КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.25

В.І. МАСОЛ, Є.О. ШЕВЧЕНКО

АЛГОРИТМ ОЦІНЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ ПОГАНО ОБУМОВЛЕНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Пропонується алгоритм оцінювання невідомих значень системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), особливості якої є погана обумовленість, рівність (по модулю) між собою невідомих, наявність завад (шуму), які діють на вільні члени СЛАР. Зазначений алгоритм базується на можливості побудови певної сукупності СЛАР з суттєво меншим числом обумовленості, ніж числом обумовленості початкової системи, з подальшою статистичною обробкою розв'язків цих СЛАР.

Прикладні задачі, що пов'язані з аналізом сигналів, зокрема, оцінками їх амплітуд, приводять до необхідності розв'язувати СЛАР, які у загальному вигляді можна подати так:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j = b_i + \varepsilon_i \\ &i=\overline{1,n}, \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

де n – кількість невідомих СЛАР, ε_i – незалежні випадкові величини, $i=\overrightarrow{1,n}$, – AWGN (адитивний білий гауссів шум). Крім того, система (1) має такі властивості:

- визначник det(A) матриці коефіцієнтів A СЛАР (1) задовольняє співвідношенню

$$\det(A) \neq 0; \qquad (2)$$

- компоненти вектора розв'язку СЛАР дорівнюють (по модулю) між собою

$$|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n|, \qquad (3)$$

СЛАР (1) погано обумовлена у тому сенсі, що визначник det(A) має значення близьке до нуля і число обумовленості $\mu(A)$ досить велике (системи рівнянь із зазначеними властивостями розглядалися, зокрема, у [1]). Велике число обумовленості характеризує клас задач, який має назву клас некоректно поставлених задач («inverse problems»). Як відмічено в [6], процедура знаходження розв'язків СЛАР із зазначеного класу нестійка у тому сенсі, що при найменших збуреннях коефіцієнтів матриці A або вектора-стовпця $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_8)'$ правої частини (1) розв'язок може суттєво відрізнятися від точного.

У даній роботі пропонується алгоритм, який дозволяє оцінювати розв'язки системи (1) шляхом побудови скінченної кількості СЛАР, які еквівалентні (1) і з урахування властивості (3) дозволяють зменшити число обумовленості, що врешті решт зменшує вплив шуму AWGN на значення розв'язку.

Параметр *n* у системі (1) обирають в залежності від роду задачі і практичної доцільності. Так, у публікації [3] $n = 8$, $\varepsilon_i \equiv 0$, $i = \overline{1,8}$, матриця коефіцієнтів *A* має розмір (8 x 8) і у подальшому позначатиметься як $A_{(8 \times 8)}$ (табл. 1). Вибір конкретних значень елементів матриці *A* формується відліками фільтру з характеристикою типу «припіднятий косинус» (ФПК; в англомовній літературі ФПК – Lowpass Raised Cosine FIR filter (фільтр низькочастотний «припіднятий косинус» з кінцевою імпульсною характеристикою)), який часто зустрічається в телекомунікаційних системах завдяки можливості мінімізувати міжсимвольні спотворення [4].

ТАБЛИЦЯ 1. Матриця $A_{(8x8)}$

h[n]	A8	h[n]	A7	h[n]	A6	h[n]	A5
57	– 0,002167	49	0,010266	41	– 0,022744	33	1
58	– 0,003514	50	0,024643	42	– 0,095621	34	0,969196
59	– 0,003461	51	0,029792	43	– 0,130815	35	0,880695
60	– 0,002659	52	0,027860	44	– 0,134201	36	0,745562
61	– 0,001658	53	0,021653	45	– 0,114696	37	0,580185
62	– 0,000809	54	0,013880	46	– 0,082303	38	0,403618
63	– 0,000260	55	0,006630	47	– 0,046308	39	0,234615
64	– 2,14E– 06	56	0,001143	48	– 0,013952	40	0,088917
25	0,088917	17	– 0,013952	9	0,001143	1	– 2,14E– 06
26	0,234615	18	– 0,046308	10	0,006630	2	– 0,000260
27	0,403618	19	– 0,082303	11	0,013880	3	– 0,000809
28	0,580185	20	– 0,114696	12	0,021653	4	– 0,001658
29	0,745562	21	– 0,134201	13	0,027860	5	– 0,002659
30	0,880695	22	– 0,130815	14	0,029792	6	– 0,003461
31	0,969196	23	– 0,095621	15	0,024643	7	– 0,003514
32	1	24	– 0,022744	16	0,010266	8	– 0,002167

В таблиці запис $h[n]$ є дискретний момент часу, а запис $A1$ – $A8$ значення імпульсного відгуку фільтра у ці моменти часу.

Імпульсний відгук фільтра (ис. 1) описується формулою [4]:

$$h(\mathrm{t}) = \frac{\sin(\pi t / T_s)}{\pi t} \times \frac{\cos(\pi\beta t / T_s)}{1 - (\frac{2\beta t}{T_s})^2}$$

і характеризується двома величинами:

- β – коефіцієнт згладжування, β є [0,1];
- *Ts* – тривалість символьного інтервалу в переданому цифровому сигналі, розділяючи сусідні точки відліку на часовій осі, тобто період (крок) дискретизації.

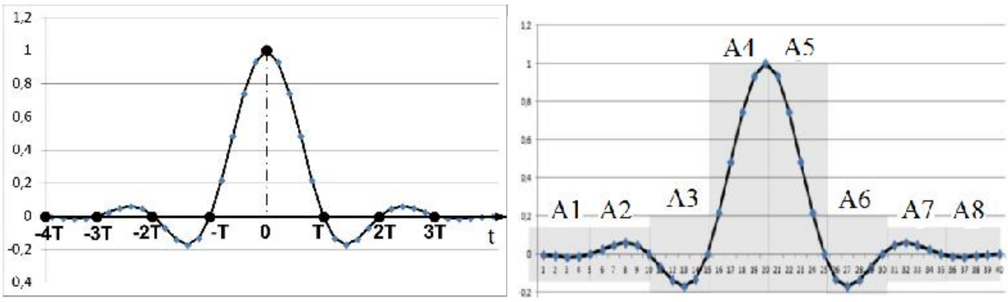

РИС. 1. Імпульсний відгук ФПК (T = 5, β = 0.35)

Спосіб формування правої частини СЛАР (1), тобто вихідного сигналу з ФПК, можна подати, так як на рис. 2. А саме, на ньому схематично представлено проходження через ФПК цифрового бінарного полярного *NRZ*-сигналу (Non Return Zero), який передає цифрове повідомлення $X_k \in$ (1 1 1 1 1 1 1 1). В результаті вихідний сигнал *sig* являє собою суму восьми імпульсних характеристик фільтра, зміщених відносно один до одного на часові інтервали *kT* і мають амплітуди *Xk*, рівних амплітуді відповідних вхідних імпульсів.

Нескладно перевірити (використовуючи *Matlab* (наприклад, [5])), що визначник $\det(A_{(8x8)})$ дорівнює $\det(A_{(8x8)}) = 9{,}9E-21$ (отже, задовольняє співвідношенню (2)) і число обумовленості $\mu(A_{(8x8)})$:

$$\mu(A_{(8x8)}) = 1895428. \tag{4}$$

Наслідком того, що число обумовленості $\mu(A_{(8x8)})$ велике, є чутливість розв’язку навіть до невеликих збурень вектора $\vec{b}$.

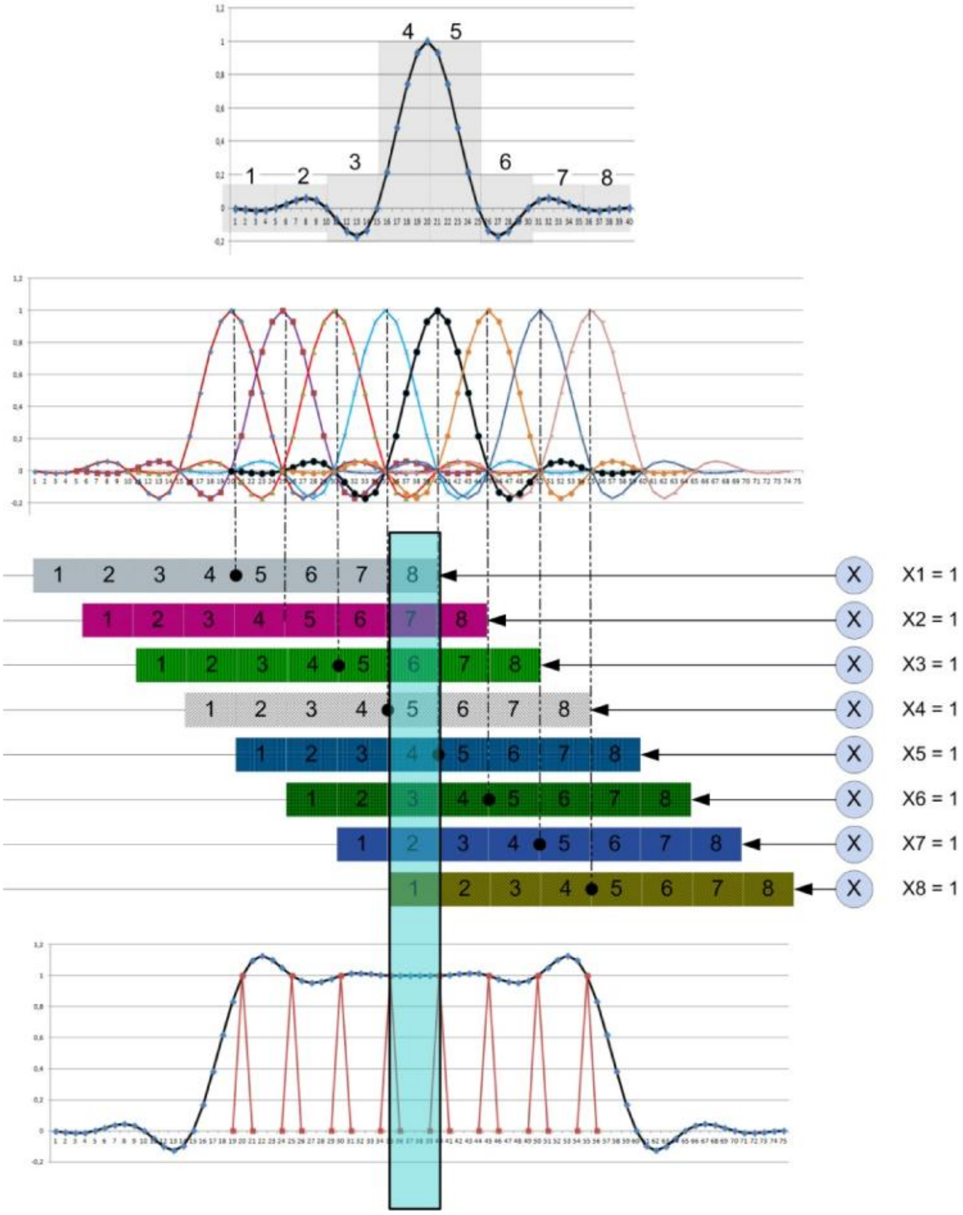

РИС. 2. Формування сигналу *sig*

Отримані значення для det($A_{(8x8)}$) та μ($A_{(8x8)}$) матриці $A_{(8x8)}$ вказують на те, що поява у правій частині СЛАР $A_{(8x8)}\vec{x} = \vec{b}$, де $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_8)'$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_8)'$, завад $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_8)'$ суттєво може змінити розв’язок системи. Наприклад, для вектора $\vec{x}$:

$$\vec{x} = (-10; 10; 10; -10; -10; -10; 10; 10)', \quad (5)$$

який задовольняє (3), отримуємо таке значення для $\vec{b}$:

$$\vec{b} = (-10{,}841; -12{,}185; 12{,}865; -12{,}947; -12{,}577; -11{,}948; -11{,}265; -10{,}709)'$$

Водночас для завади

$$\vec{\varepsilon} = (0{,}158; -0{,}561; -0{,}857; 0{,}415; 0{,}412; 0{,}194; 0{,}265; -0{,}585) \quad (6)$$

розв'язком СЛАР

$$A_{(8x8)}\vec{x} = \vec{b} + \vec{\varepsilon} \quad (7)$$

є вектор $\vec{x}$, який дорівнює

$$\vec{x} = (53894; -125121; -32709; 983; -921; 24136; 71540; -149450)'. \quad (8)$$

Очевидно, значення компонент вектора (8) суттєво відрізняються від компонент вектора (5).

Звідси випливає необхідність зменшити число обумовленості матриці $A_{(8x8)}$ і тим самим отримати розв'язок, який би залишався стійким до збурень правої частини вихідної СЛАР. У нашому випадку це можна досягти скориставшись тим, що розв'язок має задовольняти співвідношенню (3) і , отже, компоненти вектора розв'язку можуть відрізнятися між собою хіба що знаком. Залишилося помітити, що кількість варіацій знаків розв'язку СЛАР (7) дорівнює 2^8. Як показано далі це дозволяє сформувати алгоритм оцінювання розв'язків СЛАР (1) .

Алгоритм оцінювання розв'язків СЛАР (1) на прикладі оцінювання розв'язків СЛАР (7) подамо у вигляді наступних кроків.

Крок 1. Кількість варіацій знаків розв'язку СЛАР (7) дорівнює $2^8 = 256$. Для кожної варіації формуємо матрицю $A_{(8x2)}$ розмірністю 8 х 2, у якій перший (другий) стовпець – це сума додатних (від'ємних) компонент вектора $\vec{x}$ СЛАР (7). Наприклад, для варіації $\vec{x} = (-10; 10; 10; -10; -10; -10; 10; 10)'$ матриця $A_{(8x8)}$ з коефіцієнтами, які надані в табл. 1, перетворюється у матрицю $A_{(8x2)}$, яка має вигляд (табл. 2).

ТАБЛИЦЯ 2. Матриця $A_{(8x2)}$

n	1	2	*n*	1	2
1	– 10,727974	– 0,113369	5	– 11,898889	– 0,678418
2	– 11,539898	– 0,646075	6	– 11,526890	– 0,420911
3	– 11,985500	– 0,879522	7	– 11,079310	– 0,185486
4	– 12,083927	– 0,863456	8	– 10,661705	– 0,047099

У підсумку отримуємо 256 матриць розмірністю 8 х 2. Мінімальне та максимальне значення чисел обумовленості цих матриць дорівнює 29,22 та 1381,91 відповідно, що суттєво менше значення числа обумовленості (4). Числа обумовленості матриць розраховуємо за допомогою *Matlab*-функції *cond*($A_{(8x2)}$).

Крок 2. Розв'язуємо СЛАР з матрицями коефіцієнтів отриманих на кроці 1, а саме систем вигляду.

$$A_{(8x2)}\vec{y} = \vec{b} + \vec{\varepsilon}, \qquad (9)$$

де $\vec{y} = (y_1; y_2)'$, та залишаємо лише такі вектори $\vec{y}$, для яких виконуються співвідношення $y_1 > 0,\ y_2 > 0$. Вибір зазначених розв'язків пов'язано з їх фізичною інтерпретацією (амплітуда сигналу), табл. 3.

ТАБЛИЦЯ 3. Розв'язки СЛАР (7), які задовольняють умові $y_1 > 0$ і $y_2 > 0$

n	*y*1	*y*2	*n*	*y*1	*y*2	*n*	*y*1	*y*2
1	11,152	**2,062**	8	10,035	11,341	15	9,901	3,626
2	9,926	3,877	9	10,001	11,339	16	9,985	6,049
3	9,917	3,703	10	10,147	469,441	17	9,956	6,118
4	9,992	6,382	11	9,346	**470,984**	18	9,959	6,515
5	9,964	6,434	12	11,212	7,918	19	9,954	6,154
6	9,983	6,548	13	11,174	7,411	20	10,023	10,818
7	9,981	6,133	14	9,912	3,775	21	9,988	10,863

У нашому випадку одночасно додатних компонент y_1 та y_2 виявилося 21 і всі вони належать проміжку (2,062; 470,984). Розв'язування СЛАР (7) виконуємо за допомогою *Matlab*-функції linsolve ().

Крок 3. Обчислюємо статистичну характеристику отриманих на кроці 2 розв'язків, а саме, медіану *m* ([6]) масиву чисел, що утворений шляхом об'єднання $y_1^{(\neg)}(\neg = 1, 2, ..., 21)$ та $y_2^{(\neg)}(\neg = 1, 2, ..., 21)$.

Зокрема, для завади (5) маємо *m* = 9,955. Медіану розраховуємо за допомогою *Matlab*-функції median ().

Крок 4. Обчислюємо медіану *m*1 масиву чисел $y_1^{(\neg)}(\neg = 1, 2, ..., 21)$.

Крок 5. Обчислюємо медіану *m*2 масиву чисел $y_2^{(\neg)}(\neg = 1, 2, ..., 21)$.

Крок 6. Формуємо інтервал, границі якого дорівнюють interval = [min(*m*1, *m*2); max(*m*1, *m*2)].

Крок 7. Приймаємо рішення, що розв'язок СЛАР (7) належить інтервалу int1. У випадку завади (6) цей інтервал має вигляд [8,708; 11,04] і, очевидно, йому належить шукане значення (див. (5)).

Розглянемо вплив значення параметра *SNR* (signal-to-noise ratio – відношення сигнал/шум) на статистичну характеристику, що уведена на кроці 3 (медіанна) (див. табл. 4 та рис. 3).

ТАБЛИЦЯ 4. Зв'язок *SNR* з медіаною

n	Амплі-туда	*n*	Амплі-туда	*n*	Амплі-туда	*n*	Амплі-туда	*n*	Амплі-туда	*n*	Амплі-туда
1	16,2764	6	12,6945	11	10,2913	16	21,2766	21	10,8471	26	9,7068
2	17,2312	7	12,0582	12	8,2551	17	8,4976	22	9,7928	27	10,2059
3	15,7945	8	9,2437	13	36,4398	18	9,8082	23	9,5423	28	9,5655
4	28,2007	9	9,9170	14	8,5817	19	12,3413	24	9,8376	29	9,9035
5	11,1377	10	12,8335	15	8,7261	20	9,8617	25	9,3042	30	10,0677

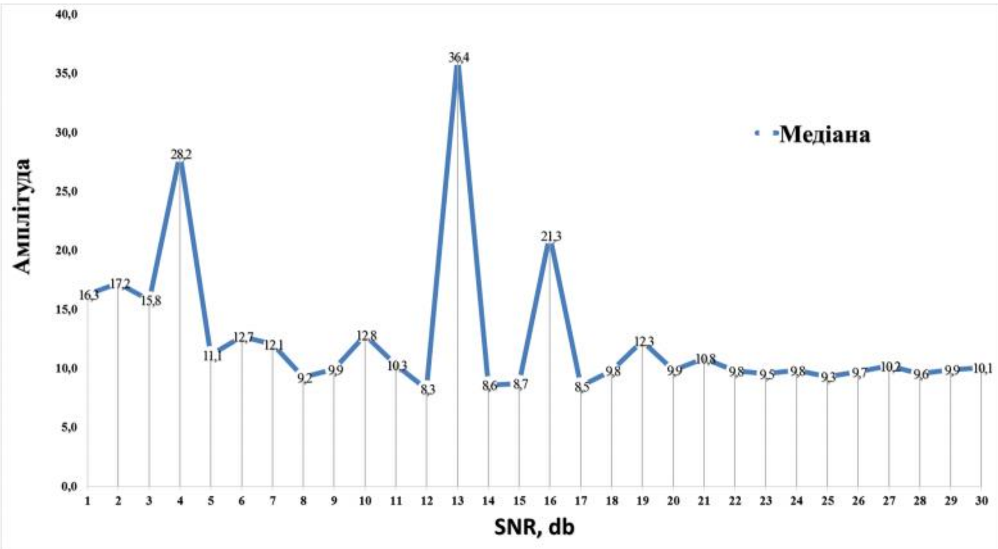

РИС. 3. Зв'язок SNR з медіаною отриманих розв'язків для 30 збурень правої частини (7)

З рис. 3 випливає, наприклад, що починаючи зі значення *SNR* >= 20*db* медіанна *m* = 9,8 і, таким чином, має незначне відхилення від справжнього значення 10 (див. (5)).

Для покращення статистичних характеристик розв'язків СЛАР пропонується використовувати послідовно множину СЛАР, яка створюється на основі використання фізичних особливостей ФПК згідно публікації [3]. Друга СЛАР має вигляд (табл. 5). У подальшому цю множину СЛАР будемо позначати *M*.

ТАБЛИЦЯ 5. Матриця $A_{(8x8)}$

$h[n]$	$A1$	$h[n]$	$A8$	$h[n]$	$A7$	$h[n]$	$A6$
1	– 2,14*E*– 06	57	– 0,002167	49	0,010266	41	– 0,022744
2	– 0,000260	58	– 0,003514	50	0,024643	42	– 0,095621
3	– 0,000809	59	– 0,003461	51	0,029792	43	– 0,130815
4	– 0,001658	60	– 0,002659	52	0,027860	44	– 0,134201
5	– 0,002659	61	– 0,001658	53	0,021653	45	– 0,114696
6	– 0,003461	62	– 0,000809	54	0,013880	46	– 0,082303
7	– 0,003514	63	– 0,000260	55	0,006630	47	– 0,046308
8	– 0,002167	64	– 2,14*E*– 06	56	0,001143	48	– 0,013952
33	1	25	0,088917	17	– 0,013952	9	0,001143
34	0,969196	26	0,234615	18	– 0,046308	10	0,006630
35	0,880695	27	0,403618	19	– 0,082303	11	0,013880
36	0,745562	28	0,580185	20	– 0,114696	12	0,021653
37	0,580185	29	0,745562	21	– 0,134201	13	0,027860
38	0,403618	30	0,880695	22	– 0,130815	14	0,029792
39	0,234615	31	0,969196	23	– 0,095621	15	0,024643
40	0,088917	32	1	24	– 0,022744	16	0,010266

Таким чином табл. 3 відрізняється від табл. 1 зміщенням на один стовпець вправо, так що останній стовпець стає на місце першого стовпця. Таке перетворення не змінює ні визначника, ні числа обумовленості отриманої матриці. Враховуючи можливість спостереження $\vec{b}+\vec{\varepsilon},$ можна отримати будь-яку скінчену кількість систем рівнянь з метою використання для оцінювання розв'язку системи. Наприклад, для восьми систем рівнянь ми отримуємо наступні результати (рис. 4).

З цього рисунку випливає, що, починаючи із значення *SNR* >= 9*db* медіана m = 9,94 має незначне відхилення від шуканого значення 10 і значення SNR на 11 *db* краще ніж при використанні одній системі рівнянь.

Розглянемо часові витрати на виконання кроків алгоритму розглянутого вище. Використано ПЕОМ з наступними апаратно-програмними характеристиками:

- процесор: Intel Pentium D 3.00 GHz;
- ОЗП: 3 ГБ ;
- ОС:Windows 7;
- ПЗ: *Matlab R*2016*b*.

Час виконання алгоритму:

- однією СЛАР – 1 хв. 12 сек;
- вісьма СЛАР – 9 хв. 36 сек;
- вісьма СЛАР у режимі паралельного виконання обробки множин СЛАР M (використовуючи 2 worker оператора parfor) – 5 хв. 11 сек.

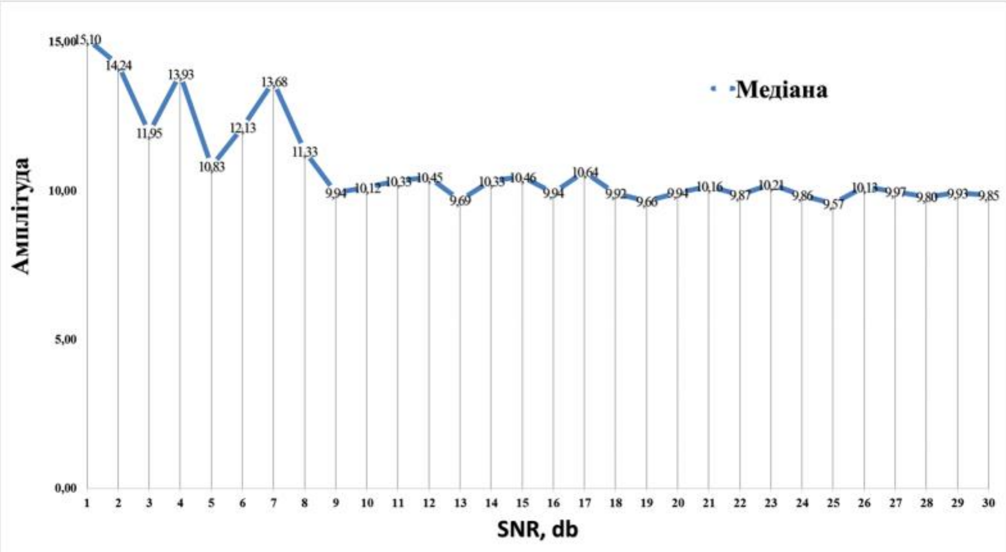

РИС. 4. Зв'язок SNR з медіаною отриманих розв'язків для 30 збурень правої частини (7) у 8 системах рівнянь

Висновки. Всі експерименти підтвердили коректність запропонованого алгоритму щодо приналежності значення розв'язку СЛАР побудованому інтервалу. Запропонований алгоритм оцінювання невідомих значень СЛАР може бути розпаралелений завдяки незалежності обчислювальних кроків його реалізації.

В.И. Масол, Е.А. Шевченко

АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Предлагается алгоритм оценивания неизвестных значений системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), особенности которых – плохая обусловленность, равенство (по модулю) неизвестных между собой, наличие помех (шума), действующих на свободные члены СЛАУ. Указанный алгоритм основан на возможности построения определенной совокупности СЛАУ с существенно меньшим числом обусловленности, чем число обусловленности начальной системы, с последующей статистической обработкой решений этих СЛАУ.

V.I. Masol, E.O. Shevchenko

ALGORITHM FOR ESTIMATING SOLUTIONS OF ILL-CONDITIONED SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

An algorithm for estimating unknown values of a system of linear algebraic equations (SLAEs) is proposed. The SLAEs have the following features: bad conditionality, equality of unknowns, presence of interference (noise), which influence free terms of the SLAE. This algorithm is based on the possibility of constructing a certain set of SLAEs with a significantly lower number of conditionality than that of the initial system followed by statistical processing of solutions of these SLAEs. Statistical processing consists in finding the median of the sample formed by a set of solutions and constructing the interval that includes an exact solution. The influence of interference values on the accuracy of the solutions obtained is analyzed. The examples of application of the algorithm are presented. Noted, that parallelization can be applied in the process of estimating the solutions of poorly conditioned SLAEs and this possibility is illustrated on the examples of improving signal processing.

Список літератури

1. Охріменко М.Г., Жуковська О.А., Купка О.О. Методи розв’язування некоректно поставлених задач: Навчальний посібник. К.: Центр учбової літератури, 2008. 166 с.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Учебник для студентов высших учебных заведений. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 456 с.
3. ZHAO Lin jun. FPGA Implementation of Square Root Raised Cosine Pulse Shaping Filter. Modern Electronics Technique. Jan. 2011. Vol. 34.
4. Галкин В.А. Цифровая мобильная радиосвязь. Учебное пособие для вузов. М.: Горячая линия. Телеком, 2007. 432 с.
5. Горбаченко В.И. Вычислительная линейная алгебра с примерами на MATLAB. Учебное пособие. СПб. 2011. 320 с.
6. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: ЛЕНАНД, 2015. 448 с.

Одержано 01.11.2018

Про авторів:

Масол Володимир Іванович,
доктор фізико-математичних наук,
професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
E-mail: vimasol@ukr.net

Шевченко Євген Олександрович,
аспірант Київського національного університету імені Тараса Шевченка.
E-mail: home20103010@gmail.com