КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК, А.А. СИРКУ, С.-Б. СУЛЕЙМАНОВ

ТЕОРІЯ ОРГАНІЗАЦІЇ КОНКУРСІВ

Людське суспільство розвивалося через різноманітні взаємодії, де природний відбір доповнювався соціальними конкурсами. Оскільки в сучасному суспільстві роль конкурсів постійно зростає, то також зростає відповідальність рішень людиною.

Вступ. Конкурс – це гра, де його учасники (конкурсанти) докладають витратних і безповоротних зусиль, щоб дістати приз(и) з ненульовою ймовірністю [1]. Політичні партії прагнуть перемогти на виборах, витрачаючи ресурси на політичні кампанії. Позивач і відповідач намагаються виграти справу, покриваючи витрати на своїх юристів [2]. Армії планують військові операції, купуючи озброєння і наймаючи своїх солдатів [3]. Лобісти стараються переконати осіб, які приймають рішення, готуючи гучні промови [4]. Студенти конкурують за стипендії, не шкодуючи часу на навчання [5]. Спортсмени змагаються, щоб перемогти чи перевершити світовий рекорд, невпинно тренуючись. Претенденти на робоче місце пробують отримати роботу, повністю розкриваючи свої можливості на атестації. Аналогічні процеси відбуваються під час телевізійних вікторин, громадських закупівель, конкурсів у наукових дослідженнях і розробках тощо [6]. Фактично конкурс – це механізм розміщення на рівноправних засадах [7–9], який має централізована влада чи децентралізований ринок. Спочатку досліджувалися такі конкурси, як гонитва за рентою та лобізм. Серед конкурсів виділяють: а) конкурси, які стають природним чином для розв’язання конфлікту чи спору (політичні кампанії, судові справи, війни, просування); б) конкурси, які плануються й організовуються певним розробником для досягнення деякої цілі (стипендії, спортивні події, атестації, телевізійної чи мережевої вікторини, громадські закупівлі, гранти на наукові дослідження і розробки) [10].

У категорії б) розробник може планувати конкурс заздалегідь, обираючи, скажімо, число учасників. При формалізації конкурсу виділяють ряд елементів: 1) число (number) конкурсантів (агентів) $N = \{1, \dots, n\}$; 2) зусилля $G_i \in R_+$ конкурсанта i (ці зусилля можуть бути багатовимірними); 3) приз із цінністю (value) V_i для конкурсанта i (ця цінність може бути нефіксованою, а її гетерогенність може визначатися гетерогенністю граничних витрат (класів) конкурсантів); 4) відображення $p_i(G_1, \dots, G_n)$ зусиль усіх конкурсантів у ймовірність (probability) отримання призу (частку загального призу) для конкурсанта i, яке називається функцією успіху конкурсу (contest success function, CSF); 5) ставлення конкурсантів до ризику, яке вважатимемо нейтральним (загалом конкурсанти є несхильними до ризику); 6) функція витрат на зусилля, яку вважатимемо лінійною з незворотними граничними витратами, рівними 1 (витрати можуть частково відшкодовуватися переможцю).

Якщо $G_i \neq 0 \ \forall \ i$, то конкурс називають платним для всіх учасників (all-pay contest). Якщо $G_i \neq 0$ лише для переможця конкурсу, то конкурс називають платним для переможця (winner-pay contest).

Конкурс можна виразити грою у нормальній формі, де гравець i – це конкурсант, його стратегія – це його витрати, його виграш – це сподівана корисність

$$\Pi_i = p_i(G_1, \dots, G_n)V_i - G_i.$$

Для таких ігор відоме поняття $(G_1^*, \dots, G_i^*, \dots, G_n^*)$ рівноваги Неша (Нобелівського лауреата 1994 р.), який узагальнив ідею Курно про те, що рівновагою є ситуація, яку невигідно змінювати самостійно будь-якому конкурсанту i (без союзників):

$$\Pi_i \ (G_1^*, \dots, G_i^*, \dots, G_n^*) \geq \Pi_i \ (G_1^*, \dots, G_{i-1}^*, G_i, G_{i+1}^*, \dots, G_n^*) \ \ \forall \ G_i \in R_+, \ \forall \ \ i \in N.$$

Є альтернативне поняття, що враховує обмежену раціональність конкурсантів.

Виділяють кілька основних типів CSF із застосуваннями до економетричних моделей. У платному для всіх учасників конкурсі чи аукціоні (all-pay-auction, APA) конкурсант, який докладає найбільших зусиль, здобуває приз із ймовірністю 1; якщо ж кілька конкурсантів докладають найбільших зусиль, то зазвичай вважають, що вони мають однакову ймовірність здобути приз:

$$p_i(G_1, \dots, G_i, \dots, G_n) = \begin{cases} 1 \Leftarrow G_i > \max\{G_1, \dots, G_{i-1}, G_{i+1}, \dots, G_n\} \equiv G^i; \\ \dfrac{1}{m} \Leftarrow G_j = \max\{G_1, \dots, G_n\}, i, j \in J \subseteq N, |J| = m; \\ 0 \Leftarrow G_i < G^i; \end{cases}$$

тут $|J|$ означає число різних індексів на множині J. APA не має рівноваги у чистих стратегіях. При даному векторі $(\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_n)$ зусиль кожний конкурсант

i має стимул зменшувати свої витрати $\overline{G}_i$, коли це не впливає на p_i: $G_i = \overline{G}^i + \varepsilon < \overline{G}_i$ при $\overline{G}_i > \overline{G}^i$, де ε – нескінченно мале додатне число; $G_i = 0$ при $\overline{G}_i < \overline{G}^i$. З іншого боку, вибір $\overline{G}_i = 0$ кожним конкурсантом не дає стійкої рівноваги, бо тоді можна перемогти нескінченно малими зусиллями.

Вивчалися рівноваги Неша в змішаних стратегіях за повної інформації з однаковими витратами і за неповної інформації з двома конкурсантами. Рівноважну поведінку можна наближувати при складних умовах – при досить великій кількості конкурсантів, при досить великих призах, при асиметрії та при неповній інформації. Одне з найвідоміших застосувань моделі APA – лобіювання, де розробник, максимізуючи суму ставок, може вигравати від виключення з участі у конкурсі лобістів, які мають найвищу (суб'єктивну) цінність призу. У загальнішому класі моделей APA менші інвестиції є кращим рішенням, зважаючи на програш або виграш.

У різницевій формі CSF ймовірність p_i виграшу залежить від різниці між зусиллями G_i конкурсанта та мірою зусиль інших конкурсантів: для $N = 2$

$$p_i = F_i(G_i - G_j) = 1 - p_j = 1 - F_j(G_j - G_i), \quad i, j = 1,2, \quad i \neq j, \tag{1}$$

що свідчить про важливість будь-якої переваги (зусиль) над суперником. Якщо функція F_i диференційована, то умови першого порядку максимізації $\Pi_1 = p_1 V_1 - G_i$ по G_1 дають

$$0 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial G_1} = V_1 \frac{\partial F_1(G_1 - G_2)}{\partial G_1} - 1, \qquad V_1 = \left[\frac{\partial F_1(G_1 - G_2)}{\partial G_1}\right]^{-1};$$

аналогічно для максимізації $\Pi_2 = p_2 V_2 - G_2$ по G_2 маємо

$$0 = \frac{\partial \Pi_2}{\partial G_2} = V_2 \frac{\partial F_2(G_2 - G_1)}{\partial G_2} - 1 = V_2 \frac{\partial F_1(G_1 - G_2)}{\partial G_2} - 1, \qquad V_2 = \left[\frac{\partial F_1(G_1 - G_2)}{\partial G_2}\right]^{-1}.$$

Якщо $\left[\frac{\partial F_1(G_1 - G_2)}{\partial G_1}\right]^{-1} = V_1 > V_2 = \left[\frac{\partial F_1(G_1 - G_2)}{\partial G_2}\right]^{-1}$, то за рівноваги Неша в чистих стратегіях конкурсант 1 докладає зусиль $G_1 > 0$, а $G_2 = 0$. Для $N = 2$ окремим випадком залежності (1) є недиференційована функція

$$p_1 = \max\left\{\min\left\{\frac{1}{2} + s(G_1 - G_2), 1\right\}, 0\right\} = 1 - p_2, \tag{2}$$

якій відповідає точка рівноваги, де функція CSF не обов'язково диференційована. При $s = 0$ ця функція не залежить від зусиль; оскільки при $s \to \infty$ будь-яка перевага суперника повністю змінює результат конкурсу, то залежність (2) фактично відповідає APA. Хоча при такій функції якнайбільше один конкурсант докладає додатних зусиль за рівноваги Неша в чистих стратегіях, така функція допускає змішану рівновагу Неша; якщо функція витрат конкурсанта i є строго увігнутою (є рівною, скажімо, $(G_i)^\alpha$, $\alpha < 1$), то існує рівновага Неша в чистих стратегіях з додатними зусиллями обох конкурсантів.

Крім того, оскільки у залежності (1) ймовірність виграшу залежить від одиниці вимірювання зусиль (доларів або євро, хвилин чи годин, сотень або тисяч тощо), то ця ймовірність не є однорідною ступеня 0 (homogeneous of degree zero, HDZ). Функція $x = f(\vec{y}) \in R,$ де $\vec{y} \in R^m,$ має властивість HDZ при $f(\lambda\,\vec{y}) = f(\vec{y})$ $\forall\ \lambda \neq 0.$ Була запропонована різницева форма функції CSF

$$p_i = \sum_{j=i}^{n} \frac{(G_j)^{\sim} - (G_{j+1})^{\sim}}{j\,(G_1)^{\sim}} \quad \forall\ i \in N\,,\ G_j \geq G_{j+1}\,,\ G_{n+1} = 0\,,$$

яка має властивість HDZ.

У дробовій формі CSF ймовірність виграшу конкурсанта i дорівнює частці його зусиль у сумі зусиль усіх конкурсантів:

$$p_i = \frac{G_i}{\sum_{j=1}^{n} G_j}. \tag{3}$$

Таку CSF називають лотерейною, бо G_i можна інтерпретувати як число лотерейних квитків конкурсанта i у лотереї з $\sum_{j=1}^{n} G_j$ рівновиграшними квитками. Функція (3) має властивість HDZ, тобто ця функція не залежить від вибору одиниці вимірювання зусиль. Однак CSF з властивістю HDZ є розривною чи невизначеною у точці $\vec{G} = \vec{0}$ з нульовими зусиллями кожного конкурсанта. Тому у точці $\vec{0}$ значення функції (3) вважають рівним $k \in [0, 1],$ позаяк точка $\vec{0}$ не є рівновагою у конкурсі з повною інформацією: будь-яке нескінченно мале зусилля будь-якого конкурсанта достатньо для відхилення від точки $\vec{0}.$

Природним узагальненням функції (3) є логіт-CSF

$$p_i = \frac{\varphi(G_i)}{\sum_{j=1}^{n} \varphi(G_j)}, \tag{4}$$

де функція $\varphi(G_i)$ вимірює вплив конкурсанта i на результат конкурсу відносно сумарного впливу всіх конкурсантів. Функція $\varphi(G_i) = (G_i)^{\varepsilon}$ є окремим випадком залежності (4), де параметр ε шуму (через випадкові чи невідомі фактори) визначає віддачу від будь-яких зусиль: для $\varepsilon \to \infty$ будь-яка перевага над суперником веде до виграшу напевне (що фактично відповідає APA); для $\varepsilon = 0$ конкурс є стохастичним процесом з імовірністю виграшу кожного конкурсанта, рівною $\dfrac{1}{n}$ незалежно від зусиль; для $\varepsilon = 1 \in [0, \infty)$ дістаємо залежність (3).

Коли $\varphi(G_i) = G_i + k,$ то шум k є адитивним відносно зусиль, а при більшому шумі результат конкурсу менше залежить від зусиль.

Функція $\varphi(G_i) = e^{kG_i}$ при $k > 0$ дозволяє поєднувати різницеву залежність (1) і залежність (4) з властивістю HDZ, бо тоді

$$p_i = \frac{\varphi(G_i)}{\sum_{j=1}^{n} \varphi(G_j)} = \frac{e^{kG_i}}{e^{kG_1} + \cdots + e^{kG_n}} = \frac{e^{kG_i}}{e^{kG_i}[e^{k(G_1-G_i)} + \cdots + e^{k(G_n-G_i)}]} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} e^{k(G_j-G_i)}}. \quad (5)$$

Проте CSF (5) не є увігнутою по G_i; функції найкращого відгуку є прямими лініями з нахилом 45° до точки розриву; рівноваги є в змішаних стратегіях або кутовими (при достатньо асиметричних оцінках $V_1,\ldots,V_n$). Вивчалися існування та єдність рівноваги Неша, порівняльна статика для різницевої CSF при однакових або неоднакових $V_1,\ldots,V_n$ і для лотерейної CSF, порівняльна статика для логіт-CSF. Лотерейну CSF (3) можна узагальнити функцією

$$p_i = \frac{\alpha_i G_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j G_j}, \quad (6)$$

де α_i – вага зусиль конкурсанта i, яка асиметрично впливає на ймовірність виграшу. Вагу можна інтерпретувати як вплив зусилля на своєму рівні взаємодії, що визначається, скажімо, ставленням організаторів конкурсу до даного конкурсанта. Присутність видатного конкурсанта (суперзірки з більшою вагою зусиль) погіршує результативність конкурсу. Досліджувався вплив більшої ваги у напрямі правильного рішення на якість політичних рішень особою, яка приймає рішення, при уточненні інформації від лобістів з конкуруючими інтересами.

Можна поєднати бажані властивості лотерейної CSF і різницевої CSF:

$$p_i = \alpha + \beta \frac{G_i - sG_j}{\sum_{j=1}^{n} G_j}, \quad (7)$$

де α – частина ймовірності, що не залежить від зусиль (аналог шуму ε у функції $\varphi(G_i) = (G_i)^{\varepsilon}$ залежності (4)), β – міра відносних зусиль, s – параметр негативного впливу зусиль суперника. При $n = 2$ рівність $1 = p_1 + p_2$ означає

$$1 = \alpha + \beta \frac{G_1 - sG_2}{G_1 + G_2} + \alpha + \beta \frac{G_2 - sG_1}{G_1 + G_2},$$
$$G_1 + G_2 = 2\alpha(G_1 + G_2) + \beta(G_1 - sG_2 + G_2 - s_1 G_1) = 2\alpha(G_1 + G_2) +$$
$$+\beta(G_1 + G_2) - \beta s(G_1 + G_2),$$
$$1 = 2\alpha + \beta(1 - s). \quad (8)$$

Для гарантування $p_i \geq 0$ в залежності (7) можна скористатися конструкцією максміна, подібною до (2). CSF (7) є афінним перетворенням дробової CSF (3):

$$p_i = \alpha + \beta \frac{G_i - sG_j + sG_i - sG_i}{\sum_{j=1}^{n} G_j} = \alpha + \beta \frac{(1+s)G_i - s(G_i + G_j)}{\sum_{j=1}^{n} G_j} =$$

$$= \alpha + \beta s + \beta (1+s) \frac{G_i}{\sum_{j=1}^{n} G_j}.$$

При $n = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ рівність (8) дає $s = 0$, а CSF (7) стає дробовою. При $V_1 = V_2$, $n = 2$ необхідною й достатньою умовою існування рівноваги Неша для CSF (7) є нерівність $\alpha + \beta \le 1.5$, причому ця рівновага єдина; при однакових $V_1, \ldots, V_n$ достатньою умовою існування рівноваги Неша є нерівність $n \ge n(\alpha + \beta) - 1$; відомі також достатні умови існування рівноваги Неша при неоднакових $V_1, \ldots, V_n$.

Дії гравців називають стратегічними замінниками (доповнювачами), коли ці дії взаємно нейтралізують (посилюють) одна іншу. Зазначимо, що засоби аналізу ігор стратегічних доповнювачів або замінників не стосуються конкурсів. Наприклад, для залежності (6) при $n = 2$, $\sim_1 = 1$ маємо

$$p_1 = \frac{G_1}{G_1 + \alpha_2 G_2}, \qquad \Pi_1 = p_1 V_1 - G_1 = \frac{G_1 V_1}{G_1 + \alpha_2 G_2} - G_1,$$

звідки випливає функція $G_1(G_2)$ найкращого відгуку конкурсанта 1:

$$0 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial G_1} = \frac{V_1 (G_1 + \alpha_2 G_2) - G_1 V_1}{(G_1 + \alpha_2 G_2)^2} - 1 = \frac{\alpha_2 G_2 V_1}{(G_1 + \alpha_2 G_2)^2} - 1, \qquad G_1 = \left(\alpha_2 G_2 V_1\right)^{0.5} - \alpha_2 G_2.$$

При малих G_2 похідна $\frac{\partial G_1}{\partial G_2} = 0.5(\alpha_2 G_2 V)^{-0.5} - \alpha_2$ цієї функції додатна (функція $G_1(G_2)$ зростає, що відповідає стратегічним доповнювачам), а при великих G_2 – від'ємна (функція $G_1(G_2)$ спадає, що відповідає стратегічним замінникам). Подібне має місце для логіт-CSF (4) при досить загальних умовах.

Крім виграшу чи програшу, конкурс може допускати деякі проміжні результати, наприклад, нічиї. Війни часто закінчуються без явних переможців або переможених. Приклади таких війн – війна у Кореї протягом 1950 – 1953 рр. чи війна між Іраком та Іраном протягом 1980 – 1988 рр. В англосаксонських державах судові справи можуть завершатися нульовим вердиктом (null verdict) або розділеним рішенням журі (hung jury), що відповідає теоремі Геделя про неповноту формальних систем [11]. Нічиї відіграють важливу роль у таких капіталізованих видах спорту, як футбол, бокс, шахи. Коли немає конкурсанта, який задовольняє мінімальним вимогам якості, то приз конкурсу може не присуджуватися взагалі (таким призом у закупівлях може бути замовлення на виконання робіт).

При $n = 2$ і деяких припущеннях ймовірність досягнення нічиїх рівна $\frac{1}{1+\alpha_1(G_1)^r+\alpha_2(G_2)^r}$, де α_1, α_2, r – деякі додатні параметри. Однак для великих значень $G_1 = G_2$ ця ймовірність близька до 0, що видається неправдоподібним; ця ймовірність може залежати від відносної різниці $\frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2}$. Якщо ця ймовірність становить $\frac{G_1 G_2 (c^2 - 1)}{(G_1 + cG_2)(G_2 + cG_1)}$, де $c > 1$, то відповідна CSF задовольняє певні аксіоми, причому для $c < 3$ існує єдина рівновага Неша в чистих стратегіях. Якщо ця ймовірність дорівнює $1 - \frac{[\varphi(G_1)]^k + [\varphi(G_2)]^k}{[\varphi(G_1) + \varphi(G_2)]^k}$, де $\varphi(\cdot)$ – зростаюча, диференційована й увігнута функція, $k \geq 1$ – параметр схильності до нічиїх, то при $k < 3$ для відповідної CSF ($k = 1$ відповідає логіт-CSF (4)) існує єдина рівновага Неша в чистих стратегіях; для футбольних ліг Іспанії, Італії, Німеччини, Франції оцінки значення параметра k близькі до 1.5, що відповідає теоретичному значенню $k = 1.44$ максимізації зусиль [12].

Рівноваги Неша у симетричній постановці APA з повною інформацією для $n = 2$ характеризуються при $|G_i - G_j| < \delta$ нічиєю ($\delta > 0$ – деяке фіксоване число), коли кожний гравець отримує однакову частку β загального призу:

$$p_i(G_i, G_j) = \begin{cases} 1, G_i - G_j > \delta; \\ \beta, |G_i - G_j| \leq \delta; \\ 0, G_j - G_i > \delta. \end{cases}$$

Якщо при інформаційній асиметрії серед конкурсантів розробник конкурсу задає CSF, то конкурсанти вибирають оптимальну CSF за принципом виявлення (revelation): при одному розподілі типів сподівані агреговані зусилля максимізує логіт-CSF (4), а при іншому розподілі типів – адитивна логарифмічна CSF у різницевій формі $p_i = 0.5[\log(G_i) - \log(G_j)] + 0.5$, подібна до CSF $p_i = \frac{2\varphi(G_i) - \varphi(G_j)}{\varphi(G_1) + \varphi(G_2)}$. Оскільки оптимальна ex post CSF нагадує механізм Кларка – Вікрі – Гроувза (Clarke – Vickrey – Groves), то конкурси можна вважати розміщенням громадського продукту (Вікрі – Нобелівський лауреат 1996 р.).

Рівноваги, де агенти правдиво повідомляють про свої оцінки призу, можуть співіснувати з рівновагами, де агенти неправдиво повідомляють про свої оцінки призу. Оптимальна CSF залежить від розподілу типів, який зазвичай невідомий. Загалом побудова кожної нової функції CSF потребує глибокого розуміння переваг і недоліків проектування механізмів конкурсів.

Хоча кожна вищезгадана CSF має допустиму функціональну форму, кожна CSF потребує мікроекономічної інтерпретації. При $n = 2$ стохастичний результат перемоги конкурсанта i над конкурсантом j рівносильний нерівності $\varepsilon_i G_i > \varepsilon_j G_j$, де ε_i, ε_j – стохастичний компонент конкурсанта i, j відповідно (випадок $\varepsilon_i = \varepsilon_j$ відповідає APA).

Якщо стохастичні компоненти мають обернений експоненціальний розподіл, то оптимальною є логіт-CSF [13]. Логіт-CSF також є оптимальною у конкурсах інновацій і патентів. Ці висновки залежать від наявності інформації про кумулятивну функцію розподілу стохастичних компонентів.

Аксіоматичний підхід до конкурсів зосереджується на властивостях, які характеризують CSF. Якщо конкурс має властивості: 1) недосконалої дискримінації (ймовірність виграшу завжди додатна при додатних зусиллях); 2) монотонності (ймовірність виграшу більша при більших зусиллях); 3) анонімності (ймовірність виграшу залежить від зусилля, а не від ідентичності агента); 4) певної незначущості незалежних альтернатив, то оптимальною є логіт-CSF; якщо, крім того, CSF має властивість HDZ, то оптимальною є CSF Таллока (Tullock). Ці результати узагальнені на асиметричну CSF. Множинності призів відповідає своя оптимальна CSF. Для конкурсів груп логіт-CSF є оптимальною при одних аксіомах, а CSF у різницевій формі – при інших. Такі конкурси, як спортивні змагання і громадські закупівлі, проектуються й управляються розробником (людиною чи кількома людьми). Тому CSF до певної міри є безпосереднім наслідком дій розробника. Припустимо, що мета розробника – максимізація зваженого середнього суспільного добробуту і зусиль конкурсантів. Ці зусилля можуть поліпшувати якість призу (планування участі в Олімпіаді підвищує рівень даної Олімпіади) та величину призу (зусилля впливають на монетарні трансферти від конкурсантів до розробника). При $n = 2$ вивчалися умови, при яких розробник надає перевагу організації APA чи конкурсу із CSF Таллока.

Розробники можуть належати до різних типів, невідомих конкурсантам. У свою чергу, конкурсант може нехтувати перевагами розробника (до одного чи іншого конкурсанта, стилю роботи, смаку тощо): CSF – це функція найкращого відгуку розробника з погляду даного конкурсанта. Якщо при $n = 2$ корисності (utilities) учасників $j = 0,1,2$ визначаються $U_0 = \max\{U_1 = (1-\theta)\varphi(G_1);\ U_2 = \theta\varphi(G_2)\}$ ($j = 0$ відповідає розробнику), де θ – рівномірно розподілена на $[0,1]$ випадкова величина, то ймовірність виграшу конкурсанта 1 визначається

$$(1-\theta)\varphi(G)_1 = U_1 > U_2 = \theta\varphi(G_2), \qquad \varphi(G_1) > \theta[\varphi(G_1) + \varphi(G_2)],$$

тобто визначається $\theta < \dfrac{\varphi(G_1)}{\varphi(G_1) + \varphi(G_2)}$ (логіт-CSF може бути раціоналізована). При $n = 2$ ймовірність виграшу залежить симетрично від агрегованих зусиль усіх конкурсантів, а тому кожну CSF можна раціоналізувати; при $n > 2$ будь-яку відому CSF не можна раціоналізувати. Як у деяких моделях індустріальної організації [14], платіж гравця залежить від платежів сусідніх гравців, тобто конкуренція здебільшого локалізується.

Коли розробник не може явно задавати CSF, але може неявно задавати ймовірності виграшу після здійснення зусиль, максимізуючи цільову функцію з постійною еластичністю заміни (constant elasticity of substitution, CES)

$$W(\vec{p},\vec{G}) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n}(p_i V_i - G_i)^{1-r}\right)^{\frac{1}{1-r}}, r \neq 1, \\ \sum_{i=1}^{n}\ln(p_i V_i - G_i), r = 1, \end{cases}$$

то при $r = 1$ з умов першого порядку максимізації маємо

$$0 = \frac{\partial W}{\partial p_j} = \frac{V_j - \frac{\partial G_j}{\partial p_j}}{p_j V_j - G_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{-\frac{\partial G_i}{\partial p_j}}{p_i V_i - G_i} = \frac{V_j}{p_j V_j - G_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial G_i}{\partial p_j}}{p_i V_i - G_i}, \; j \in N,$$

$$\frac{V_j}{p_j V_j - G_j} = \frac{V_i}{p_i V_i - G_i}, \qquad p_i = \frac{V_i(p_j V_j - G_j)}{V_i V_j} + \frac{V_j G_i}{V_i} = p_j - \frac{G_j}{V_j} + \frac{V_j G_i}{V_i},$$

$$n\, p_i = \sum_{j=1}^{n} p_i = \sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{j=1}^{n}\frac{G_j}{V_j} + \frac{G_i}{V_i}\sum_{j=1}^{n} V_j = 1 - \sum_{j=1}^{n}\frac{G_j}{V_j} + \frac{G_i}{V_i}\sum_{j=1}^{n} V_j,$$

$$p_i = \frac{1}{n}\left(1 - \sum_{j=1}^{n}\frac{G_j}{V_j} + \frac{G_i}{V_i}\sum_{j=1}^{n} V_j\right).$$

Отримана CSF має структуру (1), яка зберігається $\forall \; r$. Проте логіт-CSF не можна раціоналізувати розробником, який максимізує функцію зусиль конкурсантів. Якщо розробник максимізує цільову функцію Канемана – Тверського [15] (Канеман – Нобелівський лауреат 2002 р.), то раціоналізує логіт-CSF.

Коли конкурсанти ділять результат конкурсу подібно до судової справи за власність ресурсу, то p_i можна інтерпретувати як частку ресурсу, виділену конкурсанту i. На основі роботи [16] можна раціоналізувати логіт-CSF як наслідок асиметричного рішення Неша поділу, де зусилля агента є його ваговим коефіцієнтом. Зусилля G_i формують вимоги $\varphi_i(G_i)$ в задачах поділу. Пропорційності вимог у задачі поділу відповідає логіт-CSF, а егалітарності вимог – CSF у різницевій формі. Можна раціоналізувати дробову CSF і CSF у різницевій формі у постановці, де інформація (свідчення) конкурсантів є підставою для баєсівського прийняття рішень (судом) [17].

Коли витрати конкурсантів мають зовнішні ефекти, то може існувати кілька рівноваг Неша [18]. На практиці конкурси мають певну динаміку. Наприклад, війна складається з кількох послідовних битв, а багато телевізійних конкурсів має попередній і фінальний етапи. Ряд футбольних і тенісних турнірів має попередні раунди (півфінал, чвертьфінал, одна восьма фіналу і так далі) з вибуванням учасників. Конкурси з вибуванням досліджуються окремо. Якщо на кожному етапі конкурсант дістає деякий результат, то перемагає конкурсант з найбільшим сумарним результатом на всіх етапах (скажімо, на чемпіонаті України з шахів або футболу, на виборах кандидата у президенти США від республіканської чи демократичної партії) або конкурсант з найбільшим результатом на етапі (скажімо, на змаганнях з метання спису). В інноваційних перегонах фірми протягом кожного етапу виробляють інновації стохастичної вартості, але перемагає фірма з найбільшою вартістю інновації протягом деякого етапу.

В.М. Горбачук, А.А. Сырку, С.-Б. Сулейманов

ТЕОРИЯ ОРГАНИЗАЦИИ КОНКУРСОВ

Человеческое общество развивалось через разнообразные взаимодействия, где природный отбор дополнялся социальными конкурсами. Поскольку в современном обществе роль конкурсов постоянно возрастает, то также возрастает ответственность решений человеком.

V.M. Gorbachuk, A.A. Syrku, S.-B.Suleimanov

THEORY FOR ORGANIZATION OF CONTESTS

The human society has developed through various interactions, where a natural selection was complemented by social contests. Since the role of contests permanently increases in the contemporary society, the responsibility for decisions by Homo sapiens increases as well.

Список літератури

1. Corchón L.C. The theory of contests: a survey. *Review of economic design*. 2007. 11(2). P. 69 – 100.
2. Corchón L.C., Serena M. Contest theory: a survey. *Handbook of game theory and industrial organization*. V. II. L.C.Corchon, M.A.Marini (eds.) Edward Elgar, 2018. P. 125 – 146.
3. Горбачук В.М., Макаренко О.С. Особливості прийняття рішень людиною для розв’язання складних міждисциплінарних проблем. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2017. № 3. С. 73 – 87.
4. Горбачук В.М. Макроекономічні методи: теорії та застосування. К.: Кий, 2000. 271 с.
5. Горбачук В.М. Фінансові рішення. К.: Альтерпрес, 2003. 176 с.
6. Горбачук В.М., Єрмольєв Ю.М., Єрмольєва Т.Ю. Двоетапна модель еколого-економічних рішень. *Вісник Одеського національного університету. Економіка.* 2016. Т. 21. Вип. 9. С. 142 – 147.
7. Горбачук В.М., Дунаєвський М.С., Сирку А.А. Сулейманов С.-Б. До розробки сучасних конкурсів. *Теорія прийняття рішень*. Ужгород: УжНУ, 2019. С. 15 – 16.
8. Горбачук В.М., Єрмоленко Л.І., Сулейманов С.-Б., Кирилов І.М. Показники соціального капіталу для чисельного міжрегіонального аналізу. *Глушковські читання. Історія, сьогодення та перспективи розвитку інформаційних технологій в Україні та світі.* К.: НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», 2018. С. 38 – 40.

9. Ermoliev Yu., Ermolieva T., Kahil T., Obersteiner M., Gorbachuk V., Knopov P. Stochastic optimization models for risk-based reservoir management. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. 55(1). P. 55 – 64.
10. Горбачук В.М., Єрмольєв Ю.М., Єрмольєва Т.Ю., Дунаєвський М.С. Застосування квантильної регресії для оцінювання еколого-економічних ризиків. *Обчислювальний інтелект*. Ужгорож: УжНУ, 2019. С. 188 – 189.
11. Сергієнко І.В. Гупал А.М. Індуктивна математика. *Вісник НАН України*. 2002. № 5. С. 19 – 25.
12. Yildizparlak A. An application of contest success functions for draws on European soccer. *Journal of sports economics*. 2017. 19(8). P. 1191 – 1212.
13. Jia H. A stochastic derivation of the ratio form of contest success functions. *Public choice*. 2008. 135(3). P. 125 – 130.
14. Горбачук В.М. Методи індустріальної організації. Кейси та вправи. Економіка та організація виробництва. Економічна кібернетика. Економіка підприємства. К.: А.С.К., 2010. 224 с.
15. Kahneman D., Tversky A. Prospect theory: an analysis of decision under risk. *Econometrica*. 1979. 47(2). P. 263 – 292.
16. Dagan N., Volij O. The bankruptcy problem: a cooperative bargaining approach. *Mathematical social sciences*. 1993. 26(3). P. 287 – 297.
17. Skaperdas S., Vaidya S. Persuasion as a contest. *Economic theory*. 2012. 51(2). P. 465 – 486.
18. Chowdhury S.M., Sheremeta R.M. Multiple equilibria in Tullock contests. *Economics letters*. 2011. 112(2). P. 216 – 219.

Одержано 06.05.2019

Про авторів:

Горбачук Василь Михайлович,
доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
Email: GorbachukVasyl@netscape.net

Сирку Андрій Анатолійович,
аспірант Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,

Сулейманов Сеїт-Бекір,
аспірант Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.