

**С.О. ГОЛУБЄВ, О.Г. ЛЕБІДЬ, Д.І. ЧЕРНІЙ**

## **ЗАСОБИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В ГАЛУЗІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ГІДРОДИНАМІКИ**

***Анотація.** Представлено аналіз схем побудови програмно-моделюючих систем в галузі обчислювальної гідродинаміки. Висвітлено основні недоліки більшості існуючих загальновідомих програмно-моделюючих систем та перспективні напрямки подолання виявлених недоліків. Показано, що перспективним напрямком є створення комп'ютерних прогнозуючих комплексів на основі програмно-моделюючих систем із застосуванням комплексних моделей та обчислювальних технологій. Визначено вимоги та запропоновано схему побудови програмно-моделюючої системи для прогнозування еволюції процесів взаємодії течій з конструкціями, що рухаються та деформуються.*

***Ключові слова:** математичне моделювання, програмно-моделююча система, обчислювальна гідродинаміка*

**DOI: 10.35350/2409-8876-2019-15-2-21-39**

### **Вступ**

У гідродинаміці експериментальні та теоретичні методи наукових досліджень існують у тісному взаємозв'язку. Наприклад, під час експерименту у водному каналі або аеродинамічній трубі може бути виявленим нове явище. Далі робиться спроба пояснити його в рамках теорії, що вже існує, побудувати математичну модель для явища і фізичних величин, які спостерігаються. Для верифікації побудованої моделі проводяться експерименти з метою підтвердити її коректність.

Експеримент може бути проведений або у лабораторії, або у природному середовищі – це так званий натурний експеримент. Але підготовка експерименту має матеріальні та технічні обмеження. До того ж проведення таких експериментів – це окрема інженерна задача із забезпечення необхідних умов при проведенні експерименту (напр., певної сталої швидкості води у каналі), спостереження якісної картини явища (напр., ліній току повітря за допомогою диму) та вимірювання фізичних величин (напр., тиску п'єзоелектричними датчиками). Як один з наслідків – такі експерименти обмежені у кількості точок спостереження та діапазоні зміни параметрів.

Розвиток комп'ютерної техніки привів до появи нового виду експерименту – комп'ютерного, або обчислювального (чисельного). На відміну від натурного експерименту, для проведення обчислювального експерименту необхідними є лише наявність відповідного програмного забезпечення та обчислювальних потужностей.

Для багатьох випадків достатньо звичайного персонального комп'ютера. Більш того, комп'ютерна програма, на відміну від витратних матеріалів та експериментального устаткування, допускає повторне використання та копіювання необмежену кількість разів.

Обчислювальний експеримент не може стати повною заміною натурному експерименту, тому що сам потребує верифікації як метод. Але в багатьох випадках він може бути аргументовано його заміною. Таким чином, обчислювальний експеримент займає своє місце у процесах наукових досліджень та інженерної розробки. На рисунку 1 наведено схему аналітичної підготовки проведення обчислювального експерименту у гідродинаміці [1].

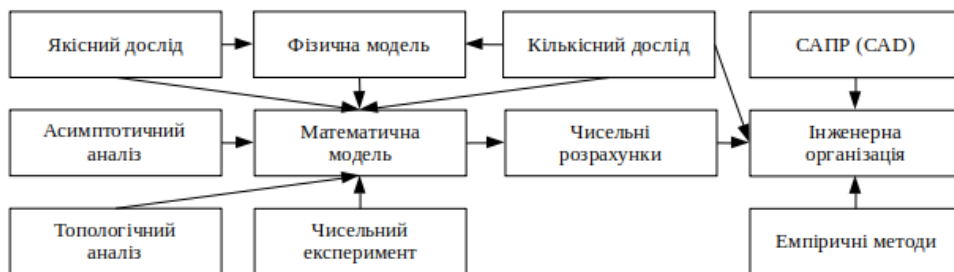


Рисунок 1 – Схема аналітичної підготовки проведення обчислювального експерименту у гідродинаміці

Економічно обґрунтована привабливість обчислювального експерименту як методу зумовила його широке застосування в інженерній справі для потреб промислового виробництва. Системне застосування комп'ютерної техніки стимулювало розвиток чисельних методів. Чисельні методи лягали в основи обчислювальних технологій, які у свою чергу реалізовувалися у формі комп'ютерних програм. Деякі з таких програм, що початково розроблялися для власних потреб (дослідника або лабораторії), розширювалися розробниками для більшого кола користувачів, після чого розповсюджувалися. В подальшому це привело до створення комерційних пакетів програм, а також безкоштовних пакетів з відкритим кодом – для інженерних та наукових розрахунків.

## 1. Відомі скінченно-елементні пакети програм

Розробка комерційних програм для інженерних розрахунків почалася з появою можливості тиражування програмного забезпечення. Можливості сучасних інженерних програмних систем достатньо розвинуто у напрямку спрощення поєднання розрахунків з різних областей фізики (це так звані задачі мультифізики) та поглиблення автоматизації та інтеграції всього процесу інженерної розробки (CAE – computer-aided engineering). Нижче наведено огляд можливостей найбільш відомих програмних систем інженерного та наукового спрямування.

### ANSYS Fluent, ANSYS CFX

Одними з найвідоміших у галузі є програмні продукти компанії ANSYS, Inc.

Компанія є лідером з продажу програмного забезпечення в галузі обчислювальної гідродинаміки (Computational Fluid Dynamics, CFD) [2, 3]. Вона була створена

у 1970 р. у США інженером Dr. John A. Swanson. В основу було покладено його ідею створити програму загального призначення для розрахунків методом скінченних елементів на базі наробок лабораторії, в якій він працював. Сьогодні ця компанія налічує майже 3000 співробітників, купує та поглинає менші компанії з галузі.

Для задач обчислювальної гідродинаміки серед програмних продуктів ANSYS, Inc. в основному застосовуються програми ANSYS CFX та ANSYS Fluent. Обидві програми використовують скінченно-елементні методи.

CFX використовує гібридний підхід до дискретизації: скінченно-елементний метод та метод контрольних об'ємів. Як і метод контрольних об'ємів, він забезпечує консервативність обчислювальних схем та виконання законів збереження. Метод скінченних елементів використовується для опису зміни розв'язку в кожному елементі. Хоча даний метод є обчислювально затратним, оскільки має кубічну обчислювальну складність для одного кроку по часу для тривимірних задач. Для усіх типів та режимів течій використовується один вирішувач. Вирішувач багатосітковий: використовується послідовність сіток, які грубшають, для поширення розв'язку на всю область. Сітка може бути динамічною та адаптивною в задачах з рухомими границями. Вирішувач є неявно спряженим – вирішує повну систему гідродинамічних рівнянь одночасно на всіх вузлах.

Різниця між вирішувачами програм CFX та Fluent полягає у тому, що в CFX об'єми центруються по вузлах сітки, а у Fluent – об'єми збігаються з сіткою. Обидві програмні системи призначені для розв'язування як двовимірних, так і тривимірних задач, з можливістю розпаралелення обчислень. Існують також готові рішення для хмарних обчислень.

Для задач з вільною границею та багатофазних потоків в пакетах ANSYS застосовується метод об'єму рідини (Volume of Fluid Method, VOF) в рамках підходу Ейлера. Для моделювання диспергованих середовищ – метод дискретної фази (Discrete Phase Model, DPM) в рамках підходу Лагранжа. Для задач шару, що кипить, використовується метод дискретних елементів (Discrete Element Method, DEM). Останні два методи моделюють рух окремо взятих частинок.

Фізична модель, що застосовується у програмах CFX та Fluent, наступна: для усіх типів течій розв'язуються рівняння збереження маси та імпульсу. Для стисливих течій або задач теплопереносу додається рівняння збереження енергії.

Ось деякі із можливих застосувань продуктів компанії ANSYS, Inc. для задач гідродинаміки:

1. стисливі та нестисливі течії;
2. течії з рухомою границею;
3. течії з вільною границею;
4. взаємодія з твердими тілами, занурені тіла;
5. пористі середовища;
6. турбулентність;
7. кавітація;
8. акустика;
9. теплообмін;

- 10. турбіни, машини, що обертаються;
- 11. багатофазні течії, кипіння;
- 12. течії, які хімічно реагують між собою, та згоряння.

У пакеті ANSYS є можливість розв'язування задач, в яких моделюється одразу декілька пов'язаних між собою фізичних процесів, – задач мультифізики. У пакеті існує додаток ANSYS Workbench, у графічному інтерфейсі якого за допомогою перетягування елементів мишею (drag-and-drop) дослідник створює схему розв'язування задачі, задає зв'язки між вирішувачами з різних областей фізики.

Приклад задачі такого типу – задача обтікання з рухомими границями, або взаємодії рідини з твердими тілами (fluid-structure interaction, FSI). На рисунку 2 представлено приклад схеми проекту, побудованої у додатку Workbench з пакету ANSYS для розв'язування задачі взаємодії течії рідини з рухомою границею, взятий з технічного звіту про моделювання штучного клапану серця [4].

Як видно з рисунку 2, різні додатки з пакету – Fluent та Transient Structural (додаток для розрахунку динамічних навантажень конструкцій) – використовують для розрахунків одну спільну геометрію (фізичні границі об'єктів, на рисунку – компоненти Geometry). Компоненти додатків, призначені для задання початкових та граничних умов (на рисунку – компоненти Setup), є пов'язаними через спеціальний додаток – System Coupling. Завдяки останньому поле тиску, отримане за допомогою додатка Fluent, використовується як навантаження для розрахунку напружено-деформованого стану клапану у додатку Transient Structural. В ANSYS є також можливість зробити такий зв'язок двонаправленим – розраховану за навантаженнями деформацію використати у додатку Fluent як зміну положення границь в задачі обтікання.

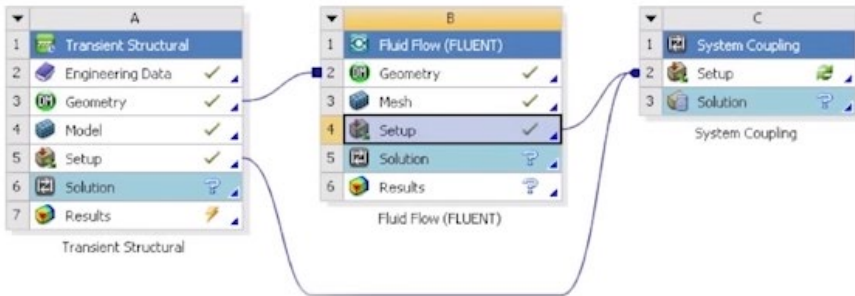


Рисунок 2 – Схема розв'язування задачі взаємодії рідини з рухомою границею у ANSYS Workbench [4]. Зображення надано ANSYS, Inc

На рисунку 3 в загальному вигляді представлено послідовність підготовки даних для реалізації процедур обчислення для розв'язування задач гідродинаміки у програмному пакеті ANSYS. Штрихпунктирними лініями на рисунку 3 позначено зв'язки, які мають місце тоді, коли за допомогою декількох спряжених вирішувачів з різних областей фізики розв'язуються задачі мультифізики.

Скінченно-елементні методи є універсальними та потужними, але мають свої

особливості практичного застосування. ПЗ, побудоване з використанням таких методів, вимагає наявності у його користувача досвіду застосування методу скінченних елементів. Зокрема, це стосується етапу побудови сітки.

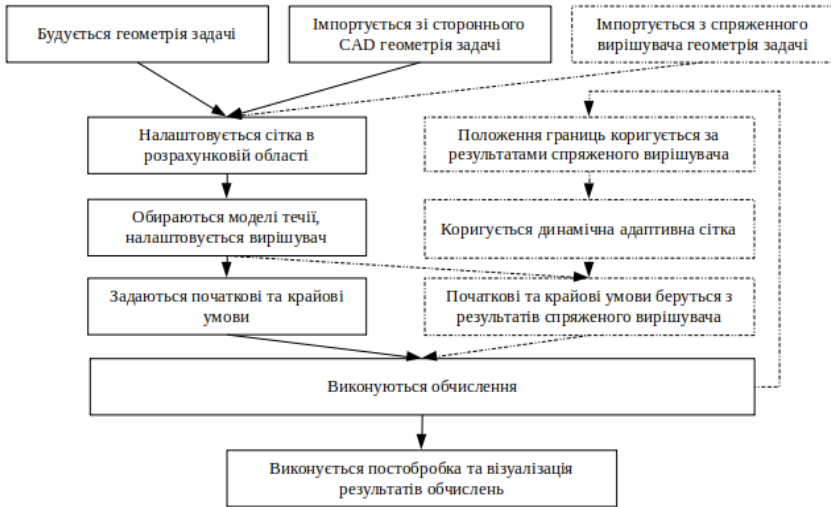


Рисунок 3 – Загальна схема процесу проведення обчислень у пакеті ANSYS

На рисунку 4 наведені поля швидкостей для класичної двовимірної задачі обтікання циліндру. Спочатку течія поза циліндром була обчислена з використанням на віддаленні від циліндру стандартної сітки заданого розміру (рис. 4.а), яку початково за замовчуванням в автоматичному режимі побудував додаток Meshing (додаток у пакеті ANSYS, що відповідає за побудову сітки). Після чого, шляхом ручної зміни налаштувань у додатку Meshing на віддаленні від циліндру сітка була побудована мілкіша (рис. 4.б).

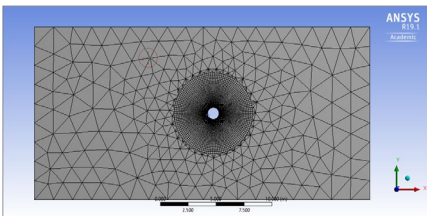


Рисунок 4 а)

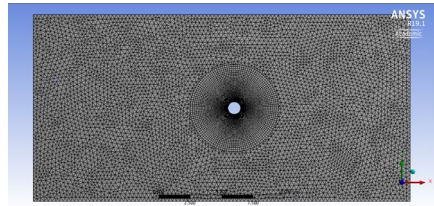


Рисунок 4 б)

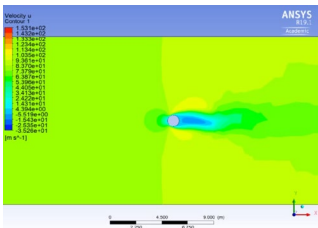


Рисунок 4 в)

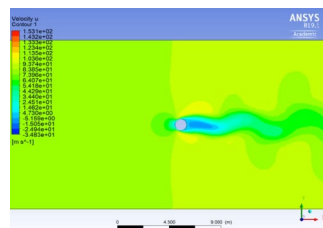


Рисунок 4 г)

Рисунок 4 – Розв'язування двовимірної задачі обтікання циліндру у ANSYS Academic:

а) груба сітка на віддаленні від циліндра, побудована автоматично; б) більш мілка сітка на віддаленні від циліндра, побудована шляхом зміни налаштувань додатка Meshing; в) поле швидкостей, обчислене за такою сіткою; г) поле швидкостей, обчислене за допомогою мілкішої сітки. Зображення надано ANSYS, Inc.

Задача чисельно розв'язувалася у версії пакету ANSYS Academic 19.1, у додатку Fluent. ANSYS Academic – це обмежена версія оригінального комерційного пакету ANSYS, яка є безкоштовною [5]. Вона призначена до застосування студентами, науковцями, дослідниками.

При порівнянні результатів (рис. 4.в та 4.г) видно, наскільки якісно схожі обидві картини обтікання в околі циліндру, де спеціально в ручному режимі шляхом задання спеціальних налаштувань була побудована мілка сітка в ближньому околі циліндру, однакова в обох випадках (рис. 4.а та 4.б). Але на віддаленні від циліндру картина відрізняється і на рисунку 4.в видно, що більш груба сітка не здатна “вловити” так звану вихрову доріжку Кармана, яку можна побачити на рисунку 4.г.

Для організації та автоматизації розрахунків в ANSYS є додаток ACT – набір інструментів для автоматизації розрахунків, розширення стандартного функціоналу пакету та приєднання сторонніх додатків для розрахунків. В ACT можна створювати свої додатки на базі пакету ANSYS з використанням мови розмітки XML та мови програмування IronPython. Ця технологія дозволяє створювати додатки зі вже налаштованими розрахунками для конкретних задач. Це у свою чергу веде до зниження вимог у предметній області до користувача системи. Користувачу у такому випадку не потрібно мати ґрунтовні знання гідродинаміки та чисельних методів для проведення розрахунків, якщо під його конкретну задачу вже було налаштовано процес розв'язування. У такому випадку користувач буде лише змінювати параметри та запускати процес обчислень, після чого – отримувати готові звіти, які також можливо попередньо налаштувати за допомогою ACT.

**ANSYS** – потужний комерційний промисловий пакет програм із зручним графічним інтерфейсом. Він покриває широкий спектр задач гідродинаміки та здатний проводити розрахунки спряжених задач з різних областей фізики. Але пакет має такі недоліки: вартість ліцензії і суттєві вимоги до знань та досвіду з предметної області у користувача системи. Для проведення надійних розрахунків користувачу пакету необхідно мати досвід застосування методу скінченних елементів – це було проілюстровано на прикладі розв'язування двовимірної задачі обтікання циліндру (рис. 4). Для користувача необхідними є ґрунтовні знання в галузі гідродинаміки для коректної постановки задачі (вибору моделі течії, граничних умов) та чисельних методів (для обрання алгоритму і схеми розрахунку). Пакет працює в ОС Windows.

### **OpenFOAM**

Серед пакетів ПЗ для задач обчислювальної гідродинаміки існує OpenFOAM (англ. абр. Open Source Field Operation And Manipulation) – платформа, або бібліотека з відкритим кодом на мові програмування C++, призначена для розв'язування задач механіки суцільних середовищ [6, 7] методом скінченних елементів. Бібліотека орієнтована на операційні системи з сімейства Unix (в т.ч. Linux), розробляється з 2004 року. Зараз її розробляють паралельно дві англійські компанії OpenCFD Limited [7] та OpenFOAM Foundation Limited [6].

OpenFOAM є достатньо відомою та поширеною бібліотекою в академічній спільноті. На відміну від дорогих пакетів промислового призначення, ліцензія OpenFOAM є безкоштовною.

Платформа базово не має графічного інтерфейсу. Дослідник описує задачу в текстовому файлі у визначеному форматі. Для виконання обчислень необхідно підготувати каталог з файлами певної структури, які будуть містити сітку розрахункової області, опис параметрів задачі, фізичні властивості досліджуваної системи, початкові та крайові умови. Процес обчислень запускається з командного рядка операційної системи.

До складу програмного забезпечення OpenFOAM входять вирішувачі та утиліти. Вирішувачі – це програми, які виконують безпосередньо сам процес обчислення чисельного розв'язку за підготовленим описом задачі. Утиліти – це програми для перед- та пост-обробки даних. Приклад утиліти – утиліта конвертація файлу із сіткою, побудованою у сторонній програмі, у формат, з яким працює OpenFOAM. Маючи необхідні знання з програмування, комп'ютерних алгоритмів, математичних моделей та чисельних методів, дослідник може сам створювати нові вирішувачі та утиліти для розширення стандартного функціоналу бібліотеки. Завдяки цьому існує спільнота людей, які викладають свої доробки та розширення бібліотеки у вільний доступ з відкритим кодом. Приклад таких доробок спільноти – проект foam-extend [8].

Для побудови сітки для обчислень в OpenFOAM можуть бути використаними як програми з бібліотеки, що запускаються з командного рядка, так і сторонні програми з подальшою конвертацією у формат, який підтримує OpenFOAM. Деякі з таких сторонніх програм мають графічний інтерфейс, наприклад Gmsh [9].

В OpenFOAM відсутній універсальний вирішувач, який покривав би усі випадки – користувач повинен сам обрати вирішувач відповідно до класу задачі, яку потрібно розв'язати. Вирішувачі відрізняються між собою за алгоритмом обчислень або за фізичною моделлю, яку вони реалізують. Кожен вирішувач – це самостійна програма, яка запускається з командного рядка. Ряд вирішувачів підтримує динамічну адаптивну сітку. Бібліотека підтримує паралельні обчислення з використанням бібліотеки Open MPI. Існують хмарні рішення для швидких розрахунків задач великої розмірності. Аналогічно вибору вирішувача, дослідник самостійно обирає початкові та крайові умови, яких, наприклад, у версії бібліотеки від компанії OpenCFD більше 70 різних типів.

За списком доступних вирішувачів OpenFOAM можна скласти наступний список задач гідродинаміки, які покриває бібліотека:

1. нестисливі течії: ламінарні ньютонівської та неньютонівської рідини, турбулентні, модель мілкої води;
2. стисливі течії: ламінарні і турбулентні, трансзвукові, надзвукові;
3. багатофазні течії та течії з вільною границею;
4. відслідковування окремих частинок (підхід Лагранжа);
5. течії, що реагують між собою, та згоряння;
6. течії, що обертаються (з багатьма системами відліку);
7. пористі середовища;
8. кавітація;

### 9. теплоперенос.

Окрім гідродинаміки, в бібліотеці також є вирішувачі для задач напружено-деформованого стану твердого тіла, електромагнетизму та навіть модель Блека-Шоулза з економіки.

Для перегляду та пост-обробки результатів обчислень використовується безкоштовне графічне середовище ParaView.

На рисунку 5 представлено послідовність підготовки даних для реалізації процедур обчислення розв'язку задач гідродинаміки за допомогою платформи OpenFOAM для різних можливих варіантів задання умови задачі.

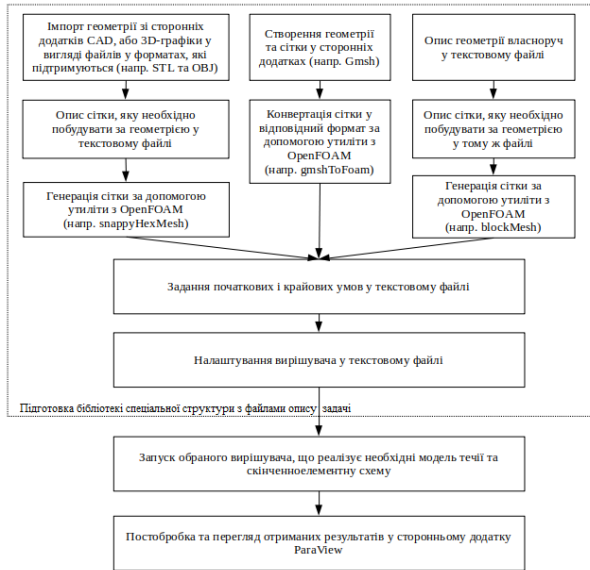


Рисунок 5 – Загальна схема процесу проведення обчислень із застосуванням платформи OpenFOAM

OpenFOAM – потужний інструмент для обчислень у галузі гідродинаміки. Але він має суттєві вимоги з предметної області до користувача системи. Користувач бібліотеки, окрім структури та функціонування самої бібліотеки, повинен мати впевнені знання в області гідродинаміки (для правильного обрання вирішувача та граничних умов) та досвід використання методу скінченних елементів (для правильної побудови сітки). Також він має бути досвідченим користувачем ОС Linux, що важливо – з командного рядка. Для більш складних випадків, коли задачу неможливо розв'язати за допомогою стандартних вирішувачів або граничних умов з бібліотеки, досліднику необхідно мати знання та досвід програмування на мові C++ для розширення стандартного функціоналу бібліотеки для розв'язування своєї задачі.

### Інші скінченно-елементні програмні системи

Існує багато інших пакетів для розрахунків методом скінченних елементів: як комерційних, так і безкоштовних з відкритим кодом. В даній статті докладно розглянуто по одному з кращих представників комерційного та безкоштовного ПЗ з відкритим кодом: пакет компанії ANSYS, Inc. та бібліотеку OpenFOAM, відповідно. Під час підготовки огляду, окрім цих пакетів, були також розглянуті



інші. Вони мають деякі відмінності, але в загальному повторюють принципи та функціонал двох розглянутих вище пакетів.

Один з лідерів промислової галузі обчислювальної гідродинаміки після ANSYS [2, 10] – STAR-CCM+ [11] (розробляється з 2004 р., зараз належить Siemens PLM Software) – за своїми описами повторює багато функціоналу з ANSYS, також приділяючи багато уваги мультифізичним розрахункам. Пакет працює в ОС Windows та Linux, підтримує паралельні та хмарні розрахунки.

Інший продукт від Siemens PLM Software – Femap [12] (розробляється з 1985 р.). Він виконує роль пре- та постпроцесору, як прошарок між САПР та скінченно-елементними вирішувачами. Але має також власний вирішувач для задач обчислювальної гідродинаміки – Femap Flow Solver, який повторює багато функціоналу для суто гідродинамічних задач. Із задач мультифізики вирішує лише задачі теплопереносу. Пакет працює в ОС Windows.

ADINA [13] (з 1974 р., США) – ще один комерційний пакет ПЗ даної галузі. Має вже дещо застарілі графічний інтерфейс та візуалізацію результатів. З можливостей, яких немає в ANSYS, у пакеті реалізована підтримка густини рідини, залежної від тиску або від часу. Пакет також розв'язує задачі мультифізики на рівні ANSYS, підтримує імпорт зі сторонніх САПР. Пакет працює в ОС Windows та Linux, підтримує паралельні обчислення.

Ще один виробник комерційних пакетів – MSC Software [14] (США), який також розробляє оригінальну версію широко відомого пакету Nastran для розрахунків напружено-деформованого стану тіла. Серед продуктів цього виробника є ряд пакетів для задач обчислювальної гідродинаміки [15]: SC/Tetra, scFLOW, scSTREAM, HeatDesigner та ін. Вони розв'язують широкий спектр промислових задач гідродинаміки, а також деякі задачі мультифізики (взаємодії рідини з твердими тілами, теплоперенос). У пакеті є можливість робити повну автоматизацію процесів інженерних розрахунків з використанням мов Visual Basic, Python та інших. У пакеті реалізовано автоматичне адаптивне уточнення сітки в зонах великих градієнтів та складної геометрії. Пакет працює в ОС Linux та Windows, має підтримку паралельних та хмарних обчислень.

COMSOL Multiphysics [16] – пакет від компанії COMSOL (засн. у 1986 р. у Швеції). Як і у пакетах від компаній-лідерів галузі, чимало уваги в даному пакеті приділено мультифізичним задачам (в т.ч. задачам взаємодії рідин та твердих тіл, теплопереносу, течій, що реагують, згоряння, спряженим задачам акустики та електромагнетизму). Пакет підтримує паралельні та хмарні обчислення. Одна з особливостей пакету – застосування методу граничних елементів у задачах корозії, електроосадження, електростатики та акустики. Цей метод має такі особливості, як робота у нескінченній області розрахунку та легкість розрахунку поля в будь-якій точці області. Ці та інші особливості методу мотивували розробників застосувати його в пакеті як у поєднанні з методом скінченних елементів, так і окремо самостійно.

Ще один безкоштовний пакет для задач обчислювальної гідродинаміки – SU2 [17], створений у Стенфордському університеті. Але він не має суттєвих переваг перед бібліотекою OpenFOAM за своїми можливостями.

Враховуючи перевагу скінченно-елементного ПЗ на ринку комерційного ПЗ [2] та в академічному середовищі (OpenFOAM), сучасні тенденції розвитку ПЗ для обчислювальної гідродинаміки є сенс відстежувати саме за такими пакетами

програм.

## 2. Пакети, що застосовують метод ґраткових рівнянь Больцмана

Окрім методу скінченних елементів, для розв'язування задач обчислювальної гідродинаміки застосовується метод ґраткових рівнянь Больцмана (Lattice Boltzmann method, LBM). На відміну від звичайних сіткових методів, в яких розв'язується рівняння Нав'є-Стокса, у даному методі використовується кінетичне рівняння Больцмана в рамках підходу Лагранжа. Метод має такі переваги над сітковими методами, як, наприклад, відсутність трудомісткого процесу задання конфігурації сітки для досягнення необхідної точності (рівномірна сітка створюється повністю автоматично), здатність розв'язувати задачі для великих значень числа Кнудсена, фізики плазми та ін. Але метод має обмеження, серед яких – складності у його застосуванні для великих числах Рейнольдса або у задачах великої розмірності. Нижче буде описано найвідоміші моделюючі системи (**PowerFLOW та XFlow**), які застосовують даний метод.

Однією з компаній, що займається розвитком застосування методу ґраткових рівнянь Больцмана для промислового застосування у комерційних пакетах, є компанія Dassault Systèmes (заснована у 1981 р., Франція). Відомо також, що ця компанія співпрацює з НТУУ КПІ імені Ігоря Сікорського – САПР САПІА виробництва Dassault Systèmes впроваджено у навчальний процес на кафедрі динаміки і міцності машин та опору матеріалів Механіко-машинобудівного інституту [18, 19]. Для задач гідродинаміки серед власних продуктів компанія має скінченно-елементні модулі SolidWorks Flow Simulation [20] (досить популярний в індустрії [2]), а також Abaqus/CFD [21]. У пакеті програм SIMULIA даного виробника є два продукти, які реалізують метод ґраткових рівнянь Больцмана: PowerFLOW [22] (продукт приєднаної у 2017 р. компанії Hexa Corporation) та XFlow [23] (підрозділ цього продукту було придбано у 2016 р. у компанії Next Limit Technologies).

Програма XFlow має інноваційний графічний інтерфейс, подібний до інтерфейсу анімаційного ПЗ [24]. Вона підтримує паралельні та хмарні розрахунки. Пакет працює в ОС Windows та Linux. Можливості програми XFlow в задачах гідродинаміки:

1. стисливі та вимушено нестисливі течії;
2. внутрішні та зовнішні задачі;
3. течії з вільною границею;
4. мультифазні течії;
5. задачі теплопереносу;
6. взаємодія течій з твердими тілами, плавучість;
7. моделі надзвукових течій;
8. турбулентні течії;
9. задачі акустики;
10. моделі неньютонівської в'язкості.

Програмна система PowerFlow, за своїм функціоналом, має обмежені можливості у порівнянні з XFlow.

Бібліотека з відкритим кодом **Palabos** [25] – продукт партнерства Женевського університету та компанії FlowKit Ltd. В рамках партнерства Женевський

університет займається науковими дослідженнями для розвитку бібліотеки, а компанія FlowKit Ltd. – її підтримкою та розробкою. Бібліотека розробляється з 2009 р. як відгалуження від бібліотеки OpenLB. Бібліотека OpenLB розробляється з 2005 р., досі існує та підтримується [26], але є менш відомою, ніж Palabos.

Бібліотека Palabos пропонує програмний інтерфейс на мові C++. Для її застосування обов'язково потрібні навички програмування. Також передбачається, що користувач має достатні знання в області обчислювальної гідродинаміки. Бібліотека майже не має сторонніх залежностей, тому легко розгортається у багатьох ОС та платформах. Бібліотека має програмні інтерфейси на мовах Java та Python. Бібліотека підтримує паралельні обчислення з використанням програмного інтерфейсу MPI.

Для проведення розрахунків геометрії області, в якій розв'язується задача, та її границь задається “вручну” в програмному коді обчислень або імпортується з STL-файлу. В бібліотеці можливе виведення результатів у текстові та бінарні файли, файли зображень, або VTK-файли, які можливо переглядати у безкоштовному середовищі ParaView (аналогічно до бібліотеки OpenFOAM).

Можливості бібліотеки для задач гідродинаміки:

1. нестисливі та слабко стисливі течії;
2. течії з вільною границею;
3. неньютонівська в'язкість;
4. турбулентність;
5. теплоперенос;
6. пористі середовища;
7. багатофазні течії.

Як видно з огляду, програмне забезпечення, що використовує даний метод, покриває менший функціонал, ніж скінченно-елементне ПЗ. Але воно розв'язує деякі з задач, які неможливо розв'язати шляхом чисельного розв'язування рівнянь Нав'є-Стокса, наприклад, течії малих масштабів та випадки, коли не виконується гіпотеза неперервності (для великих значень числа Кнудсена).

### 3. Програмні системи із застосуванням методу граничних елементів

До задач обчислювальної гідродинаміки також може бути застосованим метод граничних елементів (boundary element method, BEM). Метод особливий тим, що є безсітковим та приводить до менших за розміром СЛАР. Метод добре працює з нескінченними областями та дозволяє легко порахувати значення поля в будь-якій точці області.

**Linflow** [27] – ПЗ для задач гідродинаміки, яке розроблялося у Швеції компанією ANKER–ZEMER Engineering AB з 1999 р. (вийшла версія 1) по 2004 р. (вийшла остання відома версія – 1.4). Пакет використовує метод граничних елементів для дискретизації потенціалу швидкості. Вирішувач пакету додатково генерує вихрові елементи (напр., на задній частині крила) для того, щоб задовольнялася умова Чаплигіна-Жуковського [28].

У пакеті можна розв'язувати такі задачі гідродинаміки: задачі обтікання, аеропружності, аероакустики, взаємодії рідин та твердих тіл. У пакеті розглядається безвихрова течія нев'язкої рідини. Вона може бути як стисловою, так і нестисловою. ПЗ передбачалося застосовувати як додатковий модуль до

пакету ANSYS (остання підтримувана версія ANSYS – 8.1) або разом з пре- та постпроцесором Femap, про які написано вище.

**3DynaFS-Bem** [29] – модуль пакету 3DynaFS компанії Dynaflow, Inc. для дослідження течій з вільною границею та їх взаємодії із зануреними або плаваючими твердими тілами. Пакет орієнтований на вирішення наступних задач гідродинаміки: кавітація, взаємодія, деформація та вибух бульбашок, гідроакустика, хвилі, ефекти мілкої води, взаємодія течії з твердими тілами, плавучість. Пакет розроблявся для потреб кораблебудування та здатний досліджувати багато гідродинамічних ефектів, що знаходять свій прояв у практичних аспектах цієї галузі машинобудування. Пакет програм може бути застосованим в ОС Windows і Linux.

Перелічені вище особливості методу граничних елементів дозволяють створювати ПЗ, що працюватиме швидше за скінченно-елементне ПЗ, оскільки метод є чисельно-аналітичним та понижує розмірність задачі. Таке ПЗ можливо максимально автоматизувати та знизити вимоги до кваліфікації користувача, тому що метод є безсітковим і не вимагає складного етапу створення сітки, як у випадку методу скінченних елементів. Одним з найбільш ефективних реалізацій МГЕ [32] є метод дискретних особливостей (МДО). Основні ідеї та положення підходу, строго сформульовані [33, 34], базуються на дискретизації вихрового шару.

**Метод дискретних особливостей (МДО)** – це метод, що входить до групи методу граничних елементів [32] та є у ній одним з найбільш ефективних [33-35]. Можна виділити наступні особливості МДО [33]:

- метод добре зрозумілий інженерам;
- є фактично безсітковим;
- добре формалізується;
- може застосовуватися як метод експрес-аналізу;
- є ефективним для задач із суттєво рухомими границями.

Завдяки тому, що для точного розрахунку метод не потребує від користувача задання конфігурації сітки, його застосування не вимагає досвіду та вміння це робити, на відміну від методу скінченних елементів (МСЕ). В задачах із суттєво рухомими границями метод також має перевагу завдяки тому, що він не потребує додаткового етапу складних обчислень для перебудови сітки, що має місце у випадку застосування МСЕ, коли необхідно застосовувати динамічну адаптивну сітку.

Чисельно-аналітичний МДО у порівнянні з МСЕ потребує розв'язування СЛАР менших розмірів, оскільки понижує розмірність задачі. В результаті метод є швидшим за МСЕ та може працювати у режимі реального часу. Це є великою перевагою для користувачів, оскільки дає можливість отримувати результати швидко та спостерігати за процесом, що моделюється. Завдяки цьому кожна з ітерацій дослідження, коли користувач змінює параметри та перевіряє результати моделювання, виконується швидше.

Найбільш відомі розробки, що побудовані на вихрових технологіях, це інтегрований «Комплекс програм для досліджень на ПОМ аеропружних характеристик парашутів» [33] та програмні системи Aeroflow і Mill (Росія, І.К. Ліфанов та А.В. Сетуха, 2006). Базуються вони на методі дискретних особливостей (МДО). Обидві розробки використовуються як програмно-моделюючі системи для еколого-аераційної експертизи масивів житлової забудови й

промислових зон. AeroFlow й Mill дозволяють визначити: аерогідродинамічні навантаження на конструкції та споруди з різнотипними границями; застосовуються у системах прогнозуючих еволюцію екологічних процесів. В межах цього ж підходу створено програми AtoWing, CATRAN та Wind Expert (Росія, Санкт-Петербург). Програмні системи схожі між собою, але мають обмежене поширення і, на жаль, слабо підтримуються. Базовий функціонал програм також побудований на методі дискретних вихорів, який дозволяє працювати з довільною просторовою геометрією об'єктів, а також враховувати нелінійну вихрову завісу, екран, струмені, плинні й багато інших особливостей обтікання. Програми дозволяють моделювати схід вихрового потоку із всіх відривних зон, вивчати далекий вихровий слід і пов'язані з ним когерентні структури.

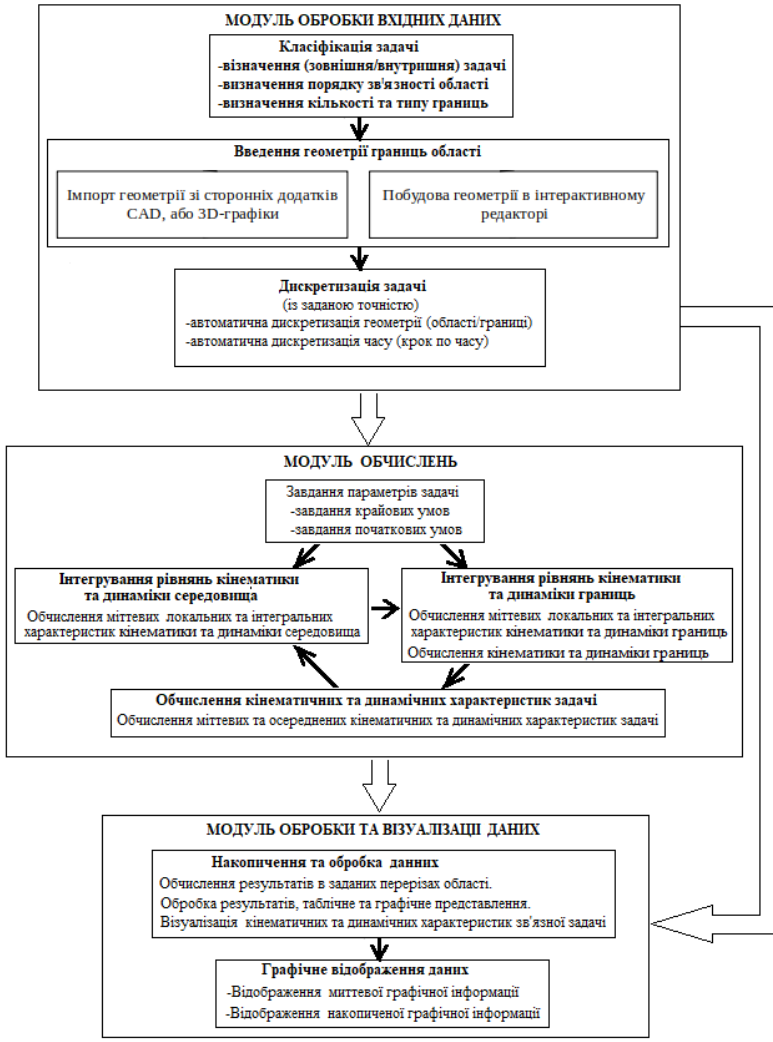


Рисунок 6 – Схема процесу проведення обчислень у програмно-моделюючій системі (яка базується на методі дискретних особливостей)

Метод дискретних особливостей надає можливість повністю автоматизувати

процес обчислень та всі етапи обробки даних. Користувачу моделюючої системи необхідно лише задати фізичні границі об'єктів та області, початкові та крайові умови, а також обрати представлення кінцевих результатів та критерій зупинки процесу моделювання. Слід зауважити, що останнім часом все більше уваги приділяється створенню спеціалізованих програмно-моделюючих систем (схему функціонування яких представлено на рисунку 6), які призначені для визначення та прогнозування впливів для обмеженого кола спеціальних задач. Завдяки тому, що метод дискретних особливостей не є сітковим, процес дискретизації визначених границь, проведення обчислень, функціонування програмно-моделюючої системи можливо повністю автоматизувати (виключити вплив людського фактору) та забезпечити спостереження процесу моделювання, який виконується у масштабі реального часу (що є суттєвим для систем з керуванням).

#### **4. Тенденції розвитку програмно-моделюючих систем у галузі обчислювальної гідродинаміки**

У ході огляду сучасних програмних пакетів лідерів ринку комерційного ПЗ галузі стає зрозуміло, що розробники спеціального ПЗ приділяють велику увагу мультифізичним розрахункам, інтеграції ПЗ для моделювання з інженерними САПР, зручності користувацького інтерфейсу, автоматизації розрахунків. Це зумовлено потребами кінцевих споживачів цих програмних продуктів та конкуренцією на ринку. Схожі тенденції виділяються в огляді розвитку ПЗ галузі [24], де стверджується, що із складної технології обчислень акцент змістився у бік розв'язування інженерних промислових задач. Автор огляду стверджує, що подальший розвиток даного ПЗ буде відбуватися у таких напрямках:

- мультифізичні розрахунки;
- створення єдиного загального вирішувача для усіх областей фізики, що працюватиме в автоматичному режимі;
- покращення користувацького інтерфейсу.

З вищесказаним узгоджується спостереження, яке можна зробити за допомогою відкритого онлайн-сервісу Google Trends: зменшується інтерес до традиційного методу галузі – методу скінченних елементів. На рисунку 6 зображено віднормований графік інтересу користувачів пошукової системи Google за часом до таких тем, як метод скінченних елементів, метод ґраткових рівнянь Больцмана та метод граничних елементів. З графіку видно, що інтерес до методу скінченних елементів спадає у пошуковій системі Google. Видно і те, наскільки відрізняється популярність цього методу від двох інших, що зображені на графіку і також розглядаються в рамках даної статті.

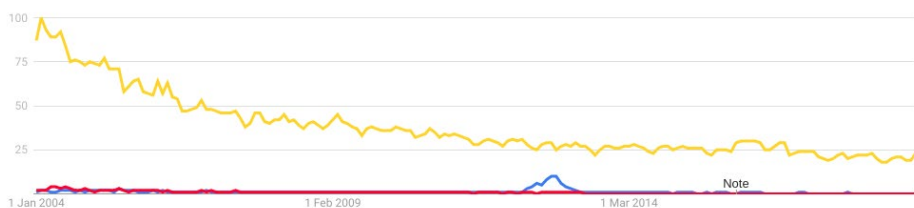


Рисунок 7 – Графік інтересу за часом у пошуковій системі Google до таких тем, як метод скінченних елементів (жовтий), метод ґраткових рівнянь Больцмана (синій) та метод граничних елементів (червоний) [30]

Масштаб графіку на рисунку 7, який віднормовано по точці найвищого інтересу до методу скінченних елементів, не дозволяє якісно порівняти попит у пошуковій системі Google на метод ґраткових рівнянь Больцмана та метод граничних елементів. На рисунку 8 наведено такий самий графік, але лише для цих двох методів.

З рисунка 8 видно, що останні 10 років метод ґраткових рівнянь Больцмана є більш популярним у пошуках користувачів Google, ніж метод граничних елементів, хоча на початку 2000-х років ситуація була протилежною. Також на графіку видно стрімкий сплеск популярності методу ґраткових рівнянь Больцмана, пік якого прийшовся на грудень 2012 року. Як і у випадку з методом скінченних елементів (рис. 7), інтерес до двох даних методів також спадає.



Рисунок 8 – Графік інтересу за часом у пошуковій системі Google до таких тем, як метод ґраткових рівнянь Больцмана (синій) та метод граничних елементів (червоний) [31]

Зміна інтересів до різних підходів та методів визначає, що існує потреба в розробці обчислювальних технологій [33] для моделюючих систем, здатних забезпечувати автоматичну обробку даних, моделювання еволюційних аеро/гідродинамічних процесів та визначення впливів в автоматичному режимі, без втручання людини в роботу системи.

## Висновки

Враховуючи сучасні тенденції розвитку програмно-моделюючих систем у галузі обчислювальної гідродинаміки, доцільно відзначити наступне:

- основний недолік більшості загальновідомих програмно-моделюючих систем полягає в обов'язковому залученні до роботи із моделюючою системою висококваліфікованого фахівця з предметної галузі та з методів обчислень для забезпечення обробки даних та супроводження системи;
- незважаючи на потужність та широкі можливості існуючих систем, існує потреба у створенні вузькоспеціалізованих програмно-моделюючих систем, здатних забезпечити прогнозування еволюції довготривалих багатоетапних процесів;

- перспективним напрямком в теорії обчислень є створення комплексних методів та обчислювальних технологій для розв'язання великих задач та прямого комп'ютерного моделювання складних систем і багатоетапних процесів;
- створення нових моделюючих систем повинно базуватися на комплексних, взаємопов'язаних математичних моделях та обчислювальних технологіях, здатних забезпечити прогнозування та відображення всього процесу в реальному часі;
- програмно-моделюючі системи повинні мати можливість функціонування в автоматичному режимі.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бетяев С. К. Гидродинамика: проблемы и парадоксы / С. К. Бетяев // Успехи физических наук. – 1995. – Т.165, №3. – С. 299-330.
2. Keith Hanna CFD Breaks the \$Billion Barrier! // Mentor Blogs Дата оновлення: 26.03.2015. URL: <https://blogs.mentor.com/khanna/blog/2015/03/26/cfd-breaks-the-billion-barrier/> (дата звернення: 01.09.2018)
3. Сайт компанії ANSYS. URL: <https://www.ansys.com/> (дата звернення: 01.09.2018)
4. Tameirão Sampaio Rodrigues, Laura & Coelho e Silva, Lucas & Costa Machado, Lucas & Greco, Marcelo & Leo Gélape, Cláudio. (2016). Simulations of Artificial Biological Heart Valves with ANSYS <http://volitans.wix.com/essschallenge>. 10.13140/RG.2.1.3146.7925.
5. ANSYS Academic // Сайт компанії ANSYS. URL: <https://www.ansys.com/academic> (дата звернення: 11.01.2019)
6. Сайт версії пакету OpenFOAM, що розробляється компанією OpenFOAM Foundation. URL: <https://openfoam.org/> (дата звернення: 01.09.2018)
7. Сайт версії пакету OpenFOAM, що розробляється компанією OpenCFD. URL: <https://www.openfoam.com/> (дата звернення: 01.09.2018)
8. foam-extend Open Source CFD Toolbox // Сайт хостингу Open Source проєктів SourceForge. URL: <https://sourceforge.net/projects/foam-extend/> (дата звернення: 14.03.2019)
9. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // Сайт генератора сітки Gmsh. URL: <http://gmsh.info/> (дата звернення: 08.04.2019)
10. A Comparison of CFD Software Packages // Сайт компанії Resolved Analytics. URL: <https://www.resolvedanalytics.com/theflux/comparing-popular-cfd-software-packages> (дата звернення: 01.09.2018)
11. STAR-CCM+ // Сайт компанії Siemens PLM Software. URL: <https://mdx.plm.automation.siemens.com/star-ccm-plus> (дата звернення: 01.09.2018)
12. Femap // Сайт компанії Siemens PLM Software. URL: <https://www.plm.automation.siemens.com/en/products/femap/> (дата звернення: 01.09.2018)
13. Сайт пакету ADINA. URL: <http://www.adina.com/> (дата звернення: 01.09.2018)
14. Сайт компанії MSC Software. URL: <http://www.mscsoftware.com/> (дата звернення: 01.09.2018)
15. Computational Fluid Dynamics // Сайт компанії MSC Software. URL: <http://www.mscsoftware.com/application/computational-fluid-dynamics> (дата звернення: 01.09.2018)
16. Understand, Predict, and Optimize Engineering Designs with the COMSOL Multiphysics® Software // Сайт компанії COMSOL. URL: <https://www.comsol.com/comsol-multiphysics> (дата звернення: 01.09.2018)
17. SU2, the Open-Source CFD Code // Сайт проєкту SU2. URL: <https://su2code.github.io/> (дата звернення: 19.03.2019)
18. National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute” // Сайт компанії Dassault Systèmes. URL: <https://www.3ds.com/customer->



stories/single/university-of-ukraine/ (дата звернення: 12.01.2019)

19. Использование информационных систем и технологий CATIA в учебном процессе НТУУ «КПИ» // Сайт кафедры динаміки і міцності машин та опору матеріалів НТУУ КПІ імені Ігоря Сікорського. URL: <http://mmi-dmm.kpi.ua/index.php/ua/newsletter/178-ispolzovanie-informatsionnykh-sistem-i-tehnologij-catia-v-uchebnom-protssesse-ntuu-kpi.html> (дата звернення: 12.01.2019)

20. SOLIDWORKS Flow Simulation // Сайт пакету SOLIDWORKS. URL: <https://www.solidworks.com/product/solidworks-flow-simulation> (дата звернення: 01.09.2018)

21. Abaqus/CFD // Сайт компанії Dassault Systèmes. URL: <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/multiphysics/abaquscf/> (дата звернення: 01.09.2018)

22. SIMULIA PowerFLOW // Сайт компанії Exa Corporation. URL: <https://exa.com/en/product/simulation-tools/powerflow-cfd-simulation> (дата звернення: 01.09.2018)

23. XFLOW // Сайт компанії Dassault Systèmes. URL: <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/xflow/> (дата звернення: 01.09.2018)

24. Dr. Ivo Weinholt, Dr. John Parry The Third Wave of CFD // Сайт корпорації Mentor Graphics. URL: <http://go.mentor.com/4gvfp> (дата звернення: 24.02.2019)

25. Сайт бібліотеки Palabos. URL: <http://www.palabos.org/> (дата звернення: 01.09.2018)

26. Сайт бібліотеки OpenLB. URL: <https://www.openlb.net/> (дата звернення: 25.01.2019)

27. Сайт компанії ANKER-ZEMER Engineering AB. URL: <http://www.anker-zemer.com/> (дата звернення: 01.09.2018)

28. LINFLOW APPLICATIONS // Документ в інтернет-архіві Wayback Machine. URL: [https://web.archive.org/web/20161106013336/http://linflow.us/LF13\\_APPL061.pdf](https://web.archive.org/web/20161106013336/http://linflow.us/LF13_APPL061.pdf) (дата звернення: 08.04.2019)

29. 3DynaFS-BEM // Сайт компанії Dynaflow, Inc. URL: [http://www.dynaflow-inc.com/Products/Software/2\\_3DynaFS/Boundary-Element-3DynaFS.htm](http://www.dynaflow-inc.com/Products/Software/2_3DynaFS/Boundary-Element-3DynaFS.htm) (дата звернення: 25.01.2019)

30. Lattice Boltzmann methods, Boundary element method, Finite element method // Онлайн-сервіс Google Trends. URL: <https://trends.google.com/trends/explore?date=all&q=%2Fm%2F0d1k8r,%2Fm%2F05mrtf,%2Fm%2F03110> (дата звернення: 02.03.2019)

31. Lattice Boltzmann methods, Boundary element method // Онлайн-сервіс Google Trends. URL: <https://trends.google.com/trends/explore?date=all&q=%2Fm%2F0d1k8r,%2Fm%2F05mrtf> (дата звернення: 02.03.2019)

32. Риццо Ф. Метод граничных интегральных уравнений – современный вычислительный метод прикладной механики // Механика. Новое в зарубежной науке. – М.: Мир, 1978, С. 11-17.

33. Довгий С.А., Лифанов И.К., Черний Д.И. Метод сингулярных интегральных уравнений и вычислительные технологии. – К.: Издательство «Юстон» 2016, 380 с.

34. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 256 с.

35. Довгий С.О., Ляшко С.І., Черній Д.І. Алгоритми методу дискретних особливостей для обчислювальних технологій. // Кибернетика и системный анализ. 2017, №6, С. 147-159.

36. Sarpkaya T. Computational methods with vortices. The 1988 Freeman Scholar Lecture // J. of Fluids Engineering. 1989. Vol. 111. P. 5–52.

37. Головенко А.Д., Голубев С.А., Черний Д.И. Вычислительные особенности нестационарных аэродинамических задач. // Журнал обчислювальної і прикладної математики, №1 т. (104) 2011, С. 24-39.

## REFERENCES

1. Betyaev S. K. Hydrodynamics: Problems and Paradoxes //Advances in the physical sciences. – 1995. - V. 165, №3. – С. 299-330. (In Russian).

2. Keith Hanna CFD Breaks the \$Billion Barrier! // Mentor Blogs Дата оновлення:

- 26.03.2015. URL: <https://blogs.mentor.com/khanna/blog/2015/03/26/cfd-breaks-the-billion-barrier/> (дата звернення: 01.09.2018).
3. Web Site ANSYS. URL: <https://www.ansys.com/> (дата звернення: 01.09.2018)
4. Tameirão Sampaio Rodrigues, Laura & Coelho e Silva, Lucas & Costa Machado, Lucas & Greco, Marcelo & Leo Gélape, Cláudio. (2016). Simulations of Artificial Biological Heart Valves with ANSYS <http://volitans.wix.com/esschallenge>. 10.13140/RG.2.1.3146.7925.
5. ANSYS Academic // Web Site ANSYS. URL: <https://www.ansys.com/academic> (дата звернення: 11.01.2019)
6. Web Site OpenFOAM. URL: <https://openfoam.org/> (дата звернення: 01.09.2018)
7. Сайт версії пакету OpenFOAM, що розробляється компанією OpenCFD. URL: <https://www.openfoam.com/> (дата звернення: 01.09.2018)
8. URL: <https://sourceforge.net/projects/foam-extend/> (дата звернення: 14.03.2019)
9. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // URL: <http://gmsh.info/> (дата звернення: 08.04.2019)
10. A Comparison of CFD Software Packages // Website Resolved Analytics. URL: <https://www.resolvedanalytics.com/theflux/comparing-popular-cfd-software-packages> (01.09.2018)
11. STAR-CCM+ // Website Siemens PLM Software. URL: <https://mdx.plm.automation.siemens.com/star-ccm-plus> (дата звернення: 01.09.2018)
12. Femap//Website Siemens PLM Software. URL: <https://www.plm.automation.siemens.com/en/products/femap/> (01.09.2018)
13. Website ADINA. URL: <http://www.adina.com/> (01.09.2018)
14. Website MSC Software. URL: <http://www.mssoftware.com/> (дата звернення: 01.09.2018)
15. Computational Fluid Dynamics // Website MSC Software. URL: <http://www.mssoftware.com/application/computational-fluid-dynamics> (01.09.2018)
16. Understand, Predict, and Optimize Engineering Designs with the COMSOL Multiphysics® Software // Website COMSOL. URL: <https://www.comsol.com/comsol-multiphysics> (01.09.2018)
17. SU2, the Open-Source CFD Code // <https://su2code.github.io/> (19.03.2019)
18. National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute” // Сайт компанії Dassault Systèmes. URL: <https://www.3ds.com/customer-stories/single/university-of-ukraine/> (12.01.2019)
19. <http://mmi-dmm.kpi.ua/index.php/ua/newsletter/178-ispolzovanie-informatsionnykh-sistem-i-tehnologij-catia-v-uchebnom-protseesse-ntuu-kpi.html> (12.01.2019)
20. SOLIDWORKS Flow Simulation / Website SOLIDWORKS. URL: <https://www.solidworks.com/product/solidworks-flow-simulation> (01.09.2018)
21. Abaqus/CFD // Website Dassault Systèmes. URL: <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/multiphysics/abaquscf/> (дата звернення: 01.09.2018)
22. SIMULIA PowerFLOW // Website Exa Corporation. URL: <https://exa.com/en/product/simulation-tools/powerflow-cfd-simulation> (01.09.2018)
23. XFLOW // Website Dassault Systèmes. URL: <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/xflow/> (дата звернення: 01.09.2018)
24. Dr. Ivo Weinhold, Dr. John Parry The Third Wave of CFD // Website Mentor Graphics. URL: <http://go.mentor.com/4gvfp> (24.02.2019)
25. Website Palabos. URL: <http://www.palabos.org/> (01.09.2018)
26. Website OpenLB. URL: <https://www.openlb.net/> (25.01.2019)
27. Website ANKER-ZEMER Engineering AB. URL: <http://www.anker-zemer.com/> (01.09.2018)
28. LINFLOW APPLICATIONS // Website Wayback Machine. URL: [https://web.archive.org/web/20161106013336/http://linflow.us/LF13\\_APPL061.pdf](https://web.archive.org/web/20161106013336/http://linflow.us/LF13_APPL061.pdf)(08.04.2019);
29. 3DynaFS-BEM // Сайт компанії Dynaflow, Inc. URL: [http://www.dynaflow-inc.com/Products/Software/2\\_3DynaFS/Boundary-Element-3DynaFS.htm](http://www.dynaflow-inc.com/Products/Software/2_3DynaFS/Boundary-Element-3DynaFS.htm) (25.01.2019)
30. Lattice Boltzmann methods, Boundary element method, Finite element method // Онлайн-

- сервіс Google Trends. URL: <https://trends.google.com/trends/explore?date=all&q=%2Fm%2F0d1k8r,%2Fm%2F05mrtf,%2Fm%2F03110> (дата звернення: 02.03.2019)
31. Lattice Boltzmann methods, Boundary element method // Онлайн-сервіс Google Trends. URL: <https://trends.google.com/trends/explore?date=all&q=%2Fm%2F0d1k8r,%2Fm%2F05mrtf> (дата звернення: 02.03.2019)
32. Rizzo F. Boundary Integral Equation Method – Computational Applications in Applied Mechanics // Applied Mechanics Conference. – Troy, New York 1975.
33. Dovgy S.A., Lifanov I.K., Cherniy D.I. The method of singular integral equations and computational technologies. – К.: “Euston” Publishing House 2016, 380 p. (In Russian).
34. Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K. Numerical methods in singular integral equations. – М.: Nauka, 1985. – 256 p. (In Russian).
35. S.O. Dovgyi, S.I. Lyashko, D.I. Cherniy. Algorithms of Discrete Singularities Method of Computational Technologies. // Cybernetics and System Analysis, 2017, №6, pp. 147-159.
36. Sarpkaya T. Computational methods with vortices. The 1988 Freeman Scholar Lecture // J. of Fluids Engineering. 1989. Vol. 111. P. 5–52.
37. Golovenko A.D., Golubev S.O., Cherniy D.S. Computational features of non-stationary aerodynamic problems. // Journal of Computational and Applied Mathematics, №1(104), 2011, pp. 24-39. (In Russian).

*Стаття надійшла до редакції 11.03.2019.*