КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.8

Н.В. ГРОМ, Н.В. СЕМЕНОВА

МОДЕЛЮВАННЯ ПАСИВНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ДВОХ ДВОПРОДУКТОВИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИСТЕМ ПРИ ЗОВНІШНЬОМУ ВПЛИВІ

Досліджується поведінка двох двопродуктових еволюційних систем, що пасивно кооперуються між собою, за допомогою засобів дискретного та динамічного програмування. Для знаходження оптимального розподілу зовнішніх ресурсів на заданому проміжку моделювання за вказаним розподілом внутрішніх ресурсів сформульовані і розв'язані три допоміжні оптимізаційні задачі. Отримані результати узгоджуються з «законом розумного егоїзму систем», введеним В.М. Глушковим для моделей, що описуються інтегральними рівняннями вольтерровського типу.

Вступ. Будь-яку біологічну, економічну системи в цілому чи окремі підприємства, організми, навіть феномен наукового прогресу можна змоделювати як дво-, три- та багатопродуктову еволюційну систему (ЕС) або систему, що розвивається (СР). Тому очевидно, що дослідження загальних властивостей та поведінки таких систем є актуальною задачею сьогодення. Фундаментальну базу теорії розвитку систем заклав у 80-х рр. XX ст. академік Глушков В.М. [1], яка була надалі розвинена, зокрема в роботах [1–5]. Зауважимо, що для згаданих моделей ЕС постановка оптимізаційних задач орієнтована переважно на 80-літній термін функціонування систем [4], через що для розв'язання таких задач необхідно задіювати доволі складний математичний апарат. Для моделювання на порівняно невеликий проміжок часу доцільно розглядати такі моделі в термінах дискретної оптимізації (особливо, коли неможливо описати неперервними функціями виробничий процес, коли змінні моделей дискретні) [6, 7]. Окрім того, така постановка проблеми значно полегшує її розуміння.

Мета статті – на заданому проміжку моделювання знайти оптимальний розподіл зовнішніх ресурсів між двома пасивно взаємодіючими двопродуктовими еволюційними системами (ДЕС) за вказаним розподілом внутрішніх ресурсів.

Очевидно, що поставлена у статті задача оптимального розподілу зовнішніх ресурсів між двома пасивно взаємодіючими двопродуктовими системами за заданим розподілом внутрішніх ресурсів є важливою для практики.

Наукова новизна: вперше динамічні моделі ДЕС, сформульовані В.М. Глушковим у вигляді інтегральних рівнянь вольтеррівського типу, описуються у термінах дискретної оптимізації; отримані результати дозволяють порівняно легко проілюструвати дію закону «розумного егоїзму» систем.

1. Побудова загальної моделі розвитку двох двопродуктових еволюційних систем. ДЕС складається з двох підсистем – підсистеми самовдосконалення *А*, яка виготовляє продукти I роду (в економічних системах вони вимірюються, наприклад, у робочих місцях, у біологічних таким продуктом може бути швидкість росту загальної біомаси рослин), необхідні для функціонування самої системи; та підсистеми виконання головної функції *Б*, що випускає продукти II роду (детальний опис див. у [1, 2, 4]). Час моделювання будемо вважати дискретним, розбитим на *n* періодів, які не обов'язково рівні. Таким чином функції, якими будемо описувати поведінку ЕС, на відміну від інтегральних функцій Глушкова, втрачають властивість неперервності, що краще відображає реальний стан речей для порівняно недовготривалого моделювання.

Рівняння двох пасивно взаємодіючих ДЕС (які не обмінюються між собою внутрішніми, тобто виготовленими у підсистемі $A_i, i = 1,2,$ та кінцевими продуктами) можна записати за допомогою рекурентних співвідношень:

$$m_{ij} = \alpha_i y_{i;\,j-1} m_{i;\,j-1} + x_{ij} z_{ij} f, \tag{1}$$

$$c_{ij} = \beta_i \left(1 - y_{i;\,j-1}\right) m_{i;\,j-1} + k_c \left(1 - x_{ij}\right) z_{ij} f, \tag{2}$$

$$C_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}, \tag{3}$$

де m_{i0} – початкова кількість продуктів I роду в *i*-й системі (задана); m_{ij} – кількість РМ в *i*-й системі на *j*-у етапі моделювання; c_{ij} – кількість продуктів II роду в *i*-й системі на *j*-у етапі; α_i – ефективність одного продукту I роду в підсистемі A_i; β_i – відповідно, ефективність одного продукту I роду в підсистемі $Б_i$; $y_{i,\,j-1}$ – частина внутрішніх продуктів, що використовується в *j*-й момент моделювання підсистемою A_i; *f* – кількість зовнішніх ресурсів, що на кожному етапі направляються до обох систем; k_c – коефіцієнт узгодження розмірностей зовнішнього ресурсу та вихідного продукту (*f* і m_{ij} однієї розмірності); z_{ij} – частина зовнішнього ресурсу, що направляється в *i*-у систему на *j*-у етапі; x_{ij} – частина зовнішнього ресурсу *i*-ої системи, що направляється у підсистему A_i на *j*-у етапі; *n* – кількість етапів моделювання; C_i – кількість продуктів II роду, виготовлених за час моделювання у підсистемі $Б_i$; $i = 1,2$, $j = 1..n$, $0 \le y_{i;\,j-1} \le 1$, $0 \le x_{ij} \le 1$, $0 \le z_{ij} \le 1$. Розписавши рівняння (1), (2), отримаємо:

$$m_{ij} = \alpha_i^j m_{i0} \prod_{l=0}^{j-1} y_{il} + \sum_{l=1}^{j} \left(\alpha_i^{j-l} x_{il} z_{il} \prod_{p=l}^{j-1} y_{ip} \right) f, \quad (4)$$

$$c_{ij} = \beta_i \left(1 - y_{i\,j-1}\right) \left(\alpha_i^{j-1} m_{i0} \prod_{l=0}^{j-2} y_{il} + \sum_{l=1}^{j-1} \left(\alpha_i^{j-l-1} x_{il} z_{il} \prod_{p=l}^{j-2} y_{ip} \right) f \right) + k_c \left(1 - x_{i\,j}\right) z_{ij} f, \quad (5)$$

за умови, що $\prod_{l=j}^{j-1} a_l \triangleq 1$, $\sum_{l=j}^{j-1} a_l \triangleq 0$, $j \in \{0; N\}$, a_l – довільна функція.

Для уникнення моделювання неефективних ЕС покладемо:

$$\beta > k_c, \ \alpha > 1, \ y_{i;\,n-1} \equiv 0. \quad (6)$$

2. Постановка загальної оптимізаційної задачі. У двох пасивно взаємодіючих ДЕС при заданих вхідних даних α_i, β_i, m_{io}, f, k_c, знайти такий оптимальний розподіл внутрішніх ресурсів між підсистемами кожної системи (тобто, такі $y_i = \left(y_{i0}, ..., y_{i;n-1}\right)$, $x_i = \left(x_{i1}, ..., x_{in}\right)$, $i = \overline{1;2}$), що доставляє максимум функції:

$$\max \sum_{i=1}^{2} C_i\left(y_i, x_i, z_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{n} \left[\beta_i \left(1 - y_{i\,j-1}\right) \left(\alpha_i^{j-1} m_{i0} \prod_{l=0}^{j-2} y_{il} + \sum_{l=1}^{j-1} \left(\alpha_i^{j-l-1} x_{il} z_{il} \prod_{p=l}^{j-2} y_{ip} \right) f \right) + k_c \left(1 - x_{ij}\right) z_{ij} f \right]. \quad (7)$$

Для розв'язання поставленої задачі доведемо ряд теорем.

Теорема 1. Якщо розвиток деякої ДЕС задано рекурентними співвідношеннями:

$$m_j = \alpha y_{j-1} m_{j-1}, \quad (8)$$

$$c_j = \beta\left(1 - y_{j-1}\right) m_{j-1}, \quad (9)$$

$$C\left(y\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j, \quad (10)$$

α, β, m_0 – задані, $y = \left(y_0, \ldots, y_{n-1}\right)$, $0 \le y_{j-1} \le 1$, $j = 1..n$, то максимум функції $C\left(y\right)$ досягається у точці $y^{\max} = \left(1, 1, \ldots, 1, 0\right)$, $C\left(y^{\max}\right) = \beta \alpha^{n-1} m_0$.

Доведення. Розписавши формули (8) – (10), отримаємо:

$$m_j\left(y\right) = \alpha^j m_0 \prod_{l=0}^{j-1} y_l,$$

$$c_j\left(y\right) = \beta\left(1 - y_{j-1}\right) \alpha^{j-1} m_0 \prod_{l=0}^{j-2} y_l,$$

$$C\left(y\right) = \beta m_0 \sum_{j=1}^{n} \left[\left(1 - y_{j-1}\right) \alpha^{j-1} \prod_{l=0}^{j-2} y_l \right]. \quad (11)$$

Із формули (11) очевидно, що умова (6) дозволяє уникнути неефективних випадків: при $y_{n-1} \equiv 0$ максимізується останній доданок $c_n(y)$, не погіршуючи всі інші. Отже на (n – 1)-му етапі всі наявні внутрішні ресурси слід направити в підсистему *Б* для виконання основної функції системи.

Іншу частину теореми доведемо методом математичної індукції. Нехай на (n – 2)-у етапі $(1-y_{n-2})\alpha^{n-2}m_0\prod_{l=0}^{n-3}y_l$ внутрішніх ресурсів направлено в підсистему *Б*, де вони на (n – 1)-у етапі створять $\beta(1-y_{n-2})\alpha^{n-2}m_0\prod_{l=0}^{n-3}y_l$ кінцевих продуктів.

Якщо ці ресурси залишити в підсистемі *А*, тоді на n-му етапі (враховуючи те, що на (n – 1)-му етапі всі внутрішні ресурси перекидаються із підсистеми *А* в підсистему *Б*) вони створять $\beta\alpha(1-y_{n-2})\alpha^{n-2}m_0\prod_{l=0}^{n-3}y_l$ кінцевих продуктів, що в α разів більше, ніж у попередньому випадку. Оскільки $\alpha > 1$ (6), то для оптимізації необхідно, щоб $y_{n-2} \equiv 1$.

Проводячи аналогічні обчислення для кожного етапу в зворотному порядку, приходимо до висновку, що для отримання оптимального результату необхідно, щоб $y_j \equiv 1$, $j = [0,(n-2)]$. Теорему доведено.

Дана теорема наочно ілюструє дію закону «розумного егоїзму системи»: для того, щоб система успішно функціонувала протягом досить великого часового проміжку, системі необхідно значну частину всіх ресурсів (а іноді і всі ресурси) направляти насамперед на свої внутрішні потреби, самовдосконалення, і лише наприкінці – на виконання головної функції [4, 5].

Теорема 2. Якщо у діяльність ДЕС залучається зовнішній ресурс, тобто її розвиток заданий умовою (6) та рекурентними співвідношеннями:

$$m_j = \alpha y_{j-1}m_{j-1} + x_j f, \qquad (12)$$

$$c_j = \beta(1-y_{j-1})m_{j-1} + k_c(1-x_j)f, \qquad (13)$$

$$C(y,x) = \sum_{j=1}^{n} c_j,$$

де $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_0,\dots,y_{n-1})$, α,β,m_0,f,k_c задані, j = 1,..., n, то максимум функції $C(y,x)$ досягається у точці $x^{\max} = (1,1,\dots,1,0)$.

Доведення. Розписавши формули (12), (13), здійснивши елементарні перетворення та позначивши

$$E_n = \sum_{j=1}^{n}\left[\beta(1-y_{j-1})\alpha^{j-1}m_0\prod_{l=0}^{j-2}y_l + k_c f\right], \quad h_{jl} = \beta(1-y_{j-1})\alpha^{j-l-1}\prod_{p=l}^{j-2}y_p, \quad j = 2..n,$$

$l = [1;(j-1)]$, отримаємо:

$$C(y,x) = E_n + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{j-1}x_l h_{jl} - k_c x_j\right)f. \qquad (14)$$

Змінимо порядок сумування в другому доданку у формулі (14), отримаємо:

$$C(y,x)=E_n+\sum_{j=1}^{n}x_j\left(\sum_{l=j+1}^{n}h_{lj}-k_c\right)f=E_n+\sum_{j=1}^{n}x_j\left(\sum_{l=j+1}^{n}\left(\beta\left(1-y_{l-1}\right)\alpha^{l-j-1}\prod_{p=j}^{l-2}y_p\right)-k_c\right)f.$$

Оскільки $\sum_{l=n+1}^{n}h_{ln}\triangleq 0$, то $x_n\equiv 0$. Враховуючи (6), обчислюємо: $\sum_{l=j+1}^{n}\left(\beta\left(1-y_{l-1}\right)\alpha^{l-j-1}\prod_{p=j}^{l-2}y_p\right)>k_c$. Отже, для отримання максимального результату необхідно, щоб $x_j=1$, $j=\left[1;(n-1)\right]$. Теорему доведено.

Тобто знову спрацьовує закон «розумного егоїзму системи»: для того, щоб система досягла оптимального результату на заданому проміжку моделювання, всі зовнішні ресурси на всіх етапах, крім останнього, слід спрямовувати в підсистему самовдосконалення *А*, і лише на останньому етапі – в підсистему виконання головної функції *Б*.

Зауважимо, що у випадку неперервності функцій $m(t)$ і $c(t)$, (t^*– момент часу, у який необхідно всі ресурси, як зовнішні, так і внутрішні, направити в підсистему *Б*) зазвичай обчислюється лише наближено, а описуючи моделі ДЕС термінами дискретної оптимізації, можна точно обчислити, що вказану дію слід здійснити на (n – 1)-у етапі.

Оскільки теореми 1, 2 справедливі й для випадку двох і більше пасивно взаємодіючих між собою ДЕС, то розв'язок задачі 1 буде таким: функція (7) досягає свого максимуму в точці $\left(y_i^{\max},x_i^{\max}\right)$, де $y_i^{\max}=\left(1,1,\ldots,1,0\right)$, $x_i^{\max}=\left(1,1,\ldots,1,0\right)$. $C_i\left(y_i^{\max},x_i^{\max}\right)=\beta_i\left(\alpha_i^{n-1}m_{i0}+\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_i^{n-j-1}z_{ij}f\right)+k_c z_{in}f$.

3. Моделювання процесу оптимального розподілу між двома ДЕС зовнішніх ресурсів при заданому розподілу внутрішніх.

Сформулюємо наступну оптимізаційну задачу. Для двох пасивно взаємодіючих ДЕС (3) – (7) при заданих вхідних даних α_i, β_i, m_{i0}, f, k_c, y_i, x_i, i = 1,2, знайти такий розподіл зовнішніх ресурсів між системами (тобто значення $\mathbf{z_i}=\left(z_{i1},...,z_{in}\right)$), який доставляє максимум функції $\sum_{i=1}^{2}C_i\left(y_i,x_i,z_i\right)$ (7).

Розв'язання. Розписавши функцію (7) і поклавши $z_{1j}\equiv z_j$, $z_{2j}\equiv 1-z_j$, $j=1,...,n,$ $z=\left(z_1,...,z_n\right)$,

$$D_n=\sum_{j=1}^{n}[\sum_{i=1}^{2}\left(\beta_i\left(1-y_{i\,j-1}\right)\alpha_i^{j-1}m_{i0}\prod_{l=0}^{j-2}y_{il}\right)+$$

$$+\beta_2\left(1-y_{2\,j-1}\right)\sum_{l=1}^{j-1}\left(\alpha_2^{j-l-1}x_{2l}\prod_{p=l}^{j-2}y_{2p}\right)f+k_c\left(1-x_{2j}\right)f],$$

$$g_{jl} = \beta_1\left(1-y_{1\,j-1}\right)\alpha_1^{j-l-1}x_{1l}\prod_{p=l}^{j-2}y_{1p} - \beta_2\left(1-y_{2\,j-1}\right)\alpha_2^{j-l-1}x_{2l}\prod_{p=l}^{j-2}y_{2p}, \qquad (15)$$

$j = 2..n$, $l = [1; j-1]$, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{2} C_i\left(y_i, x_i, z\right) = D_n + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{j-1} z_l g_{jl} + z_j k_c\left(x_{2j} - x_{1j}\right)\right) f\,. \qquad (16)$$

Замінивши порядок сумування у (16), отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{2} C_i\left(y_i, x_i, z\right) = D_n + \sum_{j=1}^{n} z_j\left(\sum_{l=j+1}^{n} g_{lj} + k_c\left(x_{2j} - x_{1j}\right)\right) f\,. \qquad (17)$$

Зробивши заміну змінних у (15) $j \to l$, $l \to j$, підставивши отримане у формулу (17) та винісши спільні множники за дужки, отримаємо, що функція (7) досягає свого максимуму при

$$z_j^{\max} = \begin{cases} 1, \text{якщо} \quad \chi > 0, \\ 0, \text{ в протилежному випадку,} \end{cases}$$

$$\chi = x_{1j}\left[\beta_1\sum_{l=j+1}^{n}\left(\prod_{p=j}^{l-2} y_{1p}\right)\left(1-y_{1;\,l-1}\right)\alpha_1^{l-j-1} - k_c\right] -$$

$$-x_{2j}\left[\beta_2\sum_{l=j+1}^{n}\left(\prod_{p=j}^{l-2} y_{2p}\right)\left(1-y_{2;\,l-1}\right)\alpha_2^{l-j-1} - k_c\right],\ j = 1,...,n\,.$$

Оскільки $\sum_{l=n+1}^{n} g_{lj} \triangleq 0$, то для оптимізації виробництва необхідно, щоб

$$z_n^{\max} = \begin{cases} 1, \text{якщо } x_{1n} < x_{2n}, \\ 0, \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

тобто на останньому етапі всі зовнішні ресурси слід направити в ту систему, в якій більша частка зовнішнього ресурсу спрямовується у другу підсистему. Порівнюючи із першою задачею, бачимо аналогію: у випадку однієї ДЕС всі ресурси зовнішні та внутрішні слід направляти в підсистему *А* на всіх, крім останнього, етапах моделювання, а на останньому – в підсистему *Б*.

Теорема 3. Якщо у системі (3) – (6) покласти $y_i = y_i^{\max}$, $i = 1, 2$, то максимум функції (7) досягається у точці $z^* = \left(z_1^*, \ldots, z_n^*\right)$,

$$z_j^* = \begin{cases} 1, \text{якщо } x_{1j}\left(\beta_1\alpha_1^{n-j-1} - k_c\right) > x_{2j}\left(\beta_2\alpha_2^{n-j-1} - k_c\right), \\ 0, \text{ в протилежному випадку,} \end{cases} \quad j = \left[1; (n-1)\right].$$

Доведення. Підставивши у формулу (17) умови теореми, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{2} C_i\left(y_i^{\max}, x_i, z_i\right) = D_n + \sum_{j=1}^{n} z_j\left(g_{nj} + k_c\left(x_{2j} - x_{1j}\right)\right) f\,. \qquad (18)$$

Розписавши формулу (18) та врахувавши, що $g_{nn} \triangleq 0$, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{2} C_i\left(y_i^{\max}, x_i, z_i\right) =$$
$$= D_n + \sum_{j=1}^{n-1} z_j\left(\beta_1\alpha_1^{n-j-1}x_{1j} - \beta_2\alpha_2^{n-j-1}x_{2j} + k_c\left(x_{2j} - x_{1j}\right)\right) f + z_n k_c\left(x_{2n} - x_{1n}\right) f.$$

Виконавши елементарні перетворення, переконуємось у справедливості теореми 3.

Як бачимо, тут значення z_j залежить від показників ефективності кожної підсистеми (при достатньо великому терміні моделювання важливим, особливо на перших етапах, залишається тільки показник ефективності підсистем A_i) та частки зовнішнього ресурсу, що направляється на j-у етапі у кожну підсистему.

Теорема 4. Якщо у системі (3) – (6) покласти $y_i = y_i^{\max}$, $x_i = x_i^{\max}$, $i = 1, 2$, то максимум функції (7) досягається у точці $z^{**} = \left(z_1^{**}, \ldots, z_n^{**}\right)$,

$$z_j^{**} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \beta_1\alpha_1^{n-j-1} > \beta_2\alpha_2^{n-j-1}, \\ 0, \text{ у протилежному випадку}, \end{cases} \quad j = \left[1; (n-1)\right]. \tag{19}$$

Доведення. Оскільки $x_{1n} = x_{2n} = 0$, то значення z_n, як видно із (17), не впливає на кінцевий результат. Враховуючи умови теореми у формулі (18) розпишемо D_n, зробивши заміну змінних $l \to j$. Отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{2} C_i\left(y_i^{\max}, x_i^{\max}, z_i\right) = \sum_{i=1}^{2}\beta_i\alpha_i^{n-1}m_{i0} + \left(\beta_2\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_2^{n-j-1} + k_c\right) f + \sum_{j=1}^{n-1} z_j\left(\beta_1\alpha_1^{n-j-1} - \beta_2\alpha_2^{n-j-1}\right) f.$$

Теорему доведено.

4. Знаходження сумарної кількості продуктів другого роду, створених двома ДЕС при оптимальному розподілі зовнішніх та внутрішніх ресурсів між ними. Сформулюємо задачу таким чином: обчислити значення

$$\sum_{i=1}^{2} C_i\left(y_i^{\max}, x_i^{\max}, z_i^{**}\right).$$

Розв'язання. Очевидно, що при $\alpha_{i_1} < \alpha_{i_2}$, $\beta_{i_1} < \beta_{i_2}$:

$$\sum_{i=1}^{2} C_i\left(y_i^{\max}, x_i^{\max}, z_i^{**}\right) = \sum_{i=1}^{2}\beta_i\alpha_i^{n-1}m_{i0} + \left(\beta_{i_2}\sum_{j=2}^{n-1}\alpha_{i_2}^{n-j-1} + k_c\right) f.$$ У випадку $\beta_{i_1}\alpha_{i_1} < \beta_{i_2}\alpha_{i_2}$, $\beta_{i_1} > \beta_{i_2}$ маємо:

$$\sum_{i=1}^{2} C_i\left(y_i^{\max}, x_i^{\max}, z_i^{**}\right) = \sum_{i=1}^{2}\beta_i\alpha_i^{n-1}m_{i0} + \left(\beta_{i_2}\sum_{j=2}^{n-2}\alpha_{i_2}^{n-j-1} + \beta_{i_1} + k_c\right) f.$$

Розглянемо останній випадок $\alpha_{i_1} < \alpha_{i_2}$, $\beta_{i_1}\alpha_{i_1} \geq \beta_{i_2}\alpha_{i_2}$. Нехай j^* – найбільше натуральне число, для якого виконується нерівність $\beta_{i_1}\alpha_{i_1}^{n-j} \geq \beta_{i_2}\alpha_{i_2}^{n-j}$. Враховуючи умову (19) обчислюємо:

$$\sum_{i=1}^{2} C_i\left(y_i^{\max}, x_i^{\max}, z_i^{**}\right) = \sum_{i=1}^{2}\beta_i\alpha_i^{n-1}m_{i0} + \left(\beta_{i_2}\sum_{j=2}^{j^*-1}\alpha_{i_2}^{n-j} + \beta_{i_1}\sum_{j=j^*}^{n}\alpha_{i_1}^{n-j} + k_c\right) f.$$

Зауважимо, що чим більше значення α_{i_2} у порівнянні з α_{i_1}, тим ближче j^* до *n*. Це означає, що коли проміжок планування доволі великий, на абсолютно більшій його частині всі зовнішні ресурси слід направляти в ту систему, у якій ефективніша перша підсистема, і лише на кількох останніх етапах – у ту, в якій значення $\beta_i \alpha_i$ більше. Отже, закон «розумного егоїзму системи» можна проінтерпретувати і для двох пасивно взаємодіючих еволюційних систем.

Висновки. У випадку, коли у функціонуванні системи не задіяний зовнішній ресурс, максимальний результат отримується при направленні всіх наявних внутрішніх ресурсів у підсистему самовдосконалення системи майже на всіх, крім останнього етапах планування, а на останньому всі ресурси слід спрямувати у другу підсистему для виконання головної функції системи.

У випадку, коли у функціонуванні однієї системи задіяний зовнішній ресурс, максимальний результат отримується при направленні на всіх, крім останнього, етапах планування, всіх зовнішніх та внутрішніх ресурсів у першу підсистему, а на останньому – в другу.

У випадку, коли у функціонуванні двох пасивно взаємодіючих систем задіяний зовнішній ресурс, максимальний результат досягається при направленні всіх внутрішніх ресурсів кожної системи в підсистеми самовдосконалення на всіх, крім останнього, етапах, а на останньому етапі – при спрямуванні всіх внутрішніх ресурсів у підсистеми виконання головної функції систем, а весь зовнішній ресурс на переважній більшості етапів планування слід спрямовувати у ту систему, в якій вищий показник α_i, і лише на кількох останніх етапах – у ту, в якій показник $\beta_i \alpha_i^j$ на цих етапах вищий.

Н.В. Гром, Н.В. Семенова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАССИВНОЙ КООПЕРАЦИИ ДВУХ ДВУХПРОДУКТОВЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ ПРИ ВНЕШНЕМ ВЛИЯНИИ

Исследуется поведение двух двухпродуктовых пассивно кооперирующихся между собой эволюционных систем с помощью средств дискретной оптимизации. Для нахождения оптимального распределения внешних ресурсов на заданном промежутке моделирования при указанном распределении внутренних ресурсов сформулированы и решены три вспомогательные оптимизационные задачи. Полученные результаты согласуются с «законом разумного эгоизма систем», выведенным В.М. Глушковым для моделей, описываемых интегральными уравнениями вольтерровского типа.

N.V. Hrom, N.V. Semenova

PASSIVE COOPERATION OF TWO TWO-PRODUCT EVOLUTIONAL SYSTEMS UNDER EXTERNAL INFLUENCE MODELING

In the article, a behavior of two two-product passively cooperating evolutional systems is described in terms of discrete optimization. In order to find an optimal distribution of external resources during the modeling time under given internal resources distribution, three auxiliary optimization problems and four theorems are solved and proved. The results obtained conform to the V. Glushkov «Law of systems reasonable egoism» for the models described by Volterra integral equations.

Список літератури

1. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983. 350 с.
2. Бугерко Н.В., Гирлин Об одной задаче кооперативного взаимодействия двухпродуктовых развивающихся систем. *Современные наукоемкие технологии*. 2013. № 6. С. 49–53.
3. Гирлин С.К., Билюнас А.В. Аналитическое решение задачи оптимального распределения внешних ресурсов между подсистемами двухпродуктовой развивающейся системы. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 6. С. 114–121.
4. Girlin S., Ivanov V. Mathematical Theory of Development. A Course of Lectures: учебное пособие для студентов математических специальностей. Симферополь: ИТ «АРИАЛ», 2014. 140 с.
5. Girlin S., Bugerko N. Three Laws of Optimal Development [Електронний ресурс]. *International Journal of Applied and Fundamental Research*. – 2014. http://www.science-sd.com/457-24536.
6. Гром Н.В., Семенова Н.В. Оптимізація функціонування двопродуктової еволюційної системи в термінах дискретного програмування. VIII Міжнародна школа-семінар: *«Теорія прийняття рішень»*. Ужгород, 26.09 – 01.10. 2016. С. 98 – 99.
7. Семенова Н.В., Колечкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. Київ: Наукова думка, 2009. 266 с.

Одержано 07.11.2017

Про авторів:

Гром Наталія Валентинівна,
аспірантка Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
E-mail: hrom.nv@gmail.com

Семенова Наталія Володимирівна,
доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.
E-mail: nvsemenova@meta.ua