови методів знаходження розв’язків граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку у вигляді двохсторонніх апроксимації розв’язків таких задач сплайнами, які гарантовано містять точний розв’язок задачі; розроблені алгоритми суттєвого звуження таких апроксимацій, що дає можливість будувати функціональні інтервали розв’язку задачі з будь - якою бажаною як завгодно малою шириною.

Список використаних джерел:

1. Добронец Б. С. Двусторонние численные методы / Б. С. Добронец, В. В. Шайдуров — Новосибирск : Наука, Сибирское отделение, 1990. — 208 с.
2. Калмыков С. А. Методы интервального анализа / С. А. Калмыков, Ю. И. Шокин, З. Х. Юлдашев. — Новосибирск : Наука, Сибирское отделение, 1986. — 222 с
3. Сеньо П. С. Арифметика лінійних функціональних інтервалів / П. С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2014. — Вип. 21. — С. 38–57.
4. Сеньо П. С. Деякі застосування математики функціональних інтервалів / П. С. Сеньо // Матем. та комп. моделювання. Серія: фізико-матем. науки. — 2016. — Вип. 13. — С. 182–193.
5. Сеньо П. С. Двохсторонні методи розв’язування задачі Коші на підставі математики функціональних інтервалів / П. С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2017. — Вип. 24. — С. 18–37.
6. Senio P. S. The method of solving the Cauchy problem that is based on the adjustment the approximation of the function and its derivative / P. S. Senio, T. I. Stoyko // East European Scientific Journal. — Warsaw, 2017. — No 9. — P. 65–72.

METHODS OF SOLVING BOUNDARY PROBLEMS BASED ON MATHEMATICS OF FUNCTIONAL INTERVALS

In this article, algorithms are proposed based on the mathematics of function intervals [3] for solving boundary value problems for ordinary differential equations of the second order. These methods give two-sided approximations of solutions of such problems with splines. Thus the resulting functional intervals definitely contain the exact solution of the problem.

Each such an algorithm consists of steps that can be divided into two blocks. The first block implements the procedure for constructing the simplest functional intervals that contain the first pass and the function, respectively. In addition, intervals are constructed at the same time, which definitely contain the values of the function and its derivative at the ends of the integration interval. Formulas (37)–(46), (48)–(58), (66)–(78) represent the connections between the function and its derivative at the opposite ends of the integration interval. Therefore, they are used to construct intervals that definitely contain these values.

The second block implements the construction procedure on the integration interval of functional intervals, which contain the first pass function, and the solution of the problem, respectively. This block of steps of the algorithm is formed on the basis of the conclusions of Theorems 3 and 4 according to the formulas given there.

Theorems 3 and 4 are generalizations of Theorem 1 and Theorem 2 of [5]. These theorems make it possible to analyze and eliminate the various uncertainties connected with continuously differentiable functions. The conclusions of these theorems make it possible to substantially reduce the two-sided approximations of the Cauchy problem solution (1)–(2) and of the boundary problem solution (3)–(5). Therefore, these conclusions can be interpreted as concretization and generalization of the theorem on the average function and its derivative.

The proposed algorithms construct functional intervals of the problem solution with any desired small (as you wish) width.

Key words: *Cauchy problem, boundary value problem, interval, functional interval, two-sided approximation, spline.*

Отримано: 21.05.2018

УДК 517.944

С. Г. Хома-Могильська*, канд. фіз.-мат. наук,
В. З. Чорний,** канд. фіз.-мат. наук

*Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль,
**Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль

ДОСЛІДЖЕННЯ T-ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Як показано в багатьох класичних підручниках з теорії звичайних диференціальних рівнянь, щоб існував T-періодичний розв'язок рівняння $Lu = f(x, t, u)$, потрібно, щоб права частина рівняння $f(x, t, u)$ була T-періодичною по t, тобто $f(x, t+T, u) = f(x, t, u)$. Зауважимо, що не кожне рівняння при такій умові може мати T-періодичний розв'язок. Прикладом такого твердження є звичайне диференціальне рівняння $dx / dt = sin^2 t$, розв'язок якого не є періодичним. Для дослідження існування T-періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь та їх систем А. М. Самойленком був розроблений чисельно-аналітичний метод побудови T-періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і систем. Результати, одержані А. М. Самойленко, були використані для дослідження T-періодичних розв'язків багатьох нових класів звичайних диференціальних рівнянь і навіть захопили задачу Гурса для рівнянь у частинних похідних. Зазначимо, що крайові T-періодичні задачі для більш загального диференціального рівняння у частинних похідних не були досліджені аналітичним методом. Вперше у даній роботі нами показано методику дослідження T-періодичних розв'язків крайової T-періо-