УДК 621.391:519.22

І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець

ВИДІЛЕННЯ ДЕТЕРМІНОВАНОЇ СКЛАДОВОЇ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

The investigation results of mean least square estimate for periodically nonstationary processes – mathematical model of stochastic oscillations – are considered. The formulas for estimate statistical characteristics are analyzed. The examples of typical processes analysis are shown.

Key words: *periodically correlated random processes (PCRP), mean, correlation function, least squares estimate, bias, variance.*

Розглянуто результати досліджень оцінки найменших квадратів математичного сподівання періодично нестаціонарних випадкових процесів – математичної моделі стохастичних коливань. Проведено аналіз формул, що визначають статистичні характеристики оцінки. Наведено приклади аналізу типових процесів.

Ключові слова: *періодично корельовано випадкові процеси (ПКВП), математичне сподівання, кореляційна функція, оцінки найменших квадратів, зміщення, дисперсія.*

Періодично нестаціонарні випадкові процеси (ПНВП), описуючи як повторність, так і стохастичність часової мінливості, є математичною моделлю широкого кола фізичних явищ [1–5]. Аналіз на її основі, наприклад, сигналів вібрації дає можливість підвищити ефективність діагностики, зокрема, виявляти дефекти механізмів вже на ранніх стадіях їх розвитку [6, 7]. Математичне сподівання ПНВП $m(t)=E\xi(t)$, E – оператор усереднення за густиною імовірності, а також кореляційна функція $b(t,u)=E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u)$, $\overset{\circ}{\xi}(t)=\xi(t)-m(t)$, є періодичними функціями часу t і тому можуть бути подані у вигляді рядів Фур'є:

$$m(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k e^{ik\omega_0 t}, \quad b(t,u)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} B_k(u)\,e^{ik\omega_0 t},$$

де $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$; T – період.

Метою кореляційного статистичного аналізу є оцінювання за експериментальними даними функцій $m(t)$ і $b(t,u)$ (як функції двох змінних – часу t і зсуву u), а також їх коефіцієнтів Фур'є m_k і $B_k(u)$ (їх називають кореляційними компонентами). Для такого оцінювання може бути використаний як когерентний [8], так і компонентний [9] методи. Перший з них ґрунтується на усередненні відліків реалізації процесу через період T:

$$\hat{m}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} m(t+nT),$$

$$\hat{b}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\xi(t+nT)-\hat{m}(t+nT)\right]\left[\xi(t+u+nT)-\hat{m}(t+u+nT)\right].$$

Тут N – число періодів, що усереднюється, а другий – на використанні тригонометричної інтерполяції

$$\hat{m}(t)=\frac{1}{N}\sum_{k=-N_1}^{N_1}\hat{m}_k e^{ik\omega_0 t}\ ,\ \hat{b}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{k=-N_2}^{N_2}\hat{B}_k(u)\,e^{ik\omega_0 t}\ ,$$

при цьому

$$\hat{m}_k=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\xi(t)e^{-ik\omega_0 t}dt\ ,\ \hat{B}_k(u)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\left[\xi(t)-\hat{m}(t)\right]\left[\xi(t+u)-\hat{m}(t+u)\right]e^{-ik\omega_0 t}dt\ ,$$

а числа N_1 і N_2 визначають номери найвищих гармонічних складових математичного сподівання і кореляційної функції. Якщо $N_1\to\infty$ і $N_2\to\infty$ методи збігаються, а при скінчених N_1 і N_2 компонентний метод є ефективнішим, особливо у разі швидкого загасання кореляційних зв'язків за зсувом. Компонентні оцінки визначають через оцінки коефіцієнтів Фур'є відповідних характеристик. Очевидно, що для їх визначення може бути застосований метод найменших квадратів, який і аналізуємо у цій роботі.

Цей метод полягає у знаходженні таких значень цих величин, коли мінімальними стають середньоквадратичні відхилення:

$$F_1(\hat{m}_0,\hat{m}_1^c,\ldots,\hat{m}_{N_1}^c,\hat{m}_1^s,\ldots,\hat{m}_{N_2}^s)=\int_0^{\theta}\left[\xi(t)-\hat{m}(t)\right]^2dt\ ,$$

$$F_2\left[\hat{B}_0(u),\hat{B}_1^c(u),\ldots,\hat{B}_{N_1}^c(u),\hat{B}_1^s(u),\ldots,\hat{B}_{N_2}^s(u)\right]=\int_0^{\theta}\left[\eta(t,u)-\hat{b}(t,u)\right]^2dt\ , \qquad (1)$$

при цьому

$$\eta(t,u)=\left[\xi(t)-\hat{m}(t)\right]\left[\xi(t+u)-\hat{m}(t+u)\right],$$

$$\hat{m}(t)=\hat{m}_0+\sum_{k=1}^{N_1}\left(\hat{m}_k^c\cos k\omega_0 t+\hat{m}_k^s\sin k\omega_0 t\right), \qquad (2)$$

$$\hat{b}(t,u)=\hat{B}_0(u)+\sum_{k=1}^{N_2}\left[\hat{B}_k^c(u)\cos k\omega_0 t+\hat{B}_k^s(u)\sin k\omega_0 t\right]. \qquad (3)$$

Оскільки квадратичні форми, побудовані на основі других частинних похідних функціоналів F_1 і F_2, є додатньо визначеними, то точки екстремумів, які знаходяться як розв'язки систем лінійних рівнянь

$$\frac{\partial F_1}{\partial\hat{m}_0}=0\ ,\ \frac{\partial F_1}{\partial\hat{m}_k^c}=0\ ,\ \frac{\partial F_1}{\partial\hat{m}_k^s}=0\ ,\ k=\overline{1,N_1}\ , \qquad (4)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial\hat{B}_0(u)}=0\ ,\ \frac{\partial F_2}{\partial\hat{B}_2^{\tilde{n}}(u)}=0\ ,\ \frac{\partial F_2}{\partial\hat{B}_2^s(u)}=0\ ,\ l=\overline{1,N_2}\ , \qquad (5)$$

є точками мінімумів. Після обчислення похідних система рівнянь (4) набуває такого вигляду:

$$\hat{m}_0+\sum_{k=1}^{N_1}\left(\hat{m}_k^c c_{0k}+\hat{m}_k^s a_{0k}\right)=\bar{m}_0\ ,$$

$$\hat{m}_0 c_{l0}+\sum_{k=1}^{N_1}\left(\hat{m}_k^c c_{lk}+\hat{m}_k^s a_{lk}\right)=\bar{m}_l\ , \qquad (6)$$

$$\hat{m}_0 a_{0l}+\sum_{k=1}^{N_1}\left(\hat{m}_k^c a_{kl}+\hat{m}_k^s s_{lk}\right)=\bar{m}_{l+N_1}\ ,\ l=\overline{1,N_1}\ ,$$

де

$$c_{lk}=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \cos l\omega_0 t\cos k\omega_0 t\,dt\ ,\ s_{lk}=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \sin l\omega_0 t\sin k\omega_0 t\,dt\ ,\ a_{lk}=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \cos k\omega_0 t\sin l\omega_0 t dt\ ,$$

а також

$$\bar m_0=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \xi(t)\,dt\ ,\ \bar m_l=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \xi(t)\cos l\omega_0 t dt\ ,\ \bar m_{l+N_1}=\int_0^\theta \xi(t)\sin l\omega_0 t dt\ . \tag{7}$$

Введемо в розгляд матриці

$$\mathsf{M}=\begin{bmatrix} 1 & c_{01} & \cdots & c_{0N_1} & a_{01} & \cdots & a_{0N_1}\\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1N_1} & a_{11} & \cdots & a_{1N_1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{N_10} & c_{N_11} & \cdots & c_{N_1N_1} & a_{N_11} & \cdots & a_{N_1N_1}\\ a_{01} & a_{11} & \cdots & a_{N_11} & s_{11} & \cdots & s_{1N_1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{0N_1} & a_{1N_1} & \cdots & a_{N_1N_1} & s_{N_11} & \cdots & s_{N_1N_1}\end{bmatrix},\ \hat{\mathsf{m}}=\begin{bmatrix}\hat m_0\\ \hat m_1^c\\ \vdots\\ \hat m_{N_1}^c\\ \hat m_1^s\\ \vdots\\ \hat m_{N_1}^s\end{bmatrix},\ \bar{\mathsf{m}}=\begin{bmatrix}\bar m_0\\ \bar m_1\\ \vdots\\ \bar m_{N_1}\\ \bar m_{N_1+1}\\ \vdots\\ \bar m_{2N_1}\end{bmatrix}.$$

Систему лінійних рівнянь (6) тоді можна переписати у формі матричного рівняння:

$$\mathsf{M}\hat{\mathsf{m}}=\bar{\mathsf{m}}\ . \tag{8}$$

Його розв'язок й визначає оцінки компонентів

$$\hat{\mathsf{m}}=\mathsf{M}^{-1}\bar{\mathsf{m}}\ .$$

Якщо $\theta=NT$, то $c_{lk}=s_{lk}=a_{lk}=0$, $k\neq 1$, а $c_{kk}=s_{kk}=\frac{1}{2}$, $a_{kk}=0$. Такими ж будуть і граничні значення цих величин, якщо $\theta\to\infty$. Тоді матриця M стає діагональною, і оцінки компонентів визначаються формулами

$$\hat m_0=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \xi(t)\,dt\ ,\quad \hat m_l^c=\frac{2}{\theta}\int_0^\theta \xi(t)\cos l\omega_0 t dt\ ,\quad \hat m_l^s=\frac{2}{\theta}\int_0^\theta \xi(t)\sin l\omega_0 t dt\ ,$$

тобто збігаються з компонентними [9].

Оскільки обернена матриця $\mathsf{M}^{-1}=\frac{[A_{ik}]^T}{|\mathsf{M}|}$, де $[A_{ik}]^T$ – транспонована матриця алгебраїчних доповнень елементів m_{ik} матриці M, а $|\mathsf{M}|$ – її визначник, то

$$\hat m_k=\frac{1}{|\mathsf{M}|}\sum_{l=0}^{2N_1}\bar m_l A_{l+1,k+1}\ . \tag{9}$$

Математичне сподівання оцінки (9) дорівнює

$$E\hat m_k=\frac{1}{|\mathsf{M}|}\sum_{l=0}^{2N_1}E\bar m_l A_{l+1,k+1}\ .$$

Для величини $\hat m_0$, зокрема, знаходимо

$$E\hat m_0=\frac{1}{|\mathsf{M}|}\left[E\bar m_0 A_{11}+\sum_{l=1}^{2N_1}E\bar m_l A_{l+1,1}\right]=\frac{1}{|\mathsf{M}|}\left[m_0\left[A_{11}+\sum_{l=1}^{N_1}\left(c_{l0}A_{l+1,1}+a_{0l}A_{l+N_1+1,1}\right)\right]\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{N_1}\left[m_k^c\left[c_{0k}A_{11}+\sum_{l=1}^{N_1}(c_{lk}A_{l+1,1}+a_{kl}A_{l+N_1+1,1})\right]+\right.$$

$$\left.\left.+m_k^s\left[a_{0k}A_{11}+\sum_{l=1}^{N_1}(a_{lk}A_{l+1,1}+s_{lk}A_{l+N_1+1,1})\right]\right]\right].$$

Множник при m_0 є визначником матриці M, а множники при m_k^c і m_k^s є сумою добутків елементів k-ого стовпця цієї матриці $(k\neq 1)$ на алгебраїчні доповнення, які відповідають елементам l-ого стовпця. Ці суми є визначниками з однаковими стовпцями, тому дорівнюють нулю. Отже, оцінка $\hat{m}_0$, яку отримують під час розв'язання (8), є незміщеною: $E\hat{m}_0=m_0$.

Для косинусних і синусних компонентів аналогічно знаходимо:

$$E\hat{m}_k^c=\frac{1}{|\mathrm{M}|}\left[E\overline{m}_0A_{1,K+1}+\sum_{l=1}^{2N_1}E\overline{m}_lA_{l+1,K+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{|\mathrm{M}|}\left[m_0\left[A_{1,K+1}+\sum_{l=1}^{N_1}\left(c_{l0}A_{l+1,K+1}+a_{0l}A_{l+N_1+1,K+1}\right)\right]+\right.$$

$$+\sum_{r=1}^{N_1}\left[m_r^c\left[c_{0r}A_{1,K+1}+\sum_{l=1}^{N_1}\left(c_{lr}A_{l+1,K+1}+a_{rl}A_{l+N_1+1,K+1}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\left.+m_r^s\left[a_{0r}A_{1,K+1}+\sum_{l=1}^{N_1}\left(a_{lr}A_{l+1,K+1}+s_{lr}A_{l+N_1+1,K+1}\right)\right]\right]\right].$$

$$E\hat{m}_k^s=\frac{1}{|\mathrm{M}|}\left[E\overline{m}_0A_{1,K+N_1+1}+\sum_{l=0}^{N_1}E\overline{m}_lA_{l+1,K+N_1+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{|\mathrm{M}|}\left[m_0\left[A_{1,K+N_1+1}+\sum_{l=1}^{N_1}\left(c_{l0}A_{l+1,K+N_1+1}+a_{0l}A_{l+N_1+1,K+N_1+1}\right)\right]+\right.$$

$$+\sum_{r=1}^{N_1}\left[m_r^c\left[c_{0r}A_{1,K+N_1+1}+\sum_{l=1}^{N_1}\left(c_{lr}A_{l+1,K+N_1+1}+a_{rl}A_{l+N_1+1,K+N_1+1}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\left.+m_r^s\left[a_{0r}A_{1,K+N_1+1}+\sum_{l=1}^{N_1}\left(a_{lr}A_{l+1,K+N_1+1}+s_{lr}A_{l+N_1+1,K+N_1+1}\right)\right]\right]\right].$$

Враховуючи, як і вище, співвідношення

$$\sum_{j=1}^{2N_1+1}m_{jk}A_{jl}=\begin{cases}|\mathrm{M}|, & k=l,\\ 0, & k\neq l,\end{cases}$$

доходимо висновку, що оцінки найменших квадратів компонентів m_k^c і m_k^s для довільних θ є незміщеними: $E\hat{m}_k^c=m_k^c$, $E\hat{m}_k^s=m_k^s$. З незміщеності оцінок $\hat{m}_0$, $\hat{m}_k^c$ і $\hat{m}_k^s$ випливає незміщеність оцінки математичного сподівання (2).

Для знаходження дисперсії цієї статистики, враховуючи (9), подамо її у вигляді

$$\hat{m}(t)=\frac{1}{|\mathrm{M}|}\sum_{l=0}^{2N_1}\overline{m}_l f_l(t),$$

де

$$f_l(t) = A_{l+1,1} + \sum_{k=1}^{N_1} \left(A_{l+1,K+1} \cos k\omega_0 t + A_{l+1,K+N_1+1} \sin k\omega_0 t \right) = \sum_{k=-N_1}^{N_1} C_{lk} e^{ik\omega_0 t} ,$$

при цьому

$$C_{l0} = A_{l+1,1} , \; C_{lk} = \frac{1}{2}\left(A_{l+1,K+1} - iA_{l+1,K+N_1+1} \right), \; C_{l,-k} = \overline{C}_{lk}^{*} .$$

Тут “ $^{-}$ ” – знак спряження. Тоді

$$D[\hat{m}(t)] = E\left[m(t) - \hat{m}(t) \right]^2 = \frac{1}{|\mathrm{M}|^2} \sum_{l,r=0}^{2N_1} R_{\overline{m}_l \overline{m}_r} f_l(t) f_r(t) ,$$

де $R_{\overline{m}_l \overline{m}_r}$ – кореляції між випадковими величинами $\overline{m}_l$ і $\overline{m}_r$: $R_{\overline{m}_l \overline{m}_r} = E(\overline{m}_l - E\overline{m}_l)\times$ $\times(\overline{m}_r - E\overline{m}_r)$. Якщо $l = r$, це будуть їх дисперсії: $R_{\overline{m}_l \overline{m}_l} = D_{\overline{m}_l}$. Оскільки

$$f_l(t) f_r(t) = \sum_{n=-2N_1}^{2N_1} \lambda_{lr}^{(n)} e^{in\omega_0 t} ,$$

де

$$\lambda_{lr}^{(n)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=-N_1-n}^{N_1} C_{l,m+n} C_{rm}^{*}, & n \le 0, \\ \sum\limits_{m=-N_1}^{N_1-n} C_{l,m+n} C_{rm}^{*}, & n > 0, \end{cases}$$

то

$$D[\hat{m}(t)] = \sum_{n=-2N_1}^{2N_1} \gamma_n e^{in\omega_0 t} .$$

Коефіцієнти отриманого ряду визначають формулою

$$\gamma_n = \sum_{l,r=0}^{2N_1} \lambda_{lr}^{(\ddot{\imath})} R_{\overline{m}_l \overline{m}_r} .$$

Виходячи із співвідношень (7), знаходимо

$$R_{\overline{m}_l \overline{m}_r} = \frac{1}{\theta^2} \int_0^{\theta}\int_0^{\theta} b(t, s-t) \begin{Bmatrix} \cos l\omega_0 t & \cos r\omega_0 s \\ \sin l\omega_0 t & \sin r\omega_0 s \end{Bmatrix} dtds .$$

Ці величини прямують до нуля, якщо $\theta \to \infty$ і виконується гранична рівність

$$\lim_{|u|\to\infty} b(t,u) = 0 . \qquad (10)$$

Остання є достатньою умовою слушності оцінки найменших квадратів математичного сподівання ПКВП.

Конкретизуємо отримані вище результати для окремих випадків ПКВП. Розглянемо спочатку мультиплікативну модель $\xi(t) = \eta(t)\cos\omega_0 t$, при цьому $E\eta(t) = m$, $E\,\overset{\circ}{\eta}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u) = R_\eta(u)$. Функціонал (1) в цьому випадку набуває такого вигляду:

$$F(\hat{m}) = \int_0^{\theta} \left[\xi(t) - \hat{m}\cos\omega_0 t \right]^2 dt .$$

Ця величина є мінімальною, якщо

$$\hat{m} = 2\left[\theta\left(1+\frac{\sin 2\omega_0\theta}{2\omega_0\theta}\right)\right]^{-1}\int_0^\theta \xi(t)\cos\omega_0 t dt .$$

Видно, що ця оцінка є незміщеною:

$$E\hat{m} = \frac{2}{\theta\left(1+\frac{\sin 2\omega_0\theta}{2\omega_0\theta}\right)}\int_0^\theta m\cos^2\omega_0 t dt = m .$$

Тому незміщеною також є оцінка математичного сподівання

$$\hat{m}(t) = \left[2\left[\theta\left(1+\frac{\sin 2\omega_0\theta}{2\omega_0\theta}\right)\right]^{-1}\int_0^\theta \xi(s)\cos\omega_0 s ds\right]\cos\omega_0 t .$$

Її дисперсія дорівнює:

$$D[\hat{m}(t)] = 4\left[\theta\left(1+\frac{\sin 2\omega_0\theta}{2\omega_0\theta}\right)\right]^{-2}\left[\int_0^\theta\int_0^\theta b(t, s-t)\cos\omega_0 t\cos\omega_0 s dt ds\right]\cos^2\omega_0 t .$$

У той же час компонентна оцінка

$$\hat{m}(t) = \left[\frac{2}{\theta}\int_0^\theta \xi(s)\cos\omega_0 s ds\right]\cos\omega_0 t$$

має зміщення $\varepsilon[\hat{m}(t)] = E\hat{m}(t) - m(t)$:

$$\varepsilon[\hat{m}(t)] = m\frac{\sin 2\omega_0\theta}{2\omega_0\theta}\cos\omega_0 t ,$$

а її дисперсія

$$D[\hat{m}(t)] = \frac{1}{\theta^2}\left[\int_0^\theta\int_0^\theta b(t, s-t)\cos\omega_0 t\cos\omega_0 s dt ds\right]\cos^2\omega_0 t .$$

Зміщення компонентної оцінки буде нульовим, якщо $\theta = NT$, а також при $\theta\to\infty$. У цих випадках збігаються й дисперсії оцінок. Якщо $\theta \neq NT$, то дисперсія оцінки найменших квадратів залежно від знаку $\sin 2\omega_0\theta$ буде більшою або меншою від дисперсії компонентної оцінки. Якщо $2\omega_0\theta \gg 1$, то ці величини відрізняються незначно. Довжина відрізка реалізації, що обробляється, тоді містить значне число періодів корельованості.

Розглянемо тепер випадок, коли $\xi(t) = \xi_c(t)\cos\omega_0 t + \xi_s(t)\sin\omega_0 t$. Оцінки $\hat{m}_c$ і $\hat{m}_s$ знаходять як точки мінімуму функціоналу

$$\hat{F}(\hat{m}_c, \hat{m}_s) = \int_0^\theta \left(\xi(t) - \hat{m}_c(t)\cos\omega_0 t - \hat{m}_s(t)\sin\omega_0 t\right)^2 dt ,$$

вони і є розв’язками системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases}\hat{m}_c c_{11} + \hat{m}_s a_{11} = \overline{m}_1,\\ \hat{m}_c a_{11} + \hat{m}_s s_{11} = \overline{m}_2,\end{cases}$$

де

$$\bar{m}_1 = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \xi(t)\cos\omega_0 t dt\,,\;\; \bar{m}_2 = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \xi(t)\sin\omega_0 t dt\,,$$

тобто

$$\hat{m}_c = \frac{1}{|\mathrm{M}|}(\bar{m}_1 s_{11} - \bar{m}_2 a_{11})\,,\;\; \hat{m}_s = \frac{1}{|\mathrm{M}|}(\bar{m}_2 c_{11} - \bar{m}_1 a_{11})\,,\;\; |\mathrm{M}| = c_{11}s_{11} - a_{11}^2\,.$$

Легко переконатися, що ці оцінки є незміщеними для довільних θ:

$$E\hat{m}_c = \frac{1}{|\mathrm{M}|}\left[\frac{c_{11}}{\theta}\int_0^\theta \left(m_c(t)\cos\omega_0 t + m_s(t)\sin\omega_0 t\right)\cos\omega_0 t dt - \right.$$

$$\left. - \frac{a_{11}}{\theta}\int_0^\theta \left(m_c(t)\cos\omega_0 t + m_s(t)\sin\omega_0 t\right)\sin\omega_0 t dt\right] = \frac{m_c}{|\mathrm{M}|}\left(c_{11}s_{11} - a_{11}^2\right) = m_c\,.$$

$$E\hat{m}_s = \frac{1}{|\mathrm{M}|}\left[\frac{c_{11}}{\theta}\int_0^\theta \left(m_c(t)\cos\omega_0 t + m_s(t)\sin\omega_0 t\right)\sin\omega_0 t dt - \right.$$

$$\left. - \frac{a_{11}}{\theta}\int_0^\theta \left(m_c(t)\cos\omega_0 t + m_s(t)\sin\omega_0 t\right)\cos\omega_0 t dt\right] = \frac{m_s}{|\mathrm{M}|}\left(c_{11}s_{11} - a_{11}^2\right) = m_s\,.$$

Оцінку математичного сподівання подамо у вигляді

$$\hat{m}(t) = \sum_{l=0}^{2} \bar{m}_l f_l(t)\,, \tag{11}$$

де

$$f_l(t) = A_{l1}\cos\omega_0 t + A_{l2}\sin\omega_0 t = \sum_{k=-1}^{1} C_{lk} e^{ik\omega_0 t}\,.$$

Очевидно, що

$$A_{11} = s_{11}\,,\; A_{12} = -a_{11}\,,\; A_{21} = -a_{11}\,,\; A_{22} = c_{11}\,.$$

Дисперсія оцінки (11) дорівнює

$$D[\hat{m}(t)] = \gamma_0 + \gamma_2 e^{i2\omega_0 t} + \gamma_{-2} e^{-i2\omega_0 t} = \gamma_0 + \gamma_2^c \cos 2\omega_0 t + \gamma_2^s \sin 2\omega_0 t\,, \tag{12}$$

при цьому

$$\gamma_0 = \frac{1}{|\mathrm{M}|^2}\left(\lambda_{11}^{(0)} D_{\bar{m}_1} + 2\lambda_{21}^{(0)} R_{\bar{m}_1\bar{m}_2} + \lambda_{22}^{(0)} D_{\bar{m}_2}\right),$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{|\mathrm{M}|^2}\left(\lambda_{11}^{(2)} D_{\bar{m}_1} + 2\lambda_{21}^{(2)} R_{\bar{m}_1\bar{m}_2} + \lambda_{22}^{(2)} D_{\bar{m}_2}\right),\;\; \gamma_2^c = 2\,\mathrm{Re}\,\gamma_2\,,\;\; \gamma_2^s = 2\,\mathrm{Im}\,\gamma_2\,.$$

Для коефіцієнтів $\lambda_{11}^{(n)}$, $\lambda_{12}^{(n)}$, $\lambda_{22}^{(n)}$ відповідно знаходимо

$$\lambda_{11}^{(0)} = c_{1,-1}c_{11} + c_{11}c_{1,-1} = 2\,\mathrm{Re}\left\{c_{1,-1}c_{11}\right\} = \frac{1}{2}\left(s_{11}^2 + a_{11}^2\right),$$

$$\lambda_{21}^{(0)} = c_{2,-1}c_{11} + c_{21}c_{1,-1} = 2\,\mathrm{Re}\left\{c_{2,-1}c_{11}\right\} = -\frac{1}{2}a_{11}(c_{11} + s_{11})\,,$$

$$\lambda_{22}^{(0)} = c_{2,-1}c_{21} + c_{21}c_{2,-1} = 2\,\mathrm{Re}\left\{c_{2,-1}c_{21}\right\} = \frac{1}{2}\left(s_{11}^2 + a_{11}^2\right),$$

$$\lambda_{11}^{(2)} = c_{11}^2 = \frac{1}{4}\left(s_{11}^2 - a_{11}^2 + 2ia_{11}s_{11}\right),$$

$$\lambda_{21}^{(2)} = c_{21}c_{11} = \frac{1}{4}\left[a_{11}\left(c_{11} - s_{11}\right) - i\left(a_{11}^2 + c_{11}s_{11}\right)\right],$$

$$\lambda_{22}^{(2)} = c_{2,-1}^2 = \frac{1}{4}\left(a_{11}^2 - s_{11}^2 + 2ia_{11}s_{11}\right).$$

Отже,

$$\gamma_0 = \frac{1}{2|\mathsf{M}|^2}\left[\left(a_{11}^2 + s_{11}^2\right)D_{\overline{m}_1} - 2a_{11}\left(c_{11} + s_{11}\right)R_{\overline{m}_1\overline{m}_2} + \left(a_{11}^2 + c_{11}^2\right)D_{\overline{m}_2}\right], \qquad (13)$$

$$\gamma_2^c = \frac{1}{2|\mathsf{M}|^2}\left[\left(s_{11}^2 - a_{11}^2\right)D_{\overline{m}_1} + 2a_{11}\left(c_{11} - s_{11}\right)R_{\overline{m}_1\overline{m}_2} + \left(a_{11}^2 - c_{11}^2\right)D_{\overline{m}_2}\right], \qquad (14)$$

$$\gamma_2^s = -\frac{1}{|\mathsf{M}|^2}\left[a_{11}s_{11}D_{\overline{m}_1} - \left(a_{11}^2 + c_{11}s_{11}\right)R_{\overline{m}_1\overline{m}_2} + a_{11}c_{11}D_{\overline{m}_2}\right]. \qquad (15)$$

Знайдемо тепер статистичні характеристики компонентної оцінки

$$\hat{m}(t) = \left[\frac{2}{\theta}\int_0^\theta \xi(s)\cos\omega_0 s ds\right]\cos\omega_0 t + \left[\frac{2}{\theta}\int_0^\theta \xi(s)\sin\omega_0 s ds\right]\sin\omega_0 t. \qquad (16)$$

Її математичне сподівання дорівнює:

$$E\hat{m}(t) = 2(m_c c_{11} + m_s a_{11})\cos\omega_0 t + 2(m_c a_{11} + m_s s_{11})\sin\omega_0 t =$$

$$= \left[m_c\left(1 + \frac{\sin 2\omega_0\theta}{2\omega_0\theta}\right) + \frac{m_s}{2\omega_0\theta}(1 - \cos 2\omega_0\theta)\right]\cos\omega_0 t +$$

$$+ \left[\frac{m_c}{2\omega_0\theta}(1 - \cos 2\omega_0\theta) + m_c\left(1 - \frac{\sin 2\omega_0\theta}{2\omega_0\theta}\right)\right]\sin\omega_0 t.$$

При скінченних $\theta \neq NT$ оцінка є зміщеною. Якщо $\theta \to \infty$, то $E\hat{m}(t) \to m(t)$.

Дисперсія компонентної оцінки (16) також має вигляд (12), але тепер

$$\gamma_0 = 2(D_{\overline{m}_1} + D_{\overline{m}_2}),\ \gamma_2^c = 2(D_{\overline{m}_1} - D_{\overline{m}_2}),\ \gamma_2^s = 4R_{\overline{m}_1\overline{m}_2}. \qquad (17)$$

Дисперсії випадкових величин $\overline{m}_1$ і $\overline{m}_2$ та їх кореляція визначаються співвідношеннями:

$$D_{\overline{m}_1} = \frac{1}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^\theta b(t, s-t)\cos\omega_0 t\cos\omega_0 s dtds,$$

$$D_{\overline{m}_2} = \frac{1}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^\theta b(t, s-t)\sin\omega_0 t\sin\omega_0 s dtds,$$

$$R_{\overline{m}_1\overline{m}_2} = \frac{1}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^\theta b(t, s-t)\cos\omega_0 t\sin\omega_0 s dtds.$$

Після перетворень ці вирази переписуються у вигляді

$$D_{\overline{m}_1} = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^{\theta-u} b(t,u)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+u)dtdu =$$
$$= \frac{1}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^{\theta-u} b(t,u)\left[\cos\omega_0 u + \cos\omega_0(2t+u)\right]dtdu, \qquad (18)$$

$$D_{\overline{m}_2}=\frac{2}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta-u}b(t,u)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+u)\,dtdu=$$
$$=\frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta-u}b(t,u)\left[\cos\omega_0 u-\cos\omega_0(2t+u)\right]dtdu\ , \quad (19)$$

$$R_{\overline{m}_1\overline{m}_2}=\frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta-u}b(t,u)\sin\omega_0(2t+u)\,dtdu\ . \quad (20)$$

Враховуючи подання [9]

$$b(t,u)=B_0(u)+B_2^c(u)\cos 2\omega_0 t+B_2^s(u)\sin 2\omega_0 t$$

та інтегруючи по t для першої складової формул (18) і (19), отримуємо

$$\frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta-u}b(t,u)\cos\omega_0 u\,dtdu=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\left(1-\frac{u}{\theta}\right)B_0(u)\cos\omega_0 u\,du+$$
$$+\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\left[B_2^c(u)f_2^c(0,\theta-u)+B_2^s(u)f_2^s(0,\theta-u)\right]\cos\omega_0 u\,du, \quad (21)$$

при цьому

$$f_k^{c,s}(0,\theta-u)=\frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta-u}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{\omega_0 u\}\,du\ .$$

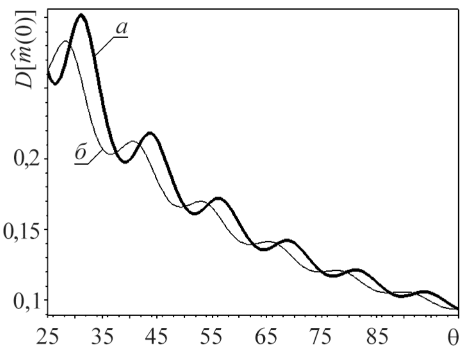
Друга складова

$$\frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta-u}b(t,u)\cos\omega_0(2t+u)\,dtdu=$$
$$=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\left[B_0(u)\left[\cos\omega_0 u f_2^c(0,\theta-u)-\sin\omega_0 u f_2^s(0,\theta-u)\right]du+\right.$$
$$+\frac{1}{2\theta}\int_0^{\theta}\left[\left(1-\frac{u}{\theta}\right)\left[B_2^c(u)\cos\omega_0 u-B_2^s(u)\sin\omega_0 u\right]+\right. \quad (22)$$
$$+\left[B_2^c(u)\cos\omega_0 u+B_2^s(u)\sin\omega_0 u\right]f_4^c(0,\theta-u)+$$
$$\left.+\left[B_2^s(u)\cos\omega_0 u-B_2^c(u)\sin\omega_0 u\right]f_4^s(0,\theta-u)\right]du\ .$$

Аналогічні перетворення співвідношення (20) приводять до

$$R_{\overline{m}_1\overline{m}_2}=\frac{1}{2\theta}\int_0^{\theta}\left[\left(1-\frac{u}{\theta}\right)\left[B_2^c(u)\sin\omega_0 u+B_2^s(u)\cos\omega_0 u\right]+\right.$$
$$+2B_0(u)\left[\cos\omega_0 u\cdot f_2^s(0,\theta-u)+\sin\omega_0 u\cdot f_2^c(0,\theta-u)\right]+ \quad (23)$$
$$+\left[B_2^c(u)\cos\omega_0 u+B_2^s(u)\sin\omega_0 u\right]f_4^s(0,\theta-u)+$$
$$\left.+\left[B_2^c(u)\sin\omega_0 u-B_2^s(u)\cos\omega_0 u\right]f_4^c(0,\theta-u)\right]du\ .$$

Підставляючи (21)–(23) до виразів (18)–(19), (13)–(15) і (12), отримуємо залежності дисперсій оцінки найменших квадратів і компонентної оцінки математичного сподівання від кореляційних компонентів сигналу і довжин відрізка реалізації, що обробляється. На основі цих залежностей для заданих апроксимацій кореляційних компонентів можуть бути обчислені конкретні числові значення дисперсій і виконано їх порівняльний аналіз (див. рисунок).



Дисперсії оцінки найменших квадратів (*а*) і компонентної оцінки (*б*) математичного сподівання в залежності від довжини відрізка реалізації θ (D_c = 0,5; D_s = 0,5; D_{cs} = 0,2; α_c = 0,1; α_s = 0,1; α_{cs} = 0,1; T = 25).

Отже, оцінка математичного сподівання, яку отримано за допомогою методу найменших квадратів, на відміну від компонентної оцінки, є незміщеною для довільних довжин відрізка реалізації θ. Це означає, що в цьому випадку відсутній ефект просочування. Дисперсія оцінки найменших квадратів залежно від довжини θ і типу сигналу може бути як більшою, так і меншою від дисперсії компонентної. Конкретні її значення можуть бути обчисленні на основі виведених у статті формул для заданих апроксимаційних виразів кореляційних компонентів сигналу.

Наведені властивості оцінки найменших квадратів є особливо важливими при обробці реалізації, довжина яких містить мале число періодів сигналу. Статистичні характеристики оцінок збігаються, якщо $\theta \to \infty$. Зауважимо, що подібні властивості має оцінка кореляційної функції (3) у випадку, коли оцінка кореляційних компонентів знаходять як розв'язки системи лінійних рівнянь (5).

1. *Драган Я. П., Яворский И. Н.* Ритмика морского волнения и подводные акустические сигналы. – К.: Наук. думка, 1982. – 246 с.
2. *Драган Я. П., Рожков В. А., Яворский И. Н.* Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1987. – 319 с.
3. *Cyclostationarity* in Communications and Signal Processing // Ed. W. A. Gardner. – N. Y.: IEEE Press, 1994. – 504 p.
4. *Gardner W. A., Napolitano A., Paura L.* Cyclostationarity: Half a Century of Research // Signal Processing. – 2006. – № 86. – P. 639–697.
5. *Hurd H. L. and Miamee A.* Periodically Correlated Random Sequences: Spectral Theory and Practice. – New Jersey: A John Wiley & Sons, 2007. – 353 p.
6. *Методи* та нові технічні засоби вібродіагностики підшипникових вузлів та зубчастих передач / І. М. Яворський, О. П. Драбич, П. П. Драбич, та ін. // Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин. – К.: Ін-т електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України. – 2006. – С. 52–56.
7. *Розробка* інформаційно-вимірювальної системи для вібродіагностики підшипників великих стаціонарних агрегатів / І. М. Яворський, П. П. Драбич, І. Ю. Ісаєв та ін. // Там же. – 2009. – С. 113–122.
8. *Coherent* covariance analysis of periodically correlated random process / I. Javors'kyj, I. Isayev, Z. Zakrzewski, S. P. Brooks // Signal Processing. – 2007. – № 87. – P. 13–32.
9. *Component* covariance analysis for periodically correlated random process / I. Javorskyj, I. Isayev, J. Majewski, R. Yuzefovych // Signal Processing. – 2010. – № 90. – P. 1083–1102.

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів
Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща

Одержано 10.03.2010