КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.8

И.И. РЯСНАЯ

ОБ АДЕКВАТНОСТИ НЕЧЕТКОЙ ШКАЛЫ В ЗАДАЧАХ НЕЧЕТКОГО КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА

Рассматривается проблема адекватности результатов нечеткого кластерного анализа в условиях неопределенности, обусловленной вербальным описанием нечетких свойств эмпирических объектов. Для анализа данных используется нечеткая шкала измерения нечеткой меры сходства. Рассмотрены два способа построения нечеткой шкалы и исследованы условия их адекватности с позиций репрезентативной теории измерений.

Введение. Для построения и анализа математических моделей слабоструктурированных проблем в условиях неопределенности, возникающей при исследовании экономических, социально-экономических и других систем из-за неопределенности вербального описания свойств эмпирических объектов, целесообразно использовать репрезентативную теорию измерений (РТИ) [1 – 3].

В задачах нечеткого кластерного анализа [4] на основе сходства в многомерном пространстве нечетких характеристик эмпирических объектов необходимо в рамках РТИ построить и исследовать нечеткую шкалу измерения нечеткой меры сходства объектов [5, 6]. Однако для нечетких шкал измерения, в которых результаты измерения определяются на основе теории нечетких множеств, не исследованы проблемы формализации качественных описаний и измерений с позиций РТИ [7].

В статье рассмотрены проблемы формализации понятия «нечеткая шкала измерения нечеткой меры сходства» (далее «нечеткая шкала сходства») и исследованы два способа построения нечеткой шкалы сходства.

Основные понятия. В РТИ измерение рассматривается как построение шкал, позволяющих приписывать количественные оценки качественным характеристикам (свойствам) эмпирических объектов.

Для построения моделей в рамках РТИ понятие «структура» формализуется через понятие «система с отношениями». Системой с отношениями называется кортеж [2]:

$$\mathfrak{M} = \left\langle U, \{R_i\}_{i=1}^{n} \right\rangle,$$

где U – некоторое конечное множество, называемое носителем системы с отношениями, $R_i \subseteq U^{k_i}$ – k_i -арное отношение на U, k_i – положительное целое число, n – количество заданных отношений.

В случае, когда $U = \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, кортеж $\mathfrak{M}$ называется числовой системой с отношениями (ЧСО). Если U состоит из эмпирических объектов и отношения на U определены эмпирически, то $\mathfrak{M}$ называется эмпирической системой с отношениями (ЭСО). Если U состоит из математических объектов, не являющимися числами (например, векторов, матриц, функций), то кортеж $\mathfrak{M}$ называется математической системой с отношениями (МСО) [8].

Центральным понятием РТИ является шкала измерений [3]. Шкалой называется гомоморфное отображение ЭСО в ЧСО или МСО. При гомоморфизме из истинности отношения между объектами в ЭСО следует истинность соответствующего отношения между их образами в ЧСО (МСО) и наоборот. Отметим, что в РТИ шкалой также называется группа гомоморфных отображений, связанных между собой допустимым преобразованием [2]. Гомоморфное отображение ЭСО в ЧСО называют также одномерной шкалой, в одномерной шкале каждой градации свойств объектов эмпирической системы ставится в соответствие некоторое число, называемое шкальным значением [9].

В случае, когда носителем МСО является множество нечетких подмножеств, при описании измерений используется нечеткая шкала измерений, которая не рассматривается в вышеупомянутых классических работах по РТИ [7].

Как правило, рассматривают качественные и количественные шкалы, классификация которых предложена С. Стивенсом [1]. К качественным шкалам относят порядковую и номинальную шкалы. К количественным – шкалы отношений, интервалов и абсолютные шкалы. Тип шкалы определяется сохранением (инвариантностью) определенных отношений при допустимых преобразованиях шкальных значений. В номинальной шкале сохраняется отношение эквивалентности при взаимно-однозначных преобразованиях шкальных значений. В порядковой шкале инвариантным является отношение порядка при монотонных преобразованиях шкальных значений. В шкале интервалов инвариантно отношение интервалов, в шкале отношений инвариантно отношение шкальных значений. В абсолютных шкалах допустимы только тождественные преобразования шкальных значений, поэтому инвариантны любые отношения и допустимы любые операции над численными значениями измеренных характеристик объектов.

В рамках РТИ рассматриваются три основных проблемы построения шкал измерения: 1) проблема представления; 2) проблема единственности; 3) проблема адекватности. Проблему представления можно сформулировать так: требуется охарактеризовать формальные свойства использованных эмпирических отношений, а также показать, что они гомоморфны отношениям над элементами носителя в формальной модели (ЧСО или МСО) [3, 9]. Следовательно, первым и необходимым этапом построения шкалы является построение ЭСО [8], т. е. задание множества эмпирических объектов и существенных, в рамках решаемой задачи, отношений. Проблема единственности сводится к определению вида допустимых преобразований шкальных значений или типа шкалы измерения. Проблему адекватности, как правило, связывают с типом допустимых преобразований в используемых шкалах либо с сохранением истинности выводов, получаемых с помощью арифметических и/или логических операций над результатами измерений, либо с инвариантностью производных измерений (отношений, функций) [3, 7].

По способу измерений различают прямые или фундаментальные измерения и производные (косвенные или непрямые измерения). Прямое измерение определяется как непосредственное построение одномерной шкалы измерения. При производном измерении одномерная шкала строится на основе уже известных одномерных шкал, которые могут быть шкалами разного типа. Примером производного измерения является определение нечеткой меры сходства двух эмпирических объектов на основе результатов измерения нечетких свойств этих объектов.

Построение формальной модели и исследование адекватности нечеткой меры сходства. Нечеткая шкала определяется как гомоморфное отображение ЭСО в систему с отношениями на множестве нечетких подмножеств [7].

Пусть X – конечное множество объектов (элементов) эмпирической системы, W – конечное множество *нечетких* качественных свойств элементов множества X. Пусть свойство $w \in W$ имеет конечное множество $T = \left\{t_1,...,t_j,...,t_m\right\}$ вербальных значений (градаций, лингвистических термов) этого свойства, $m = m(w)$. Свойство $w \in W$ считаем измеримым, если $\forall x \in X$ можно определить множество значений $\left\{\eta_1(x),...,\eta_j(x),...,\eta_m(x) : \eta_j(x) \in [0,1]\right\}$, где $\eta_j(x)$ определяет степень принадлежности свойства w элемента x значению t_j, $j \in \{1,...,m\}$. Обозначим $\vec{\eta}(x) = \left(\eta_1(x),...,\eta_j(x),...,\eta_m(x)\right)$. В случае, когда элемент $x \in X$ обладает свойством w, то существует $\eta_j(x) \neq 0$; если же $x \in X$ не обладает свойством w, то $\vec{\eta}(x) = 0$.

Если значения t_j измеряются в одной и той же одномерной шкале, то результат измерения свойства w представляет собой *гомогенное* нечеткое множество. Если же они измеряются в различных шкалах по С. Стивенсу, то результат измерения – *гетерогенное* нечеткое множество [10].

Определение. Нечеткой мерой сходства на множестве X называется функция $\tilde{\tau}(x,y)$, удовлетворяющая условиям: 1) $\forall (x,y) \in X \times X$ $\tilde{\tau}(x,y) \in [0,1]$; 2) $\forall x \in X$ $\tilde{\tau}(x,x) = 1$ (рефлексивность); 3) $\forall (x,y) \in X \times X$ $\tilde{\tau}(x,y) = \tilde{\tau}(y,x)$ (симметричность).

Очевидно, что функция $\tilde{\tau}(x,y)$ определяет нечеткое множество, введенное Л. Заде. Нечеткая мера сходства задает на конечном множестве X нечеткое отношение сходства $\tilde{\tau}: X \times X \to [0,1]$.

Нечеткая мера сходства $\tilde{\tau}(x,y)$ должна определяться с учетом результатов измерения всех нечетких характеристик $w \in W$ для каждого $x \in X$, т. е. путем агрегирования с использованием нечетких логических операторов.

Способ вычисления значений $\tilde{\tau}(x,y)$ определяется как типом шкал измерения градаций свойств объектов эмпирической системы, так и теоретико-множественной интерпретацией семантических связок И, ИЛИ в форме нечетких логических операторов.

Нечетким аналогом семантической связки И является оператор нормы T, а связки ИЛИ – оператор конормы $\{$ [10]. В теории нечетких множеств существует значительная свобода в выборе операторов нормы и конормы. В данной работе используются операторы нормы и конормы, введенные Л. Заде:

$$\mathrm{T}\,(a,b) = \min(a,b),\quad \{\,(a,b) = \max(a,b),\ a,b \in [0,1],$$

и нечеткие операторы, введенные Я. Лукасевичем,

$$\mathrm{T}\,(a,b) = \max(0, a+b-1),\quad \{\,(a,b) = \min(1, a+b),\ a,b \in [0,1].$$

Для пояснения сущности проблем измерения построим нечеткую шкалу сходства для *одного* нечеткого качественного свойства $w \in W$ с вербальным описанием градаций (признаков). Такую шкалу будем называть *парциальной* нечеткой шкалой сходства. Случай $\vec{\eta}(x) = 0$ не рассматривается, так как при этом априори не выполняется условие рефлексивности нечеткой меры сходства.

Пусть $R: X \times T \to [0,1]$ – нечеткое бинарное отношение на $X \times T$, $T = \{t_1,...,t_j,...,t_m\}$, $\mu_R(x,t_j)$ – функция принадлежности, определяющая нечеткое отношение *R*, $\mu_R(x,t_j) \in [0,1]$, $x \in X$, $j \in \{1,...,m\}$.

Пусть F_T – множество всех нечетких подмножеств множества T, $\eta: X \to F_T$ – отображение, называемое *описанием измерений* свойства $w \in W$ такое, что $\forall t_j \in T \ \ \forall x \in X \ \ \eta_x(t_j) = \mu_R(x,t_j)$. Здесь и далее в аналогичных случаях $j = \overline{1,m}$. Обозначим $\eta(x) = \tilde{D}_x$, где $\tilde{D}_x = \left\{\left(t_j, \eta_x(t_j)\right) : t_j \in T\right\}$ – нечеткое подмножество множества T, называемое *описанием измерения* свойства $w \in W$ объекта $x \in X$. Значение $\eta_x(t_j)$ будем рассматривать как степень истинности высказывания «x обладает нечетким признаком t_j».

Гомоморфное отображение $\eta: X \to F_T$ определяет нечеткую шкалу измерения нечеткого свойства $w \in W$. Однако существование шкалы, т. е. гомоморфизм отображения η необходимо доказывать [3].

Обозначим $\Omega = \left\{ \tilde{D}_x : x \in X \right\}$. Пусть F_X – множество всех нечетких подмножеств множества X, $\delta : T \to F_X$ – отображение, называемое *описанием лингвистических термов* $t_j \in T$, такое, что $\forall x \in X$ $\forall t_j \in T$ $\delta_{t_j}(x) = \mu_R\left(x, t_j\right)$. Обозначим $\delta\left(t_j\right) = \tilde{E}_j$, где $\tilde{E}_j = \left\{ \left\langle x, \delta_{t_j}(x) \right\rangle : x \in X \right\}$ – нечеткое подмножество множества X, называемое *смыслом* лингвистического терма $t_j \in T$.

Пусть $\tilde{\tau}(x, y)$ – нечеткая мера сходства на *X*. Очевидно, что $\forall (x, y) \in X \times X$ *необходимым условием* сходства ($\tilde{\tau}(x, y) > 0$) эмпирических объектов $x, y \in X$ является наличие хотя бы одного общего признака, иначе говоря

$$\tilde{\tau}(x, y) > 0 \Leftrightarrow \left(\exists t_j \in T\right) : \left(x \in \operatorname{supp} \tilde{E}_j\right) \wedge \left(y \in \operatorname{supp} \tilde{E}_j\right). \tag{1}$$

Так как $\delta_{t_j}(x) = \eta_x\left(t_j\right)$ из (1) следует, что пересечение носителей $\operatorname{supp} \tilde{D}_x \cap \operatorname{supp} \tilde{D}_y \neq \varnothing$ также является необходимым условием сходства эмпирических объектов. Если $\operatorname{supp} \tilde{D}_x \cap \operatorname{supp} \tilde{D}_y = \varnothing$, то $\tilde{\tau}(x, y) = 0$. Следовательно,

$$\tilde{\tau}(x, y) > 0 \Leftrightarrow \left(\exists t_j \in T\right) : \left(\eta_x\left(t_j\right) > 0\right) \wedge \left(\eta_y\left(t_j\right) > 0\right). \tag{2}$$

Поскольку $T = \left\{t_j\right\}_{j=1}^{m}$, на основании (2) определим $\varphi\left(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y\right)$ следующим образом:

$$\varphi\left(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y\right) = \left(\left(\eta_x(t_1) > 0\right) \wedge \left(\eta_y(t_1) > 0\right)\right) \vee \ldots \vee \left(\left(\eta_x(t_m) > 0\right) \wedge \left(\eta_y(t_m) > 0\right)\right). \tag{3}$$

Заменяя в (3) неравенства на соответствующие значения принадлежностей, а логические операторы треугольными нормами T и конормами $\{$, получим:

$$\tilde{\varphi}\left(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y\right) = \mathop{\{}_{t_j \in T} \left(\mathrm{T}\left(\eta_x\left(t_j\right), \eta_y\left(t_j\right)\right)\right), \ \tilde{D}_x, \tilde{D}_y \in \Omega. \tag{4}$$

Очевидно $\tilde{\varphi}\left(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y\right) \in [0,1]$. Симметричность $\tilde{\varphi}\left(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y\right)$ следует из симметричности операторов нормы и конормы.

Если (4) удовлетворяет условию рефлексивности $\tilde{\varphi}\left(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y\right) = 1$, то нечеткую меру сходства $\tilde{\tau}^*$ определим следующим образом: $\tilde{\tau}^*\left(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y\right) = \tilde{\varphi}\left(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y\right)$, т. е.

$$\tilde{\tau}^*\left(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y\right) = \mathop{\{}_{t_j \in T} \left(\mathrm{T}\left(\eta_x\left(t_j\right), \eta_y\left(t_j\right)\right)\right), \ \tilde{D}_x, \tilde{D}_y \in \Omega. \tag{5}$$

Такой способ вычисления нечеткой меры сходства, основанный на непосредственной замене логических операторов их нечеткими аналогами, будем называть «прямым» способом.

Положим $\tilde{\tau}(x,y)=\tilde{\tau}^*\left(\tilde{D}_x,\tilde{D}_y\right)$. Тогда определены ЭСО $\mathfrak{M}_1=\langle X,\tilde{\tau}\rangle$ и МСО $\mathfrak{M}_2=\langle F_T,\tilde{\tau}^*\rangle$, отображение $\eta: X\to F_T$ является гомоморфизмом ($\tilde{\tau}\Leftrightarrow\tilde{\tau}^*$) и определяет нечеткую шкалу сходства. *Парциальной* нечеткой шкалой сходства будем называть кортеж $\langle\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2,\eta\rangle$, где $\eta: X\to F_T$, $\eta(X)=\Omega$.

Сформулируем теорему представления, в которой определяются условия существования нечеткой шкалы сходства. Пусть $\tilde{D}_x$ – гомогенное нечеткое множество. При рассмотрении теоремы представления полагают, что используется абсолютная шкала измерения, для которой допустимы только тождественные преобразования.

Теорема 1. Условие рефлексивности для нечеткой меры сходства (5), в общем случае, не выполняется.

Доказательство. При использовании в (5) операторов нормы и конормы, введенных Л. Заде, получим

$$\tilde{\tau}^*\left(\tilde{D}_x,\tilde{D}_y\right)=\max_{t_j\in T}\left(\min\left(\eta_x\left(t_j\right),\eta_y\left(t_j\right)\right)\right),\ \tilde{D}_x,\tilde{D}_y\in\Omega.$$

Вследствие идемпотентности оператора min условие рефлексивности нечеткой меры сходства принимает вид: $\tilde{\tau}^*\left(\tilde{D}_x,\tilde{D}_x\right)=\max_{t_j\in T}\left(\eta_x\left(t_j\right)\right)=1$.

Иначе говоря,

$$\forall x\in X\ \exists t_j:\eta_x\left(t_j\right)=1. \tag{6}$$

Следовательно, множество результатов измерений Ω должно состоять из нормированных нечетких множеств. В общем случае, это условие может быть не выполнено.

Оператор нормы по Я. Лукасевичу не может быть использован в (5), так как, когда сумма значений принадлежностей меньше 1, значение этой нормы равно нулю, тогда $\tilde{\tau}^*\left(\tilde{D}_x,\tilde{D}_x\right)=0$ и условие рефлексивности не выполняется. Если в (5) используем норму Л. Заде и конорму Я. Лукасевича, то получим $\tilde{\tau}^*\left(\tilde{D}_x,\tilde{D}_x\right)=\min\left(1,\sum_{t_j\in T}\eta_x\left(t_j\right)\right)$. В этом случае условие рефлексивности имеет вид

$$\forall x\in X\quad\sum_{t_j\in T}\eta_x\left(t_j\right)\geq 1, \tag{7}$$

что на практике не всегда будет выполнено.

Теорема доказана.

Перейдем к исследованию адекватности нечеткой меры сходства.

Теорема 2. Нечеткая мера сходства (5) *не адекватна* при измерениях значений функции принадлежности нечеткого свойства $w\in W$ в шкале отношений, интервалов или шкале порядка.

Справедливость теоремы следует из отсутствия инвариантности (условия (6), (7)) при измерениях в шкале отношений и интервалов. В шкале порядка не может использоваться условие (7) из-за недопустимости операции сложения. Очевидно, что условие (6) будет нарушаться при монотонных преобразованиях, которые допустимы в шкале порядка.

Таким образом, нечеткая мера сходства при «прямом» способе ее определения (5), который используется, например, в работах [11, 12], адекватна только тогда, когда значения функции принадлежности нечеткого свойства измеряются в абсолютной шкале, а также выполняется условие (6) или (7).

Коэффициент лингвистической корреляции. Рассмотрим другой способ вычисления нечеткой меры сходства, который по аналогии с коэффициентом корреляции, используемым в статистике, будем называть коэффициентом лингвистической корреляции. Такое название связано с тем, что для определения меры сходства необходимо предварительное вербальное (лингвистическое) описание «структуры» измеряемых свойств. Такое описание проводится на этапе построения модели ЭСО. Коэффициент лингвистической корреляции вычисляем по формуле

$$K_{lingv}(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{m(w_i)}\min\left(\eta_x(t_j),\eta_y(t_j)\right)\Big/\sum_{j=1}^{m(w_i)}\max\left(\eta_x(t_j),\eta_y(t_j)\right)\right), \quad (8)$$

где $m(w_i)$ – количество градаций свойства $w_i \in W$, $N=|W|$ – общее количество свойств элементов ЭСО.

Очевидно, что при измерении значений функций принадлежности в абсолютной шкале $K_{lingv}(x,x)=1$, $K_{lingv}(x,y)\in[0,1]$, $K_{lingv}(x,y)=K_{lingv}(y,x)$, т. е. выражение (8) определяет нечеткую меру сходства на *X*, тогда

$$\tilde{\tau}^*\left(\tilde{D}_x,\tilde{D}_y\right)=\sum_{j=1}^{m(w_i)}\min\left(\eta_x(t_j),\eta_y(t_j)\right)\Big/\sum_{j=1}^{m(w_i)}\max\left(\eta_x(t_j),\eta_y(t_j)\right) \quad (9)$$

определяет величину *парциальной* меры сходства по свойству $w_i \in W$.

В отличие от выражения (5), для обеспечения условия рефлексивности нечеткой меры сходства $\tilde{\tau}^*$ не требуются какие-либо ограничения на значения функций принадлежности нечетких свойств объектов.

Поскольку операторы min и max допустимы для всех рассматриваемых шкал измерения, то справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. Парциальная нечеткая мера сходства (9) *адекватна* при измерении значений функции принадлежности нечеткого качественного свойства $w_i \in W$ в шкале отношений.

Справедливость теоремы следует из инвариантности (9) при преобразовании подобия, которое допустимо в шкале отношений.

Теорема 4. При измерении значений функций принадлежности нечеткого качественного свойства в шкале порядка существует допустимое монотонное преобразование $\eta'_x\left(t_j\right)=\psi\left(\eta_x\left(t_j\right)\right)$, $t_j \in T$, приводящее к инвариантности значений функции принадлежности парциальной нечеткой меры сходства (9).

Такое преобразование легко построить на базе вычисления значения рангов и нормировке на максимальное значение рангов.

Очевидно, что при измерении значений функции принадлежности нечеткого качественного свойства $w \in W$ в шкале интервалов, парциальная нечеткая мера сходства, построенная на основе коэффициента лингвистической корреляции, также *инвариантна* после применения преобразования ψ к измеренным значениям функции принадлежности.

Инвариантность парциальных мер сходства приводит к инвариантности коэффициента лингвистической корреляции (8), использование которого обеспечивает адекватность результатов нечеткого кластерного анализа.

Выводы. В задачах нечеткого кластерного анализа на основе сходства нечетких свойств эмпирических объектов для доказательства адекватности результатов необходимо в рамках РТИ построить и исследовать нечеткую шкалу измерения нечеткой меры сходства. Существование нечеткой меры сходства должно быть доказано на основе доказательства существования гомоморфизма «структуры» эмпирических объектов и «структуры» формальной модели.

Построенную нечеткую шкалу необходимо исследовать на адекватность, т. е. на инвариантность меры сходства при допустимых преобразованиях функций принадлежности нечетких свойств эмпирических объектов. Способ построения инвариантной меры сходства зависит от типа шкал, в которых проводятся измерения градаций нечетких свойств эмпирических объектов.

Приведен пример адекватной согласно РТИ нечеткой шкалы измерения нечеткой меры сходства.

І.І. Рясна

ПРО АДЕКВАТНІСТЬ НЕЧІТКОЇ ШКАЛИ У ЗАДАЧАХ НЕЧІТКОГО КЛАСТЕРНОГО АНАЛІЗУ

Розглядається проблема адекватності результатів нечіткого кластерного аналізу за умов невизначеності, обумовленої вербальним описом нечітких властивостей емпіричних об’єктів. Для аналізу даних використовується нечітка шкала виміру нечіткої міри схожості. Розглянуто два способи побудови нечіткої шкали і досліджено умови їх адекватності з позицій репрезентативної теорії вимірювань.

I.I. Riasna

ON THE ADEQUACY OF FUZZY SCALE FOR FUZZY CLASTER ANALYSIS PROBLEMS

The problem of the adequacy of the results of fuzzy cluster analysis under conditions of uncertainty due to the verbal description of fuzzy properties of empirical objects is considered. For data analysis, a fuzzy measurement scale of a fuzzy measure of similarity is used. Two methods for constructing a fuzzy scale are considered, and the conditions for their adequacy are investigated from the standpoint of a representative measurement theory.

Список литературы

1. Luce R., Krantz D., Suppes P. and Tversky A. Foundations of Measurement: Vol. III. New York: Dover Publications, Inc., 2007. 356 p.
2. Пфанцагль И. Теория измерений. М.: Мир, 1976. 248 с.
3. Суппес П., Зинес Дж. Основы теории измерений. *Психологические измерения*. М.: Мир, 1967. С. 9 – 110.
4. Руспини Э.Г. Последние достижения в нечетком кластер-анализе. *Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения*. М.: Радио и связь, 1986. С. 114 – 132.
5. Рясная И.И. Кластерный анализ: проблема адекватности. KDS 2014. XX-ая Международная конференция «*Знание – Диалог – Решение*». Украина, Киев, 2014. С. 85 – 86.
6. Рясна І.І. Застосування репрезентативної теорії вимірювань до побудови нечітких шкал. Праці VII-ї Міжнародної школи-семінару «*Теорія прийняття рішень*». Ужгород, УжНУ, 2014. С. 220.
7. Блишун А.Ф. Сравнительный анализ методов измерения нечеткости. Изв. АН СССР. *Техническая кибернетика*. 1988. № 5. С. 152 – 175.
8. Клигер С.Л., Косолапов М.С., Толстова Ю.Н. Шкалирование при сборе и анализе социологической информации. М.: Наука, 1978. 107 с.
9. Толстова Ю.Н. Измерение в социологии. Курс лекций. М.: Инфра-М, 1998. 224 с.
10. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. М.: Наука, 1986. 312 с.
11. Benoit E., Foulloy L. Towards fuzzy nominal scales. *Measurement*. 2003. Vol. 34, N.1. P. 49 – 55.
12. Овчинников Р.Е., Рьера Т. О нечетких классификациях. *Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения*. М.: Радио и связь, 1986. С. 100 – 113.

Получено 05.11.2018

Об авторе:

Рясная Ирина Ивановна,
научный сотрудник Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.