

## СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ВІБРАЦІЙНОГО СИГНАЛУ ДЕТАЛІ З ТРИЩИНОЮ

Changes of the spectral characteristics of vibration signals from thin cracked blade with crack grows is analyzed in this article. The formulae for cross spectral densities estimates of signal's stationary components are derived.

**Key words:** *vibration signal, spectral density, periodically correlated random process.*

Проаналізовано зміну спектральних характеристик вібраційних сигналів від тонкої пластини з тріщиною у процесі розвитку тріщини. Виведено формули для оцінювання взаємних спектральних густин стаціонарних компонент вібраційного сигналу.

**Ключові слова:** *вібраційний сигнал, спектральна густина, періодично корельований випадковий процес.*

У процесі аналізу вібраційних сигналів від механічних обертових систем дослідники значну увагу приділяють вивченню спектральної густини потужності та кореляційної функції. Проте більшість з них припускають, що вібраційний сигнал є випадковим стаціонарним процесом і всі обчислення проводять у стаціонарному наближенні. Звичайно, спектральна густина потужності є однією з найінформативніших характеристик вібраційного сигналу, проте аналіз в стаціонарному наближенні дає змогу виявляти лише розвинуті дефекти. Виявити дефект на ранній стадії розвитку, користуючись таким підходом, непросто.

У роботах [1, 2] проаналізовано динаміку змін імовірнісних характеристик вібраційних сигналів та розглянуто можливості побудови на їх основі діагностичних критеріїв.

Метою цієї роботи є дослідити зміни спектральних властивостей вібраційного сигналу під час розвитку дефекту і аналіз можливостей побудови на їх основі критеріїв дефектності механічного вузла.

Як показано у роботі [1], вібраційний сигнал від дефектного механічного вузла є насправді періодично корельованим випадковим процесом (ПКВП). Відповідно його можна подати у вигляді гармонічного представлення [3]:

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t}, \quad (1)$$

де  $\xi_k(t)$  є стаціонарно зв'язаними випадковими процесами. Ряд (1) є своєрідним узагальненням ряду Фур'є, в якому коефіцієнти замінені на випадкові функції.

Аналізуючи вираз (1), можна показати, що коефіцієнти Фур'є математичного сподівання ПКВП  $m_k$  є математичними сподіваннями модулюючих процесів  $\xi_k(t)$ , тобто  $E\xi_k(t) = m_k$ . Для компонентів кореляційної функції  $B_k(u)$  та компонентів спектральної густини потужності  $f_k(\omega)$  маємо:

$$B_k(u) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} R_{l-k,l}(u) e^{il\omega_0 u}, \quad (2)$$

$$f_k(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{l-k,l}(\omega - l\omega_0), \quad (3)$$

де  $R_{k,l}(u)$  – взаємкореляційна функція, а  $f_{k,l}(\omega)$  – взаємна спектральна густина стаціонарних компонент  $\xi_k(t)$  і  $\xi_l(t)$ :

$$f_{k,l}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{k,l}(u) e^{i\omega u} du. \quad (4)$$

Нульовий кореляційний компонент, як видно, визначається автокореляційними функціями модульованих процесів  $\xi_k(t)$ , а кореляційні компоненти  $B_k(u)$ ,  $k \neq 0$  – взаємокореляційними функціями процесів, номери яких відрізняються на число  $k$ . Тому потужність взаємокореляційних зв'язків стаціонарних компонентів процесу визначає його міру нестационарності. Формули (1)–(4) є основою для інтерпретації результатів обробки методами статистичного аналізу ПКВП реальних та симульованих даних.

Розглянемо можливість безпосереднього виділення на основі експериментальних даних компонентів  $\xi_k(t)$ . Використовуючи спектральне представлення ПКВП, маємо [3]

$$\xi_k(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{(k-1/2)\omega_0}^{(k+1/2)\omega_0} e^{i\omega t} dZ(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_k(t) e^{ik\omega_0 t},$$

де вузькосмугові процеси

$$\eta_k(t) = \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{i\omega t} dZ_k(\omega), \quad (5)$$

при цьому  $dZ(\omega)$  – спектральні прирости,  $dZ_k(\omega) = dZ(\omega + k\omega_0)$ . Для математичного сподівання процесів  $\eta_k(t)$  одержимо

$$E\eta_k(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} m_n \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{i\omega t} \delta(\omega + (k-n)\omega_0) d\omega = m_k.$$

Отже, математичне сподівання процесів  $\xi_k(t)$  в поданні (1) і процесів  $\eta_k(t)$  збігається. Величини  $dZ(\omega)$ , аргументи яких відрізняються на величину, що є

кратною  $\omega_0$ , є корельованими. Ввівши функції  $\overset{\circ}{Z}(\omega) = Z(\omega) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} m_n U(\omega - n\omega_0)$ ,

де  $U(\omega)$  – функція одиничного скачку: ( $U(\omega) = 1$ , якщо  $\omega \geq 0$ , і  $U(\omega) = 0$ , якщо  $\omega < 0$ ), отримуємо:

$$\overset{\circ}{E} Z(\omega_1) \overset{\circ}{Z}^*(\omega_2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_1 + n\omega_0) d\omega_1 d\omega_2.$$

У разі зміни  $\omega$  в межах інтервалу  $[-\omega_0/2, \omega_0/2]$  величини  $dZ_k(\omega)$  є некорельованими:

$$\overset{\circ}{E} dZ_k(\omega_1) dZ_k^*(\omega_2) = f_0^{(k)}(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_1) d\omega_1 d\omega_2.$$

Тут

$$f_0^{(k)}(\omega_1) = \begin{cases} f_0(\omega_1 + k\omega_0), & \omega_1 \in [-\omega_0/2, \omega_0/2], \\ 0, & \omega_1 \notin [-\omega_0/2, \omega_0/2]. \end{cases}$$

Остання рівність впливає зі співвідношення

$$\begin{aligned}
& Ed \overset{\circ}{Z}_k(\omega_1) d \overset{\circ}{Z}_k^*(\omega_2) = Ed \overset{\circ}{Z}_k^*(\omega_1 + k\omega_0) d \overset{\circ}{Z}_k^*(\omega_2 + k\omega_0) = \\
& = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(\omega_1 + k\omega_0) \delta(\omega_2 - \omega_1 + n\omega_0) d\omega_1 d\omega_2 = \\
& = f_0(\omega_1 + k\omega_0) \delta(\omega_2 - \omega_1) d\omega_1 d\omega_2,
\end{aligned}$$

яке справедливе для  $\omega_1, \omega_2 \in [-\omega_0/2, \omega_0/2]$ . Отже, процеси  $\eta_k(t)$  є стаціонарними, оскільки  $f_0^{(k)}(\omega)$  є спектральними густинами потужності певних стаціонарних процесів. Для автокореляційних функцій цих процесів

$$\begin{aligned}
R_{kk}^{(\eta)}(u) &= E \eta_k^*(t) \eta_k(t+u) = \\
&= \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i\omega_1 u} Ed \overset{\circ}{Z}_k(\omega_1) d \overset{\circ}{Z}_k^*(\omega_2) = \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{i\omega u} f_0(\omega + k\omega_0) d\omega. \quad (6)
\end{aligned}$$

Спектральна густина потужності  $k$ -го компонента тоді  $f_{kk}^{(\eta)}(\omega) = f_0(\omega + k\omega_0)$  для  $\omega \in [-\omega_0/2, \omega_0/2]$ .

Визначимо тепер взаємкореляційні функції процесів  $\eta_k(t)$ . Для кореляцій приростів отримуємо

$$\begin{aligned}
& Ed \overset{\circ}{Z}_l(\omega_1) d \overset{\circ}{Z}_k^*(\omega_2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(\omega_1 + l\omega_0) \delta(\omega_2 - \omega_1 + (k-l+n)\omega_0) d\omega_1 d\omega_2 = \\
& = f_{l-k}(\omega_1 + l\omega_0) \delta(\omega_2 - \omega_1) d\omega_1 d\omega_2.
\end{aligned}$$

Тоді

$$R_{k,l}^{(\eta)}(u) = E \eta_k^*(t) \eta_l(t+u) = \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{i\omega u} f_{l-k}(\omega + l\omega_0) d\omega. \quad (7)$$

Звідси  $f_{k,l}^{(\eta)}(\omega) = f_{l-k}(\omega + l\omega_0)$  для  $\omega \in [-\omega_0/2, \omega_0/2]$ . Взаємкореляційна функція (7) залежить тільки від зсуву, тому процеси  $\eta_k(t)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , є стаціонарно зв'язаними.

Відтак ПКВП можна подати у вигляді

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_k(t) e^{ik\omega_0 t}, \quad (8)$$

де  $\eta_k(t)$  – визначаються формулою (5). Процеси  $\eta_k(t)$  можна виділити за допомогою перетворення [4, 5]:

$$\tilde{\eta}_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \xi(\tau) e^{-ik\omega_0 \tau} d\tau, \quad (9)$$

де  $h(\tau)$  – імпульсний відгук смугового фільтра, передавальна функція якого має вигляд

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [-\omega_0/2, \omega_0/2], \\ 0, & \omega \notin [-\omega_0/2, \omega_0/2]. \end{cases}$$

Очевидно, що

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega = \frac{\sin(\omega_0 \tau / 2)}{\pi \tau}. \quad (10)$$

Перетворення (9) можна трактувати як перенос спектра вліво на величину  $k\omega_0$  і його фільтрацію в смузі  $[-\omega_0/2, \omega_0/2]$ . Відповідно до (5) і (10) знаходимо

$$\tilde{\eta}_k(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{i\omega t} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} dZ_n(\omega_2) \delta(\omega_2 - \omega_1 + (n-k)\omega_0) d\omega_1.$$

Оскільки  $\omega_1$  і  $\omega_2$  змінюються в межах інтервалу  $[-\omega_0/2, \omega_0/2]$ , то внутрішній інтеграл відрізняється від нуля тільки якщо  $n = k$ , тоді

$$\tilde{\eta}_k(t) = \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{i\omega t} dZ_k(\omega) = \eta_k(t).$$

Постає питання про те, як виділені стаціонарні компоненти  $\eta_k(t)$  з виразу (8) пов'язані з компонентами  $\xi_k(t)$  у представленні (1), під час доведення якого ніяких обмежень на смугу частот модулюючих  $\xi_k(t)$  не накладається: випадковий процес є тоді і тільки тоді ПКВП, коли його можна подати у вигляді (5). Беручи до уваги (4), для нульового спектрального компонента ПКВП  $f_0(\omega)$  маємо:

$$f_0(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{n,n}(\omega - n\omega_0), \quad (11)$$

де  $f_{n,n}(\omega)$  – спектральна густина потужності модулюючих стаціонарних процесів  $\xi_n(t)$ . Якщо кореляційні функції модулюючих процесів зникають повільно (такий ПКВП називатимемо вузькосмуговим), то нульовий компонент, як випливає з (11), має вигляд гребінки з гострими вершинами на частотах  $n\omega_0$ . У смугах  $[(n-1/2)\omega_0, (n+1/2)\omega_0]$  тоді суттєво відрізняються від нуля тільки значення спектральної густини  $n$ -го компонента. Оскільки при виділенні стаціонарних компонентів методом лінійної смугової фільтрації спектральна густина потужності кожного  $n$ -го компонента  $\eta_n(t)$  визначається значенням нульового спектрального компонента в межах інтервалу  $[(n-1/2)\omega_0, (n+1/2)\omega_0]$ , тобто  $f_{n,n}^{(\eta)}(\omega_0) = f_0(\omega + n\omega_0)$ , якщо  $\omega \in [-\omega_0/2, \omega_0/2]$ , то в цьому випадку величини спектральних потужностей процесів  $\eta_n(t)$  і  $\xi_n(t)$  будуть дуже близькими:  $f_{n,n}^{(\eta)}(\omega) \approx f_{n,n}^{(\xi)}(\omega)$ . Якщо ПКВП є вузькосмуговим, то значення взаємних спектральних густин  $f_{l-n,l}(\omega - l\omega_0)$  для різних  $l$  не перекриватимуть одне одного. Вони будуть скуплені біля своїх “несучих” частот  $l\omega_0$  і тому визначатимуть значення  $n$ -го спектрального компонента у смузі  $[(l-1/2)\omega_0, (l+1/2)\omega_0]$ .

Водночас для стаціонарних компонентів, виділених фільтрацією, такі значення згідно з формулою

$$R_{l-n,l}^{(\eta)}(u) = \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} f_n(\omega + l\omega_0) e^{i\omega u} du$$

відповідають значенням взаємних спектральних густин.

Використовуючи подання (1), виразимо кореляційні та спектральні характеристики модулюючих процесів  $\eta_k(t)$  через характеристики процесів  $\xi_k(t)$ , записавши їх у такому вигляді:

$$\xi_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\tilde{Z}_k(\omega),$$

де  $Ed\tilde{Z}_k(\omega) = m_k\delta(\omega)d\omega$  і  $Ed\tilde{Z}_k^*(\omega_2)d\tilde{Z}_l(\omega_1) = f_{k,l}(\omega_1)\delta(\omega_2 - \omega_1)d\omega_1d\omega_2$ ,

$d\tilde{Z}_k(\omega) = d\tilde{Z}_k(\omega) - m_kU(\omega)$ . Для процесу  $\xi(t)$  тоді матимемо

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d\tilde{Z}_k(\omega - k\omega_0) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{il\omega_0 t} \int_{(l-1/2)\omega_0}^{(l+1/2)\omega_0} e^{i\omega t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d\tilde{Z}_k(\omega - k\omega_0) = \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{il\omega_0 t} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{i\omega t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d\tilde{Z}_k(\omega + (l-k)\omega_0),\end{aligned}$$

а звідси

$$\eta_l(t) = \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{i\omega t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d\tilde{Z}_k(\omega + (l-k)\omega_0).$$

Автокореляційна функція процесів  $\eta_k(t)$  дорівнює

$$\begin{aligned}R_{k,k}^{(\eta)}(u) &= \\ &= \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i\omega_1 u} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}} Ed\tilde{Z}_p^*(\omega_2 + (k-p)\omega_0)d\tilde{Z}_q(\omega_1 + (k-q)\omega_0)d\omega_1d\omega_2 = \\ &= \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i\omega_1 u} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}} f_{p,q}(\omega_1 + (k-q)\omega_0)\delta(\omega_2 + (p-k)\omega_0 - \omega_1)d\omega_1d\omega_2.\end{aligned}$$

Оскільки  $\omega_1$  і  $\omega_2$  змінюються тільки в межах інтервалу  $[-\omega_0/2, \omega_0/2]$ , то

$$\begin{aligned}R_{k,k}^{(\eta)}(u) &= \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{i\omega u} \sum_{q \in \mathbb{Z}} f_{q,q}(\omega + (k-q)\omega_0)d\omega, \\ f_{k,k}^{(\eta)}(\omega) &= \begin{cases} \sum_{q \in \mathbb{Z}} f_{q,q}(\omega + (k-q)\omega_0), & \omega \in [-\omega_0/2, \omega_0/2], \\ 0, & \omega \notin [-\omega_0/2, \omega_0/2]. \end{cases} \quad (12)\end{aligned}$$

Визначимо взаємкореляційну функцію процесів  $\eta_k(t)$  і  $\eta_l(t)$ :

$$\begin{aligned}R_{k,l}^{(\eta)}(u) &= \\ &= \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i\omega_1 u} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}} Ed\tilde{Z}_p^*(\omega_2 + (k-p)\omega_0)d\tilde{Z}_q(\omega_1 + (l-q)\omega_0)d\omega_1d\omega_2 = \\ &= \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i\omega_1 u} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}} f_{p,q}(\omega_1 + (l-q)\omega_0)\delta(\omega_2 + \\ &+ (q-p+k-l)\omega_0 - \omega_1)d\omega_1d\omega_2.\end{aligned}$$

Ця величина не дорівнює нулю тільки у тому разі, якщо виконується рівність  $q-p+k-l=0$ , тобто при  $p=q+k-l$ :

$$R_{k,l}^{(\eta)}(u) = \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{i\omega u} \sum_{q \in \mathbb{Z}} f_{q+k-l,q}(\omega + (l-q)\omega_0)d\omega,$$

а звідси

$$f_{k,l}^{(\eta)}(\omega) = \begin{cases} \sum_{q \in \mathbb{Z}} f_{q+k-l,q}(\omega + (l-q)\omega_0), & \omega \in [-\omega_0/2, \omega_0/2], \\ 0, & \omega \notin [-\omega_0/2, \omega_0/2]. \end{cases} \quad (13)$$

З виразів (12)–(13) випливає, що у випадку, коли спектральні густини процесів  $\xi_k(t)$  відрізняються від нуля тільки в смузі  $[-\omega_0/2, \omega_0/2]$ , то  $f_{k,l}^{(\eta)}(\omega) = f_{k,l}(\omega)$ . Для широкосмугових ПКВП спектральні густини  $f_{k,l}^{(\eta)}(\omega)$  визначатимуться сумою значень багатьох спектральних густин  $f_{k,l}(\omega)$ , зсунутих за частотою на величини, що кратні основній частоті  $\omega_0$ .

Вивчення зміни спектральних властивостей вібраційного сигналу проводитимемо на основі аналізу вібраційних сигналів від тонкої пластини з тріщиною, до кінців якої прикладена зовнішня циклічна сила. Як було показано в [1, 2], що тріщина призводить до появи нестационарності у вібраційному сигналі. Чим більша тріщина, тим більшими за величиною є вищі кореляційні компоненти ПКВП, що описує вібраційний сигнал. Тут слід нагадати, що вимушені коливання тонкої пластини з тріщиною описують за допомогою системи нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку [6]:

$$\begin{cases} X'' + 2\beta_c X' + \omega_c^2 X = f(t), & X \leq 0, \\ X'' + 2\beta_s X' + \omega_s^2 X = f(t), & X > 0, \end{cases} \quad (14)$$

де  $\beta_c = k_c/2m$ ,  $\beta_s = k_s/2m$ , де  $k_c$ ,  $k_s$  – жорсткості деталі, коли тріщина закрита та відкрита відповідно;  $\omega_c$ ,  $\omega_s$  – власні частоти коливань деталі в моменти часу, коли тріщина закрита та відкрита відповідно;  $m$  – зведена маса деталі. Як вимушуючу силу вибрано

$$f(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{100}\right) + u(t),$$

де  $u(t)$  – білий шум. У процесі моделювання вібраційних сигналів на основі системи (14) вибрано такі параметри: дисперсією білого шуму  $D_u = 1$ ,  $k_c = 0,9$ ,  $m = 10$ , крок інтегрування дорівнює 0,5, кількість кроків інтегрування –  $10^5$ . Відносна довжина тріщини змінювалася в межах від 0,05 до 0,95 з кроком 0,05.

У роботі [2] показано, що модель вібраційного сигналу від тонкої пластини з тріщиною має 3 стаціонарні компоненти і може бути подана у такій формі:

$$\xi(t) = \eta_0(t) + \sum_{k=1}^2 \eta_k^s(t) \sin(k\omega_0 t) + \eta_k^c(t) \cos(k\omega_0 t). \quad (15)$$

Компоненти кореляційної функції такої моделі, згідно з [2], можна обчислити на основі таких виразів:

$$\begin{aligned} B_0(u) &= R_{0,0}(u) + 2\left\{R_1^c(u) + R_1^s(u)\right\} \cos \omega_0 u + \\ &+ 2\left\{R_1^{sc}(u) - R_1^{cs}(u)\right\} \sin \omega_0 u + 2\left\{R_2^c(u) + R_2^s(u)\right\} \cos 2\omega_0 u + \\ &+ 2\left\{R_2^{sc}(u) - R_2^{cs}(u)\right\} \sin 2\omega_0 u, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} B_1^c(u) &= R_{1,0}^c(u) + R_{0,1}^c(u) \cos \omega_0 u - \frac{1}{2}\left\{R_{2,1}^{cs}(u) - R_{2,1}^{sc}(u)\right\} \sin \omega_0 u - \\ &- \frac{1}{2}\left\{R_{1,2}^{cs}(u) - R_{1,2}^{sc}(u)\right\} \sin 2\omega_0 u, \end{aligned} \quad (17)$$

$$B_1^s(u) = -\frac{1}{2} \left\{ R_{2,1}^{cs}(u) - R_{2,1}^{sc}(u) \right\} \cos \omega_0 u - \\ - R_{0,1}^c(u) \sin \omega_0 u - \frac{1}{2} \left\{ R_{1,2}^{cs}(u) - R_{1,2}^{sc}(u) \right\} \cos 2\omega_0 u, \quad (18)$$

де  $R_{kl}^{cs}(u) = E \bar{\eta}_k^c(t) \eta_l^s(t+u)$ ,  $\bar{\eta}_k^c(t) = \eta_k^c(t) - E \eta_k^c(t)$ ,  $\bar{\eta}_k^s(t) = \eta_k^s(t) - E \eta_k^s(t)$  відповідно. Потужності вищих компонентів кореляційної функції є незначними, тому ми не беремо їх до уваги.

Використовуючи співвідношення (4), знайдемо спектральні компоненти вібраційного сигналу моделі (15):

$$f_0(\omega) = f_{0,0}(\omega) + f_1^c(\omega + \omega_0) + f_1^c(\omega - \omega_0) + f_1^s(\omega + \omega_0) + f_1^s(\omega - \omega_0) + \\ + f_2^c(\omega + 2\omega_0) + f_2^c(\omega - 2\omega_0) + f_2^s(\omega + 2\omega_0) + f_2^s(\omega - 2\omega_0) - \\ - 2 \left[ \begin{aligned} & \text{Im}(f_1^{sc}(\omega + \omega_0)) + \text{Im}(f_1^{cs}(\omega - \omega_0)) + \text{Im}(f_2^{sc}(\omega + 2\omega_0)) + \\ & + \text{Im}(f_2^{cs}(\omega - 2\omega_0)) \end{aligned} \right], \quad (19)$$

$$f_1^c(\omega) = f_{1,0}^c(\omega) + \frac{1}{2} \left\{ f_{0,1}^c(\omega - \omega_0) + f_{0,1}^c(\omega + \omega_0) \right\} - \\ - \frac{1}{4i} \left\{ \begin{aligned} & f_{2,1}^{cs}(\omega + \omega_0) + f_{2,1}^{sc}(\omega - \omega_0) - f_{2,1}^{sc}(\omega + \omega_0) - f_{2,1}^{cs}(\omega - \omega_0) + \\ & + f_{1,2}^{sc}(\omega - 2\omega_0) - f_{1,2}^{sc}(\omega + 2\omega_0) - f_{1,2}^{cs}(\omega - 2\omega_0) + f_{1,2}^{cs}(\omega + 2\omega_0) \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

$$f_1^s(\omega) = \frac{i}{2} \left\{ f_{0,1}^c(\omega - \omega_0) + f_{0,1}^c(\omega + \omega_0) \right\} + \\ + \frac{1}{4} \left\{ \begin{aligned} & f_{2,1}^{sc}(\omega - \omega_0) + f_{2,1}^{sc}(\omega + \omega_0) - f_{2,1}^{cs}(\omega - \omega_0) - f_{2,1}^{cs}(\omega + \omega_0) + \\ & + f_{1,2}^{sc}(\omega - 2\omega_0) + f_{1,2}^{sc}(\omega + 2\omega_0) - f_{1,2}^{cs}(\omega - 2\omega_0) - f_{1,2}^{cs}(\omega + 2\omega_0) \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

Величини (19)–(21) є громіздкими для оцінювання і нелегкими для інтерпретації. Тому в роботі аналіз спектральних властивостей сигналів вібрації був проведений з використанням оцінок взаємних спектральних густин виділених стаціонарних компонент. Для оцінювання останніх був вибраний корелограмний метод Блекмана–Тюкі, згідно з яким оцінки спектральних густин мають вигляд

$$\hat{f}_{kl}^{cs}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \square} \hat{R}_{kl}^{cs}(nh) k_9(nh) e^{-i\omega nh}, \quad (22)$$

де  $\hat{R}_{kl}^{cs}(nh)$  – оцінки взаємкореляційних функцій:

$$\hat{R}_{kl}^{cs}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[ \xi_k^c(nh) - \hat{m}_k^c \right] \left[ \xi_l^s((n+j)h) - \hat{m}_l^s \right],$$

$\hat{m}_k^c$ , і  $\hat{m}_l^s$  – оцінки математичних сподівань

$$\hat{m}_l^{c,s} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \xi_l^{c,s}(nh),$$

а  $K = \frac{\theta}{h}$ ;  $h$  – крок дискретизації;  $\theta$  – довжина реалізації. Функція  $k(u)$  є так званим кореляційним вікном, що задовольняє умови:  $k(0) = 1$ ,  $k_9 - u = k(u)$ ,  $k(u) = 0$  при  $|u| > u_m$ ,  $u_m$  – точка усічення корелограма. В даній обробці було застосоване вікно Хемінга, яке має такий вигляд:

$$k(u) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi}{u_m} u, & |u| \leq u_m, \\ 0, & |u| > u_m. \end{cases}$$

Це вікно характеризується низьким рівнем бокових пелюсток, легко обчислюється. Статистичні оцінки (22) визначаються при вибраному вікні довжиною реалізації  $\theta = kh$  точкою усічення корелограми  $u_m$  та кроком дискретизації  $h$ . Ця оцінка є слушною, тобто її середньоквадратична похибка прямує до нуля при  $\theta \rightarrow \infty$ , і має задовільну роздільну здатність. Якщо спектральні густини зосереджені в певній смузі частот  $[-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$ , то для того, щоб уникнути ефекту накладання, крок дискретизації  $h$  вибирають згідно з умовою  $h < \frac{\pi}{\omega_{\max}}$ . Як показують результати обробки, взаємні спектральні властивості сигналів вібрації, що аналізуються, мають таку властивість, тому виконання умови  $h < \frac{\pi}{\omega_{\max}}$  у цьому випадку не викликає ніяких труднощів.

Графічні представлення оцінок модулів найбільш значущих взаємних спектральних функцій (19)–(21) показано на рис. 1–3.

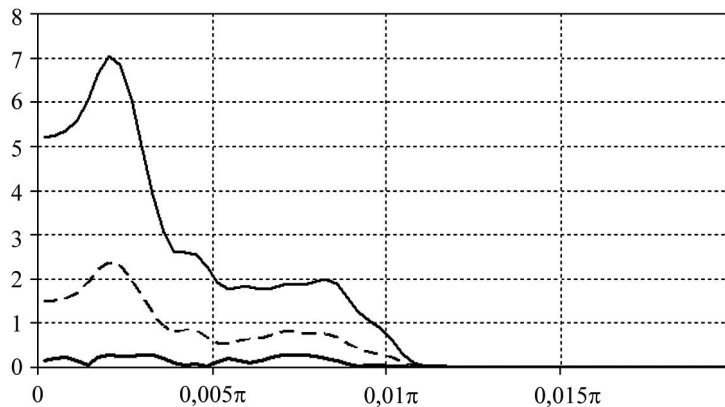


Рис. 1. Оцінки функцій взаємних спектральних густин нульового та косинусної складової першого компонентів випадкової складової вібраційного сигналу, сіра лінія відповідає відносній довжині тріщини  $\Delta/l = 0,1$ ; штрихова –  $\Delta/l = 0,5$  та чорна –  $\Delta/l = 0,7$ .

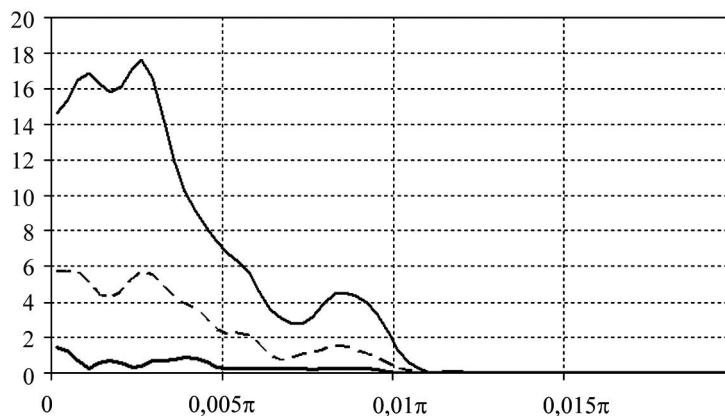


Рис. 2. Оцінки функцій взаємних спектральних густин косинусної складової першого та синусної складової другого компонентів випадкової складової вібраційного сигналу, сіра лінія відповідає відносній довжині тріщини  $\Delta/l = 0,1$ ; штрихова –  $\Delta/l = 0,5$  та чорна –  $\Delta/l = 0,7$ .



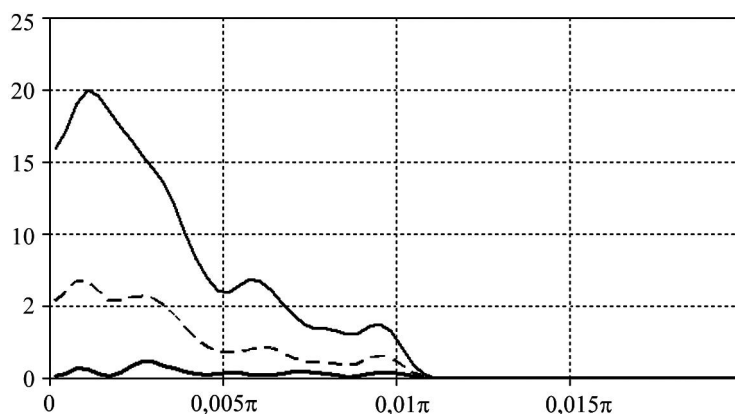


Рис. 3. Оцінки функцій взаємних спектральних густин синусної складової першого та косинусної складової другого компонентів випадкової складової вібраційного сигналу, сіра лінія відповідає відносній довжині тріщини  $\Delta/l = 0,1$ ; штрихова –  $\Delta/l = 0,5$  та чорна –  $\Delta/l = 0,7$ .

### ВИСНОВКИ

Як видно з наведених залежностей, взаємні спектральні густини, не дивлячись на дію на деталь з тріщиною білого шуму, зосереджені у вузькій смузі частот, до якої належить і частота вимушеної детермінованої складової. Ширина смуги мало змінюється з ростом довжини тріщини. Незначно також змінюється і сама форма оцінок спектральних густин. Збільшення довжини тріщини суттєво змінює самі величини модулів оцінок спектральних густин. Тому діагностичний критерій для виявлення розвитку тріщини доцільно вибирати, виходячи з саме з цих виявлених властивостей. В найпростішому випадку за діагностичні ознаки можуть бути вибрані площі під графіками модулів взаємних спектральних густин спектральних компонентів.

1. *Модель вібраційного відгуку від тіла з тріщиною* / І. Й. Мацько, І. Б. Кравець, І. М. Яворський, В. М. Заяць // Відбір і обробка інформації. – Львів. – 2009. – № 30 (106). – С. 12–22.
2. *Вплив розміру тріщини на кореляційну структуру вібраційного сигналу* / І. Й. Мацько, І. Б. Кравець, Р. М. Юзефович, І. М. Яворський // Відбір і обробка інформації. – Львів. – 2009. – № 31 (107). – С. 18–25.
3. *Драган Я. П., Рожков В. А., Яворський І. Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов.* – Л.: Гидрометеиздат, 1987. – 319 с.
4. *Яворський І. Н., Кравець І. Б., Ісаєв І. Ю. Параметрическое моделирование периодически коррелированных случайных процессов на основе их представления через стационарные случайные процессы* // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. – 2006. – **49**, № 11. – С. 33–42.
5. *Яворський І. М., Ісаєв І. Ю., Кравець І. Б. Лінійна смугова фільтрація при дослідженні структури періодично нестационарних випадкових сигналів* // Відбір і обробка інформації. – Львів. – 2006. – № 26 (101). – С. 19–25.
6. *Gelman L., Gorpnich S. Non-linear Vibroacoustical Free Oscillation Method For Crack Detection And Evaluation* // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2000. – № 14 (3) – P. 343–351.