

## ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ОДНОРІВНЕВОГО МСЕРЗ (FETI) МЕТОДУ ДЛЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Finite Element Method is most widely used to solve boundary value problems. However in the case of domains with complicated geometry, inhomogeneous and large-scale problems some special approaches are needed. The domain decomposition approach for parallel finite element solution of the problem of the theory of elasticity is presented in this study. The computational results of the investigation of numerical efficiency of the developed algorithm are given.

**Key words:** *finite element method tearing and interconnecting (FETI), pseudo-inverse matrix, 2-D theory of elasticity problem, numerical experiments.*

Одним з найпоширеніших методів розв'язання еліптичних задач є метод скінченних елементів, однак у випадку складної геометрії об'єкта, різних неоднорідностей чи при великій кількості вузлів триангуляції його пряме застосування може бути проблематичним. В цій роботі запропоновано варіант методу декомпозиції області для паралельного розв'язання задачі теорії пружності методом скінченних елементів, відомий як метод скінченних елементів розривів і з'єднань (МСЕРЗ). Наведено результати дослідження чисельної ефективності розробленого алгоритму у випадку плоскої задачі теорії пружності.

**Ключові слова:** *метод скінченних елементів розривів і з'єднань (МСЕРЗ), псевдообернена матриця, плоска задача теорії пружності, чисельні експерименти.*

Широко відомі декілька реалізацій методу скінченних елементів (МСЕ). Як для стаціонарних, так і динамічних задач одним з найефективніших є FETI (Finite Element Tearing Interconnecting) – МСЕРЗ (метод скінченних елементів розривів і з'єднань) [2]. Цей метод можна вважати одним із варіантів методу декомпозиції області (МДО) для паралельного розв'язання задач математичної фізики [6, 8]. У цьому випадкові умови неперервності між областями забезпечуються введенням множників Лагранжа на інтерфейсах між підобластями [8]. Під час розв'язання задачі теорії пружності у переміщеннях задача відшукування точки мінімуму приводиться до задачі відшукування сідлової точки для систем значно меншого розміру [1, 5].

Відомі та широко застосовуються різні варіанти МСЕРЗ. У роботі [4] запропоновано двоїсто-первинний МСЕРЗ (dual-primal FETI – FETI – DP). Багато робіт присвячені розробці МСЕРЗ з використанням скінченно елементних сіток, вузли яких не збігаються на границях між підобластями.

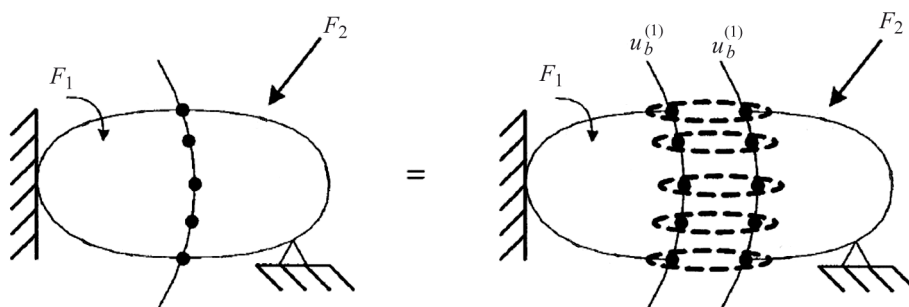


Рис. 1. Декомпозиція області на суперелементи.

Розглянутий далі МСЕРЗ належить до методів декомпозиції типу Діріхле – Діріхле [5], в яких на границі поділу підобластей задають умову зв'язку типу Ді-

ріхле. Нехай задана деяка область  $\Omega \subset R^d$ ,  $d = 1, 2, 3$ , з границею  $\partial\Omega = \Gamma$ , яку ділимо на  $N$  підобластей (суперелементів) з відомими умовами неперервності на границях. На рис. 1 зображено декомпозицію області на два суперелементи  $F_1$  і  $F_2$  з умовою зв'язку  $u_b^{(1)} = u_b^{(2)}$ .

Розглянемо задачу:

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad div } u = f \text{ на } \Omega, \quad (1)$$

$$u = u_0, \text{ на } \partial\Omega_D, \quad p = \bar{p} \text{ на } \partial\Omega_N, \quad \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N = \partial\Omega. \quad (2)$$

де  $\lambda, \mu$  – сталі Ляме. Задачу (1)–(2) на основі методу скінченних елементів сформулюємо як задачу мінімізації з обмеженнями:

Знайти  $u \in W_1^2$  таку, що:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(Ku, u) - (f, u) \rightarrow \min \\ Bu = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

де

$$u = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ \dots \\ u^{(N)} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \\ \dots \\ f^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \text{і } K = \begin{pmatrix} K^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K^{(N)} \end{pmatrix}.$$

$u^{(i)}, f^{(i)}$  – відповідно вектори переміщень та навантажень, а  $K^{(i)}$  – матриця жорсткості для  $i$ -ї підобласті. Усі рівняння зв'язку записані з допомогою однієї матриці:

$$B = (B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(N)}).$$

Матриці  $B^{(i)}$  будуються для кожної підобласті і складаються з  $\{-1, 0, 1\}$ . Для випадку двох областей, наприклад, маємо одне рівняння зв'язку  $u_b^{(1)} = u_b^{(2)}$ , тому ця матриця буде складатиметься з двох частин, кожна з відповідними значеннями на елементі, які описують рівняння зв'язку (рис. 1). У загальному випадку, коли область розбита на “ $s$ ” підобластей, рівняння зв'язку в матричному вигляді має такий вигляд:

$$\sum_{j=1}^s B^{(j)} u^{(j)} = 0.$$

Задача (1), (2) є однозначно розв'язною, якщо  $\text{Ker}(K) \cap \text{Ker}(B) = \{0\}$ , що означає, що  $K$  є оборотною на  $\text{Ker}(B)$ .

Увівши вектор множників Лагранжа  $\lambda$ , для врахування рівняння зв'язку отримаємо систему:

$$\begin{cases} Ku + B^T \lambda = f, \\ Bu = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Розв'язок  $u$  системи (4) існує тоді і тільки тоді, коли  $(f - B^T \lambda) \in \text{range}(K)$ , а розв'язок  $\lambda$  визначається з точністю до деякого доданка з  $\text{Ker}(B^T)$ , тому простір  $U$  множників Лагранжа вибираємо як  $\text{range}(B)$ .

Матриця  $K$  є виродженою, тому введемо операцію псевдообертання (як частинний випадок узагальненого обертання).

**Означення 1.** [5] Нехай матриця  $A \in R^{m \times n}$ , тоді узагальнено-оберненою до  $A$  називають таку матрицю  $A^+ \in R^{n \times m}$ , для якої виконується

$$A_{m \times n} A_{n \times m}^+ A_{m \times n} = A_{m \times n}.$$

У випадку  $m = n$  маємо операцію псевдообертання.

**Теорема 1.** [5] Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A_{m \times n} \vec{x}_{n \times 1} = \vec{b}_{m \times 1},$$

де  $\vec{b} \in Range(A)$ , ( $\vec{b}$  є лінійною комбінацією незалежних стовпців  $A$ ), тоді розв'язок такої системи можна знайти у вигляді

$$\vec{x}_{n \times 1} = A_{n \times m}^+ \vec{b}_{m \times 1} + (I_{n \times n} - A_{n \times m}^+ A_{m \times n}) \vec{y}_{n \times 1}, \text{ для } \forall \vec{y} \in R^n.$$

Позначимо  $R = I - K^+ K$  і, враховуючи теорему 1, одержимо вираз для  $u$ :

$$u = K^+(f - B^T \lambda) - Ra, \text{ якщо } f - B^T \lambda \perp \text{kernel}(K).$$

Тут  $K^+$  є псевдооберненою до  $K$ .

Матриця  $R = I - K^+ K$  побудована на елементах ядра матриці жорсткості, тому  $range(R) = Ker(K)$ .

Підставляючи отриманий вираз для  $u$  в друге рівняння (4), отримаємо

$$BK^+ B^T \lambda = BK^+ f - BRa. \quad (5)$$

Систему (4) запишемо в такому вигляді:

$$\begin{cases} BK^+ B^T \lambda + BRa = BK^+ f, \\ R^T Ku - R^T B^T \lambda = R^T f. \end{cases}$$

Уведемо позначення:  $F = BK^+ B^T$ ,  $G = BR$ ,  $d = BK^+ f$  і  $e = R^T f$ . Зауважимо, що  $R^T K = 0$ , оскільки  $K$  симетрична і  $KR = 0$ . Отримаємо систему:

$$\begin{cases} F\lambda + Ga = d, \\ G^T \lambda = e. \end{cases} \quad (6)$$

Розв'язавши (6) відносно  $\lambda$  і  $a$ , знайдемо розв'язок вихідної задачі  $u = K^+(f - B^T \lambda) - Ra$ . Такий підхід до розв'язування задачі називають простим МСЕРЗ (ФЕТІ) методом.

Для побудови однорівневого МСЕРЗ (ФЕТІ) методу введемо оператор проектування  $P^T = I - G(G^T QG)^{-1} G^T Q$ , де  $Q$  – деяка симетрична, додатно визначена матриця. У випадку однорідних коефіцієнтів зручно використовувати  $Q = I$ , якщо в задачі коефіцієнти мають стрибки для правильного вибору, необхідно проводити додатковий аналіз.

Спроектувавши перше рівняння системи (6), отримаємо

$$P^T F \lambda = P^T d,$$

звідки шукаємо  $\lambda$  методом спряжених градієнтів, з початковим наближенням  $G^T \lambda = e$ . Тоді розв'язок задачі знаходимо у вигляді

$$u = K^+(f - B^T \lambda) - R(G^T QG)^{-1} G^T Q(d - F\lambda).$$

Для пришвидшення збіжності ітераційного методу часто використовують передобумовлювачі. Наприклад, передобумовлювач Діріхле має такий вигляд [2, 5]:

$$D = BSB^T = \sum_{i=1}^N B^{(i)} S^{(i)} B^{(i)T},$$

де  $S^{(i)}$  – розклад Шура для  $K^{(i)}$ .

Зазначимо, що у разі використання передобумовлювача Діріхле коефіцієнт обумовленості матриці системи задовольняє [4, 5]:

$$k \leq C \left( 1 + \log \frac{H}{h} \right)^\tau, \quad (7)$$

де  $C = \text{const}$ ,  $C > 0$ ,  $\tau = \{1, 2, 3\}$  – розмірність задачі;  $H$  – максимальний діаметр підобластей;  $h$  – максимальний діаметр елементів дискретизації. Видно, що коефіцієнт обумовленості не зростає зі збільшенням розміру підобластей, і полілогірифімічно зростає зі зменшенням діаметра скінченних елементів.

Запишемо основні кроки алгоритму, який реалізує МСЕРЗ (FETI) метод.

**1.** Декомпозиція області, дискретизація суперелементів. На цьому етапі необхідно враховувати оцінку (7). Дискретизація підобластей повинна бути виконана так, щоб вузли на межі сусідніх суперелементів збігались. Відомі також роботи, в яких для сіток вузли на спільній границі не збігаються. У цьому випадку використовуються мортарні функції [2].

**2.** На кожній підобласті обчислюємо матрицю жорсткості  $K^{(i)}$  і вектор навантажень  $f^{(i)}$ , будуємо матрицю зв'язку  $B^{(i)}$ .

**3.** Для кожної плаваючої підобласті шукаємо псевдообернену матрицю жорсткості  $K^{(i)+}$  та її доповнення  $R^{(i)}$  (у випадку фіксованої області  $(K^{(i)})^+ = (K^{(i)})^{-1}$ , а  $R^{(i)} \equiv 0$ ). Для цього знаходимо розбиття матриці  $K^{(i)}$  на такі блоки:  $K_{11}^{(i)}$ ,  $K_{12}^{(i)}$ ,  $K_{21}^{(i)}$ ,  $K_{22}^{(i)}$ , де  $K_{11}^{(i)}$  – матриця елементів на перетині лінійно незалежних рядків і стовпців матриці  $K^{(i)}$ ,  $K_{22}^{(i)}$  – матриця з елементів на перетині лінійно залежних рядків і стовпців.

$$K^{(i)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)} \\ K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)} \end{bmatrix}, \text{ очевидно, що } \text{rank}(K) = \text{rank}(K_{11}), \text{ rank}(K_{22}) = 1.$$

$$\text{Видно, що } (K^{(i)})^+ = \begin{bmatrix} (K_{11}^{(i)})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad R^{(i)} = R^{(i)T} = I - K^{(i)} K^{(i)+} = \\ = \begin{bmatrix} -(K_{11}^{(i)})^{-1} K_{12}^{(i)} \\ I_{22} \end{bmatrix}.$$

Для знаходження лінійно незалежних рядків використаємо метод Холецкого, в якому занулюємо рядок, з 0-м діагональним елементом розкладу.

**4.** На цьому етапі сформовані на кожній підобласті результати об'єднуємо в загальну систему:

$$F = \sum_{i=1}^N B^{(i)} K^{(i)+} B^{(i)T}, \quad G = \left[ [B^{(1)} R^{(1)}] [B^{(2)} R^{(2)}] \dots [B^{(\tilde{N})} R^{(\tilde{N})}] \right], \\ d = \sum_{i=1}^N B^{(i)} K^{(i)+} f^{(i)}, \quad e = \left[ [f^{(1)T} R^{(1)}]^T [f^{(2)T} R^{(2)}]^T \dots [f^{(\tilde{N})T} R^{(\tilde{N})}]^T \right]^T, \\ P^T = I - G(G^T G)^{-1} G^T.$$

**5.** Тепер розв'язок  $\lambda$  шукатимемо ітераційним методом, як розв'язок системи

$$P^T F \lambda = P^T d$$

з початковим наближенням  $\lambda_0$ , яке отримуємо з системи  $G^T \lambda_0 = e$ .

Розв'язок на кожній підобласті знаходимо за формулою

$$u^{(i)} = K^{(i)+} (f^{(i)} - B^{(i)T} \lambda) - R^{(i)} (G^T G)^{-1} G^T (d - F \lambda).$$

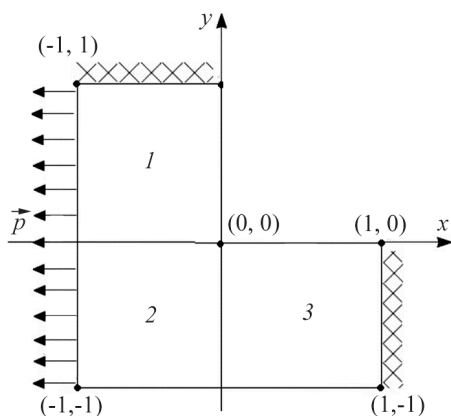


Рис. 2. Геометрія області та задані граничні умови.

Використовуючи описаний метод, розроблено програмне забезпечення для розв'язання плоскої задачі теорії пружності. Розглянемо задачу про плоский напружений стан об'єкта  $L$ -подібної форми (рис. 2).

Граничні умови у цьому випадку такі:  $\vec{p} = (-1000, 0)^T$  на прямій  $x = -1$ , на прямих  $x = 1$  і  $y = 1$  задано умови жорсткого закріплення. Механічні характеристики матеріалу  $E = 21000 \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu = 0,3$ .

Здійснено декомпозицію області на три підобласті 1, 2 і 3 (рис. 2). Проведено такі тести:

а) всі три підобласті поділено на  $12 \times 12$  прямокутних білінійних елементів

(рис. 3а). Час виконання програми – 5,53 с.

б) першу (1) і третю (3) підобласті поділено на  $6 \times 6$  біквадратичних елементів, а другу на  $12 \times 12$  білінійних елементів (рис. 3б). Час виконання програми – 4,27 с.

в) першу (1) і третю (3) підобласті поділено на  $12 \times 12$  білінійних елементів, а другу (2) на  $6 \times 6$  біквадратичних елементів. (рис. 3в). Час виконання програми – 4,31 с.

У табл. 1 і 2 наведено порівняльні результати МСЕРЗ методу та класичного варіанта МСЕ на густій сітці із 4624 вузлів. Величини  $\delta U_i = \frac{|U - U_i|}{|U_i|} \cdot 100\%$ ,

$\delta V_i = \frac{|V - V_i|}{|V_i|} \cdot 100\%$ ,  $i = 1, 2, 3$  позначають відносні похибки МСЕРЗ методу для

різних поділів підобластей, де  $U, V$  – компоненти вектора переміщення, отримані МСЕ,  $U_i, V_i$  – компоненти вектора переміщення, обчислені за допомогою МСЕРЗ методу при різних поділах підобластей (рис. 3). Як видно, третій спосіб (рис. 3в) дискретизації підобластей дає змогу розв'язати задачу з такою ж точністю, як і перший (рис. 3а), хоча є ефективнішим з погляду використання обчислювальних ресурсів. Зауважимо, що згідно з оцінкою (7), значне згущення скінченноелементної сітки у підобластях може привести до накопичення похибки алгоритму. У цьому випадку необхідно збільшити кількість суперелементів.

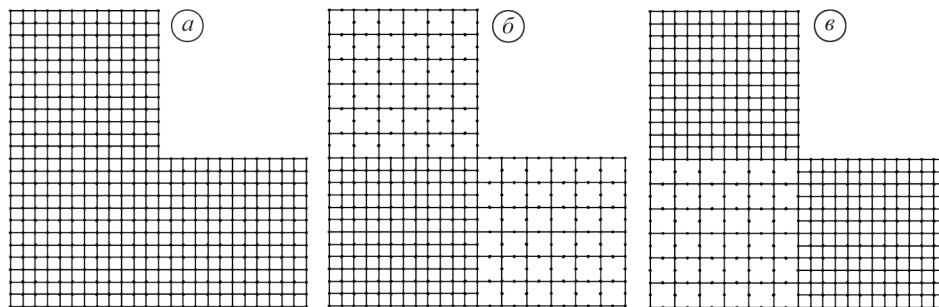


Рис. 3. Скінченноелементна сітка для  $L$ -подібної області.

**Таблиця 1. Порівняння переміщень  $U$  на  $x = 0$**

$y$	$U$ MCE	$U_1$ FETI (a)	$U_2$ FETI (б)	$U_3$ FETI (в)	$\delta U_1$	$\delta U_2$	$\delta U_3$
-1	-0,0571	-0,0571	-0,0583	-0,0567	0,07	1,92	0,68
-0,5	-0,0536	-0,0540	-0,0546	-0,0532	0,74	1,68	0,75
0	-0,0573	-0,0572	-0,0581	-0,0570	0,19	1,31	0,53
0,5	-0,0470	-0,0467	-0,0472	-0,0467	0,62	0,38	0,62

**Таблиця 2. Порівняння переміщень  $V$  на  $y = 0$**

$x$	$V$ MCE	$V_1$ FETI (a)	$V_2$ FETI (б)	$V_3$ FETI (в)	$\delta V_1$	$\delta V_2$	$\delta V_3$
-1	0,02081	0,02091	0,02043	0,02100	0,47	1,67	0,95
-0,5	0,00444	0,00442	0,00435	0,00441	0,45	1,45	0,68
0	-0,00322	-0,00352	-0,00385	-0,00362	9,31	16,49	11,05
0,5	-0,00528	-0,00531	-0,00540	-0,00534	0,85	2,04	1,11

### ВИСНОВКИ

Отже, у цій роботі досліджено побудову та обчислювальні аспекти реалізації МСЕРЗ методу для розв'язування задачі теорії пружності. Реалізація запропонованого підходу є технічно складнішою за класичний МСЕ. Однак він має вагомі переваги при розв'язуванні великомасштабних задач із складною геометрією та неоднорідностями, зокрема: всі перетворення на підобластях виконуються паралельно, що дає змогу ефективно розпаралелити процес обчислень; отримана загальна матриця має кращі обчислювальні характеристики, ніж матриця класичного МСЕ; має можливість ефективно адаптувати скінченноелементну сітку в підобластях.

1. *A FETI Method with a Mesh Independent Condition Number for the Iteration Number / C. Bernardi, T. Chacon and etc. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2008. – 197, № 13–16. – P. 1410–1429.*
2. *Farhat C, Roux F. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm // Int. J. Numerical Methods in Engineering. – 1991. – 32. – P. 1205–1227.*
3. *Farhat C., Lesoinne M. Pierson K. A scalable dual-primal domain decomposition method // Numer. Linear Algebra Appl. – 2000. – 7, № 7–8. – P. 687–714.*
4. *Klawonn A., Widlund O. B. FETI and Neumann-Neumann Iterative Substructuring Methods: Connections and New Results // Comm. Pure Appl. Math. – 2001. – 54, № 1. – P. 57–90.*
5. *Nguyen D. T. Finite Element Methods: Parallel – Sparse Statics and Eigen – Solutions. – Springer Verlag, 2006. – 533 p.*
6. *Quarteroni A., Valli A. Domain Decomposition Methods for Partial differential Equations // Oxford University Press, 1999. – 360 p.*
7. *Tezaur R. Analysis of Lagrange Multipliers Based Domain Decomposition, 1998 // PhD Thesis, University of Colorado.*
8. *Toselli A., Widlund O. Domain Decomposition Methods // Algorithms and Theory. – Springer Verlag, 2005. – 453 p.*

Львівський національний університет ім. Івана Франка

Одержано  
17.02.2010