УДК 518.25

Л. М. Семчишин, канд. фіз.-мат. наук

Чортківський навчально-науковий інститут підприємництва і бізнесу Тернопільський національний економічний університет, м. Чортків

ЗАСТОСУВАННЯ РОЗРІДЖЕНИХ ЧИСЛОВИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ В СЕРЕДОВИЩІ MATLAB

У статті запропоновано новий підхід до розв’язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами. Проведено підрахунок кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць. Охарактеризовано складність алгоритму з точки зору комп’ютерної алгебри. Проведено порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Обчислено кількість записів для методу прогонки. Протестовано алгоритми розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Показано ефективність запропонованого алгоритму.

Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) завжди є одним із актуальних задач обчислювальної математики. При розв’язанні широкого кола прикладних задач більшість сучасних вчених, інженерів і техніків, як правило, використовують пакети комп’ютерної алгебри. Розв’язання математичних задач з допомогою системи MATLAB заслуговує особливої уваги. Зорієнтована на роботу з реальними даними, ця система виконує всі обчислення в арифметиці з плаваючою комою на відміну від конкуруючих систем комп’ютерної алгебри REDUCE, MACSYMA, DERIVE, Maple, Mathematica, Theorist, в яких переважає цілочисельне представлення і символьна обробка даних. Хоча для розв’язання проблем на межі символьних обчислень і обчислень з плаваючою комою до складу інтегрованої системи MATLAB включений пакет прикладних програм Extended Symbolic Mathematics Toolbox, котрий реалізує інтерфейс з системою символьних обчислень Maple.

Одним з важливих інструментів MatLab є набір процедур лінійної алгебри. В обчислювальному плані розділ лінійної алгебри підтриманий пакетами прикладних програм LINPACK, EISPACK, які були створені в 70-ті роки минулого століття провідними фахівцями світу, до яких належить і засновник фірми MathWorks Inc. К. Моулер. Власне вихідною задачею системи MatLab і було створення діалогової оболонки для роботи з пакетами лінійної алгебри.

Система MatLab — відкрите середовище, яке досить динамічно розвивається зусиллями сотень і тисяч дослідників, адже це одночасно і операційна оболонка і досить гнучка мова

програмування. Однією з найбільш сильних сторін є те, що на мові MatLab можуть бути написані програми і функції для багатократного використання.

Ключові слова: *розріджені системи, ланцюгові дроби, скінченні суми, кількість записів, складність алгоритму, комп'ютерна алгебра, тестування алгоритмів.*

Вступ. Економіко-математичні дослідження, що проводяться в країні, охоплюють важливі проблеми на різних рівнях планування та управління. Успішне розв'язання численних економіко-математичних задач стало можливим лише завдяки широкому використанню математичних моделей, обчислювальних методів і комп'ютерних технологій. Застосування математики в економіці дозволяє виділити й формально описати найголовніші зв'язки між економічними змінними та параметрами об'єктів дослідження, індуктивним шляхом одержати нові відомості про об'єкт, зробити важливі теоретичні висновки і прийняти правильні економічні рішення. Головні переваги математики як засобу наукового пізнання найповніше розкриваються саме у процесі побудови математичних моделей.

Постановка проблеми. Обчислювальний експеримент дозволяє із заданою точністю кількісно та якісно описати досліджувану проблему, інакше кажучи побудувати математичну модель, аналіз якої в свою чергу дозволяє глибше проникнути в суть явища, що вивчається. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) завжди є одним із актуальних задач обчислювальної математики. Особливо часто їх доводиться розв'язувати під час дослідження економіко-математичних задач. Обчислювальна математика вивчає чисельні методи розв'язування різних математичних задач, тобто методи, які ґрунтуються на побудові скінченної послідовності дій над скінченною множиною чисел. Обчислювальні методи — одні з базових інструментів математичного моделювання і є важливою частиною програмного забезпечення для комп'ютерів усіх поколінь. За умови використання таких обчислювальних методів застосовують математичне моделювання до розв'язку математичної задачі. Тоді розв'язок одержується у вигляді числового результату. Залежно від того, на який економічний процес звертається основна увага, при побудові й дослідженні моделі використовується відповідний математичний апарат. Його ефективність визначається продуктивністю ЕОМ та якістю обчислювальних алгоритмів і програм, що використовуються. Побудова ефективних методів визначення невідомих для таких систем — потрібна і досить непроста задача.

Аналіз останніх публікацій. Багато відомих вітчизняних і закордонних вчених займалися проблемами розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Серед них: В. Воєводін [1], Є. Тиртишніков [2], Дж. Уилкинсон [3] та ін. Розв'язуванню розріджених систем лінійних алгебричних рівнянь із блочними елементами присвячені роботи В. Воєводіна [1], Ф. Гантмахера [4]. Однак деякі проблеми не мають однозначного розв'язання і потребують уточнення. У роботі М. Недашковського і О. Ковальчук [5] розглянуто комп'ютерні алгоритми для систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Особлива увага приділялась методам аналізу обчислювальної стійкості алгоритмів у працях таких вчених як: С. Ашманов [6], Д. Дэвэнпорт, И. Сирэ, Э. Турнье [7]. У роботі [8, с. 91–99] запропоновано новий підхід до програмної реалізації розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Проаналізовано обчислювальну стійкість запропонованого алгоритму.

Актуальність теми. Застосування розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь вимагає використання ефективних чисельних методів.

Слід зауважити, що питання програмної реалізації розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь розглядалося у праці [8, с. 91–99]. Однак, у роботі М. Недашковського і О. Ковальчук [5] розглянуто комп'ютерні алгоритми для систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Мета роботи. Метою цієї роботи є дослідження нового підходу до розв'язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами. Проведення підрахунку кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць.

Порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Обчислення кількості записів для методу прогонки. Тестування алгоритмів розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Теоретичну та методологічну основу дослідження складають методи оптимізації, математичне моделювання.

Основна частина. У значній кількості прикладних задач виникає необхідність розв'язання розріджених числових систем лінійних алгебричних рівнянь із блочними елементами [1, 2]. Розглянемо метод розв'язування розріджених систем із деякими найхарактернішими способами заповнення.

Розглянемо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,n+1} \\ A_{2,n+1} \\ A_{3,n+1} \\ \dots \\ A_{n-1,n+1} \\ A_{n,n+1} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

елементи якої A_{ij} — це блоки розмірності $m \times m$. Позначимо через $A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{bmatrix}$ мінор, розміщений на перетині блочних стрічок $i_1, i_2, \dots, i_k$ та блочних стовпців $j_1, j_2, \dots, j_k$. За узагальненим правилом Крамера [2]

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{1,n+1} & 0 & 0 \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \ddots & A_{2,n+1} & \ddots & 0 \\ \ddots & A_{3,2} & \ddots & A_{3,n+1} & \ddots & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & A_{n,n+1} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}}$$

Розкладаючи чисельник за мінорами, можна записати

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \times$$
$$\times \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{k,n+1} A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix} \right) \tag{2}$$

Введемо позначення

$$\alpha_{ik} = A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}, \ i,k = \overline{1,n}.$$

Тоді для визначення невідомої x_1 маємо співвідношення

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k}. \tag{3}$$

Для компактності запису надалі будемо позначати результат виконання операції множення на обернену матрицю зліва у вигляді $C^{-1}D = D/C$. Тоді вираз $D_1/(C_1 + D_2/C_2)$ означатиме $(C_1 + C_2^{-1}D_2)^{-1} \cdot D_1$.

Якщо до співвідношення (3) застосувати відому рівність Леонарда Ейлера [5], яка пов'язує ланцюгові дроби з рядами та скінченними сумами, то для x_1 одержимо

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k} = \frac{A\begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}} \times \tag{4}$$

$$\times\cfrac{A_{1,n+1}}{E+\cfrac{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}/A_{1,n+1}\alpha_{1,1}}{E-\cfrac{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}}{A_{1,n+1}\alpha_{1,2}}+\cfrac{A_{3,n+1}\alpha_{1,3}/A_{2,n+1}\alpha_{1,2}}{E-\cfrac{A_{3,n+1}\alpha_{1,3}}{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}}+\ddots}}}.$$

$$\ddots+\cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{1,n}/A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1}}{E-\cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{1,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1}}}$$

Тут і далі E — означає одиничну матрицю.

Вираз $\alpha_{1,k+1}^{-1}\cdot\alpha_{1,k}$ $(k=1,2,\ldots)$ також можна розкласти в ланцюгові дроби [5]

$$\frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{1,k+1}}=\frac{A_{1,k}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}}{A_{k+1,k+1}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}-A_{k+1,k}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k-1\\1&\ldots&k-1\end{bmatrix}}=$$

$$=\frac{A_{1,k}\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}}{A_{k+1,k+1}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}-A_{k+1,k}A_{k,k+1}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k-1\\1&\ldots&k-1\end{bmatrix}}=$$

$$=\frac{E}{A_{k+1,k+1}-A_{k+1,k}A_{k,k+1}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k-1\\1&\ldots&k-1\end{bmatrix}A^{-1}\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}}= \qquad (5)$$

$$=\frac{E}{A_{k+1,k+1}-A_{k+1,k}A_{k,k+1}\left(A^{-1}\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}^T A^T\begin{bmatrix}1&\ldots&k-1\\1&\ldots&k-1\end{bmatrix}\right)^T}=$$

$$=\ldots=\cfrac{E}{A_{k+1,k+1}-\cfrac{A_{k+1,k}A_{k,k+1}}{A_{k,k}-\cfrac{A_{k-1,k}A_{k,k-1}}{A_{k-1,k-1}-\ddots}}}. \qquad k=\overline{1,n}.$$

$$\ddots-\frac{A_{1,2}A_{2,1}}{A_{1,1}}$$

В подібний спосіб

$$\frac{A\begin{bmatrix}2 & 3 & \dots & n\\ 2 & 3 & \dots & n\end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{bmatrix}}=$$

$$=\frac{E}{A_{1,1}-A_{2,1}A_{1,2}\left[A^{-1}\begin{bmatrix}2 & 3 & \dots & n\\ 2 & 3 & \dots & n\end{bmatrix}^{T}A\begin{bmatrix}3 & 4 & \dots & n\\ 3 & 4 & \dots & n\end{bmatrix}^{T}\right]}=$$

$$=\dots=\cfrac{E}{A_{1,1}-\cfrac{A_{2,1}A_{1,2}}{A_{2,2}-\cfrac{A_{2,3}A_{3,2}}{A_{3,3}-\ddots\,\ddots-\cfrac{A_{n-1,n}A_{n,n-1}}{A_{n,n}}}}}.$$

За аналогічною схемою знаходимо решту невідомих x_i

$$x_i=\left(A\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{bmatrix}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(\frac{A_{i,n+1}}{2}\alpha_{i,i}+\sum_{k=1}^{i-1}(-1)^{i+k}A_{k,n+1}\alpha_{i,k}+\frac{A_{i,n+1}}{2}\alpha_{i,i}+\sum_{k=i+1}^{n}(-1)^{i+k}A_{k,n+1}\alpha_{i,k}\right)=$$

$$=\left[(-1)^{2i-1}A_{i-1,i}\alpha_{i,i-1}/\alpha_{i,i}+(-1)^{2i}A_{i,i}+(-1)^{2i+1}A_{i+1,i}\alpha_{i,i+1}/\alpha_{i,i}\right]^{-1}\times$$

$$\times[\cfrac{\frac{1}{2}A_{i,n+1}}{E-\cfrac{2\left(A_{i,n+1}\alpha_{i,i}\right)^{-1}A_{i-1,n+1}\alpha_{i,i-1}}{E+\cfrac{2A_{i-1,n+1}\alpha_{i,i-1}}{A_{i,n+1}\alpha_{i,i}}-\ddots\,\ddots-\cfrac{\cfrac{A_{1,n+1}\alpha_{i,1}}{A_{2,n+1}\alpha_{i,2}}}{E+\cfrac{A_{1,n+1}\alpha_{i,1}}{A_{2,n+1}\alpha_{i,2}}}}}-$$

$$
-\cfrac{\frac{1}{2}A_{i,n+1}}{E-\cfrac{2\left(A_{i,n+1}\alpha_{i,i}\right)^{-1}A_{i+1,n+1}\alpha_{i,i+1}}{E+\cfrac{2A_{i+1,n+1}\alpha_{i,i+1}}{A_{i,n+1}\alpha_{i,i}}-\ddots}}]
$$

$$
\ddots-\cfrac{\cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{i,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{i,n-1}}}{E+\cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{i,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{i,n-1}}}
$$

А для кожного відношення $\alpha_{i,k}/\alpha_{i,k+1}$ в свою чергу можна записати:

$$
\frac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{i,k+1}}=\frac{A\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & i-1\\ 1 & 2 & \dots & i-1\end{bmatrix}\prod_{s=i+1}^{k-1}A_{s,s+1}A\begin{bmatrix}k+1 & \dots & \dots & n\\ k+1 & \dots & \dots & n\end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & i-1\\ 1 & 2 & \dots & i-1\end{bmatrix}\prod_{s=i+1}^{k}A_{s,s+1}A\begin{bmatrix}k+2 & \dots & \dots & n\\ k+2 & \dots & \dots & n\end{bmatrix}}=
$$

$$
=\frac{A\begin{bmatrix}k+1 & \dots & \dots & n\\ k+1 & \dots & \dots & n\end{bmatrix}}{A_{k,k+1}A\begin{bmatrix}k+1 & \dots & \dots & n\\ k+1 & \dots & \dots & n\end{bmatrix}}=
$$

$$
=\frac{A_{k+1,k+1}}{A_{k,k+1}}-\frac{A_{k+1,k+2}A_{k+2,k+1}}{A_{k,k+1}\left(A^{-1}\begin{bmatrix}k+3 & \dots & n\\ k+3 & \dots & n\end{bmatrix}^{T}A^{T}\begin{bmatrix}k+2 & \dots & n\\ k+2 & \dots & n\end{bmatrix}\right)^{T}}=
$$

$$
=\dots=\frac{A_{k+1,k+1}}{A_{k,k+1}}-\cfrac{A_{k+1,k+2}A_{k+2,k+1}/A_{k,k+1}}{A_{k+2,k+2}-\cfrac{A_{k+3,k+2}A_{k+2,k+3}}{A_{k+3,k+3}-\cfrac{A_{k+3,k+4}A_{k+4,k+3}}{A_{k+4,k+4}-\ddots}}}.
$$

$$
\ddots-\frac{A_{n-1,n}A_{n,n-1}}{A_{n,n}}
$$

Отже, одержуємо аналітичне розвинення невідомих даної розрідженої системи лінійних алгебраїчних рівнянь у скінчені матричні ланцюгові дроби.

Обчислювальні характеристики алгоритму. Тепер підрахуємо необхідну кількість записів при символьному розв'язуванні задачі та кількість операцій під час чисельної реалізації алгоритму множення матриць $A_{ij} \cdot A_{kl}$.

Твердження [5]. Нехай деяка обчислювальна задача з вхідними даними $\{A_i\}$ розв'язується на ЕОМ за алгоритмом ψ $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ і складається з k кроків ψ_j $(j = \overline{1,k})$. Якщо на кожному кроці алгоритму $\psi(A)$ реалізується хоча б один запис виду $\psi_{ji_1}(A) \cdot \psi_{ji_2}(A)$, який використовує результат попереднього кроку, то загальна складність Q_ψ задачі буде не меншою $2^k \cdot m^2$, але не більшою H^k записів, де H — найбільша ширина алгоритму на k кроках.

Використаємо це твердження для оцінки складності алгоритму з точки зору комп'ютерної алгебри [7]. Для чисел x_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ на одному поверсі реалізація алгоритму вимагає одне блочне множення, одне блочне ділення, одне блочне додавання, а для n поверхів — $3n$ операцій, тобто по n блочних множень, ділень та додавань.

Обчислення показують, що для визначення всіх $A_{i,\,k} / A_{i,\,k+1}$ потрібно $5k$ записів, якщо $k < i$, і $5(n-k)$, якщо $k > i$. Таким чином необхідно виконати

$$5\sum_{k=1}^{i} k + 5\sum_{k=i}^{n} n-k = 5\left[\frac{(1+i)i}{2} + n(n-i+1) - \frac{(i+n)(n-i+1)}{2}\right] = 5\left[i^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - ni\right].$$

Отже, загальна складність методу становить

$$5\sum_{i=1}^{n}\left[i^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - ni\right] = \frac{5}{2}(n^3 + n).$$

Відомо [5], що алгоритм прогонки реалізується співвідношеннями

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, \ \alpha_{i+1} = \frac{a_{i,i+1}}{a_{i,i} - a_{i,i-1}}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_{i,n+1} + a_{i,i-1}\beta_i}{a_{i,i} - a_{i,i-1}}$$

для прямого та зворотного ходу.

Проведемо порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Кількість записів для методу прогонки, який реалізується співвідношеннями

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \beta_2, \quad \alpha_2 = a_{1,2} / a_{1,1}, \ \beta_2 = a_{1,n+1} / a_{1,1},$$

$$x_2 = \alpha_3 x_3 + \beta_3, \quad \alpha_3 = \frac{a_{2,3}}{a_{2,2} - a_{2,1}}, \ \beta_3 = \frac{a_{2,n+1}}{a_{2,2} - a_{2,1}},$$

$$x_{n-1} = \alpha_n x_n + \beta_n, \quad \alpha_n = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1} - a_{n-1,n-2}}, \ \beta_n = \frac{a_{n-1,n+1}}{a_{n-1,n-1} - a_{n-1,1}},$$

буде оцінюватися відповідно до *твердження*. Розрахунки свідчать, що для обчислення α_{i+1} та β_{i+1} необхідно записати по i операцій блочного додавання, блочного множення та блочного ділення.

Тоді для обчислення кожного x_k треба записати $\sum_{k=1}^{i} k = (1+i)i/2$ записів, а для обчислення всіх x_i $i=\overline{1,n}$ потрібно $(n^3+n^2+2n)/4$ записів.

Таким чином, із точки зору комп'ютерної алгебри запропонований алгоритм суттєво переважає класичний алгоритм прогонки. Він може бути реалізований, як в аналітичному, так і в числовому вигляді. Для реалізації запропонованого алгоритму потрібно по $6n$ блочних додавань і блочних ділень і $4n$ блочних множень, оскільки в цьому випадку результати обчислень проміжних дробів можуть використовуватися багаторазово.

Відзначимо, що описаний алгоритм можна також застосовувати і у випадку систем із прорідженими трьохдіагональними матрицями наступного вигляду

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & A_{1,k} & & & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \ddots & A_{2,k+1} & & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & \ddots & & 0 \\ A_{k,1} & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & A_{n-k,n} \\ 0 & A_{k+1,2} & \ddots & & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{n,n-k} & \ddots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

Матриці можуть також бути і обрамленими з однієї або двох сторін. Системи з подібним заповненням розпадаються на k систем вигляду (1), кожна з яких матиме порядок n/k.

Тестування алгоритмів розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебричних рівнянь

Опис тестування функції FC_Three_Diag_Sys. Для перевірки алгоритму розв'язання трьохдіагональних систем лінійних алгебричних рівнянь методом ланцюгових дробів була використана система рівнянь наступного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1.5 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 1.5 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Це несиметрична система рівнянь, без діагонального домінування із середнім значенням спектрального числа обумовленості.

Для розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab написана і протестована функція FC_Three_Diag_Sys. Ця функція реалізує алгоритм розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь методом ланцюгових дробів і написана за допомогою об'єктно-орієнтованої макромови MatLab.

Для спрощення її можливого використання поданий текст разом з блоком формуванням системи лінійних алгебричних рівнянь, яка має описану матрицю.

```
function [] =FC_Three_Diag_Sys( )
% Розв'язування трьохдіагональних систем лі-
нійних алгебричних рівнянь
% Ax=b
% за допомогою матричних ланцюгових дробів
clc
n=25;
% формування тестової системи лінійних рівнянь
for i=1 : n
for j=1: n
A(i,j)=0;
if (i==j) A(i,j)=1.5; end
if(i==j+1) A(i,j)=-1; end
if(j==i+1) A(i,j)=1; end
end
b(i)=0;
end;
b(1)=3;
%, обчислення X(1) і решти невідомих
D(n)=A(n,n);
i=n;
while (i>1);
i = i-1;
D(i)=A(i,i)-A(i+1,i)*A(i,i+1)/D(i+1);
end;
x(1)=b(1)/D(1);
i=1;
while (i<n)
i=i+1;
x(i)=-A(i,i-1)*x(i-1)/D(i);
end
x
end
```

Результати тестування функції FC_Three_Diag_Sys для $n = 25$ скопійовані з вікна MatLab і подані в наступній таблиці

Таблиця 1

Значення n	**Значення невідомих** x_i
25	1.5000 0.7500 0.3750 0.1875 0.0938 0.0469 0.0234 0.0117 0.0059 0.0029 0.0015 0.0007 0.0004 0.0002 0.0001 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000

Нескладна перевірка показує високу точність запропонованого методу розв'язання трьохдіагональних систем методом ланцюгових дробів.

Опис тестування функції ESSELS. Тут мова піде про розв'язування систем із стрічковим заповненням. Позначимо через L — кількість наддіагоналей, а через M — кількість піддіагоналей конкретної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. В такому разі обчислення можна вести, звичайно, і за формулами (2) та (3). Однак з врахуванням характеру заповнення стрічкової матриці їх можна привести до вигляду

$$\left.\begin{aligned} & b_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum\limits_{j=1}^{M} a_{i,j} x_j^{(k-1)}}{a_{k,k} - \sum\limits_{j=1}^{M} a_{k,j} x_j^{(k-1)}}, \quad \left(i = \overline{k+1,n}\right); \\ & z_k^{(k)} = b_{k+1,k}, \ \left(k = \overline{1,n-1}\right); \ \ z_s^{(k)} = b_{k+1,s} - \sum_{i=s+1}^{k} b_{i,s} z_i^{(k)}, \ \left(s = \overline{k-1,1}\right). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} & b_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum\limits_{j=1}^{L} a_{i,j} x_j^{(k-1)}}{a_{k,k} - \sum\limits_{j=1}^{L} a_{k,j} x_j^{(k-1)}}, \quad \left(i = \overline{k+1,n}\right); \\ & z_k^{(k)} = b_{k+1,k}, \ \left(k = \overline{1,n-1}\right); \ \ z_s^{(k)} = b_{k+1,s} - \sum_{i=s+1}^{L} b_{i,s} z_i^{(k)}, \ \left(s = \overline{k-1,1}\right). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

За рекурентними формулами (6) та (7) на деякому k-му кроці обчислюються лише ті $b_{i,j}$ і $b_{j,i}$, для яких існує хоча б один ненульовий елемент $a_{i,j}$ початкової матриці.

Алгоритм дозволяє розв'язати системи рівнянь як у випадку симетричного заповнення (кількість піддіагоналей дорівнює кількості наддіагоналей), так і тоді, коли кількість піддіагоналей та наддігоналей матриці різна.

Для перевірки алгоритму розв'язання стрічкового варіанту алгоритму відсічених систем була використана система рівнянь наступного вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1+\varepsilon & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1+\varepsilon & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1+\varepsilon & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1+\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & -1 & 1 & 1+\varepsilon & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -1 & 1 & 1+\varepsilon \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 2+\varepsilon \\ \hline 3+\varepsilon \\ 2+\varepsilon \\ \cdots \\ 2+\varepsilon \\ 2+\varepsilon \\ 1+\varepsilon \end{array}\right)$$

Легко бачити, що точним розв’язком системи будуть значення $x_i = 1,\ (i = 1, 2, ..., n)$. Це несиметрична система рівнянь, без діагонального домінування із значенням спектрального числа обумовленості $V_A = 6.6837e + 010$.

Для розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab написана і протестована функція ESSELS. Ця функція реалізує алгоритм розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь методом відсічених систем і написана за допомогою об'єктно-орієнтованої макромови MatLab.

З метою її можливого використання поданий текст разом з блоком формування системи лінійних алгебричних рівнянь, яка має описану матрицю.

```
    function [] =Essels( Dimension )
    % << E S S E L S >> — процедура для розв'язан-
ня стрічкових систем
    % лінійних алгебричних рівнянь.
    % Написана для MatLab 2010 року за алгоритмом
відсічених систем
    % Вхідні параметри:
    % A — двовимірний масив розмірності Nx(LN+1)
для зберігання
    % вихідних елементів системи Ax=b;
    % N — кількість невідомих системи;
    % N1- параметр рівний N+1;
    % CountOvDiag — параметр рівний кількості над-
діагоналей матриці;
    % CountUndDiag — параметр рівний кількості
наддіагоналей матриці;
    % B — двохмірний робочий масив розмірності
Nx(N+1);
```

```
% Y — одномірний робочий масив довжини N.
% Формування вхідних даних системи Ax=b
clc
N=70
CountOvDiag=1;
CountUndDiag=2;
N1=N+1;
Np=1;
Epsilon=0.001;
for i=1 : N
if(i>1) A(i-1,i)=1.0;end
if(i<N) A(i+1,i)=1.0; end
if(i>2) A(i,i-2)=-1.0; end
A(i,i)=1.0+Epsilon;
A(i,N+1)=2+Epsilon;
end
A(2,N1)=3+Epsilon;
A(N,N1)=1+Epsilon;
% Власне алгоритм програми
N1 =N+1;
Np=1;
for i=1 : N
for j=1: N
B(i,j)=0.0;
end
end
for m=1 : N
if m>1 M1=m-1;end
if m>2 M2 =m-2; end
MP1=m+1;
NKN=m+CountOvDiag;
if (NKN>=N+1) NKN=N+1; end
NKP=m+CountUndDiag;
if (NKP>=N) NKP=N; end
for i=m : NKP
P=A(i,m);
if (m>1)
if NKP<M1 NM=M1-NKP;else NM=1;end
for j=NM : M1 P=P-A(i,j)*X(j); end
end
B(i,m)=P;
end
```

```
    if(m<N) for i=MP1 : NKP B(i,m)=B(i,m)/B(m,m);
end
    end
    if(m>1) Y(M1)=B(m,M1); end
    if(m>2) for jr=1 : M2 j=m-jr-1; Y(j)=B(m,j);
js=j+1;
    if(js+CountUndDiag<=M1)   MKP=js+CountUndDiag;
else MKP=M1; end
    for i=js : MKP Y(j)=Y(j)-B(i,j)*Y(i); end
    end
    end
    for j=MP1 : N1
    P=A(m,j);
    if (m>1) for i=1:M1 P=P-A(i,j)*Y(i);end
    end
    B(m,j)=P/B(m,m);
    end
    X(m)=B(m,MP1);
    if(m>1) for ir=1 : M1
    i=m-ir;
    X(i)=B(i,MP1);
    is=i+1;
    if(is+CountOvDiag<=m) MKN=is+CountOvDiag; else
MKN=m; end
    for j=is : MKN X(i)=X(i)-B(i,j)*X(j); end
    end
    end
    end
    cond(A)
    X
    end
```

Результати порівняння обох програм подані в наступній таблиці.

Таблиця 2

Значення $n = 70$	**Значення невідомих** x_i
Функція ESSELS	1.0000 1.0000

Таким чином, запропоновані алгоритми для даної тестової системи середньої розмірності мають суттєві переваги у порівнянні із стандартними функціями пакету MatLab.

Висновки. У статті розглянуто новий підхід до розв'язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами. Проведено підрахунок кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць. Охарактеризовано складність алгоритму з точки зору комп'ютерної алгебри. Проведено порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Обчислено кількість записів для методу прогонки. Протестовано алгоритми розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебричних рівнянь. Показано ефективність запропонованих алгоритмів.

Запропоновані алгоритми можуть використовуватися в системах комп'ютерної алгебри та для аналітично-числового розв'язування інженерних та прикладних задач.

Список використаних джерел:

1. Воеводин В. В. Линейная алгебра / В. В. Воеводин. — СПб. : Лань, 2008. — 416 с.
2. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. — М. : Физматлит, 2007. — 480 с.
3. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений / Дж. Х. Уилкинсон. — М. : Наука, 1970. — 564 с.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — 5-е вид. — М. : Фізматліт, 2004. — 560 с.
5. Недашковський М. О. Обчислення з λ – матрицями / М. О. Недашковський, О. Я. Ковальчук. — К. : Наук. думка, 2007. — 294 с.
6. Ашманов С. А. Методы оптимизации. Линейное программирование : учеб. пособие / С. А. Ашманов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2005. — 255 с.
7. Дэвэнпорт Д. Компьютерная алгебра / Д. Дэвэнпорт, И. Сирэ, Э. Турнье. — М. : Мир, 1991. — 352 с.
8. Семчишин Л. М. Програмна реалізація розв'язання розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь / Л. М. Семчишин // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2013. — № 2 — С. 91–99.

APPLICATION OF RAREFIED NUMERICAL SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS IN MATLAB ENVIRONMENT

New approach to the linear algebraic equations rarefied systems with block elements solution and the method of rarefied systems with the specific ways of filling solution is suggested in the article. Calculation of the records number and operations under the numerical realization of the matrix multiplication al-

gorithm is conducted. The algorithm complication from the computer algebra point of view is characterized. The described algorithm is used in the case of systems with the rarefied three-diagonal matrix.

Efficiency of the suggested algorithm is shown in the article. Theoretical and methodological basis of investigation comprise methods of optimization and mathematic modeling.

Solving systems of linear algebraic equations (SLAR) is always one of the most important tasks of computational mathematics. When solving a wide range of applications, most modern scientists, engineers and technicians, as a rule, use packages of computer algebra. The solution of mathematical problems using the MATLAB system deserves special attention. Real-time data-oriented, this system performs all calculations in float-point arithmetic, as opposed to competing computer algebra systems REDUCE, MACSYMA, DERIVE, Maple, Mathematica, Theorist, which are dominated by integer representations and symbolic data processing. Although for the solution of problems on the boundary of symbolic computing and floating-point computations into the integrated MATLAB system, the extended Symbolic Mathematics Toolbox application package is implemented, which implements the maple symbology system interface.

One of the important MatLab tools is a set of linear algebra procedures. In the calculus, the linear algebra section is supported by the LINPACK, EISPACK application packages that were created in the 1970s by leading experts in the world, including the founder of MathWorks Inc. K. Mooleer. Actually, the original task of the MatLab system was to create a dialog box for working with linear algebra packages.

The MatLab system is an open environment that is developing dynamically by the efforts of hundreds and thousands of researchers, because it is both an operational shell and a fairly flexible programming language. One of the strongest points is that MatLab can be written programs and features for multiple use.

Key words: *rarefied systems, chain fractions, finite sums, quantity of records, algorithm difficulty, computer algebra, algorithm testing.*

Отримано: 14.05.2018