КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Математическое моделирование

УДК 517.9:519.6

А.В. ГЛАДКИЙ, Ю.А. ГЛАДКАЯ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ С УСРЕДНЕНИЕМ

Рассматривается задача численного моделирования акустических полей в подводных неоднородных волноводах на основании волнового параболического уравнения типа Шредингера. Предложена явная трехслойная разностная схема с усреднением, исследована ее устойчивость и получено условие устойчивости по начальным данным.

© А.В. Гладкий, Ю.А. Гладкая, 2018

Введение. В настоящее время при исследовании акустических полей в океанических и атмосферных волноводах важную роль играют методы математического моделирования [1–5].

С математической точки зрения звуковые поля описываются эллиптическим волновым уравнением Гельмгольца, численное решение которого связано с известными вычислительными трудностями. Один из подходов к расчету акустических полей состоит в использовании параболических аппроксимаций, что позволяет свести решение краевых задач к решению задачи Коши для параболического уравнений типа Шредингера с комплекснозначным несамосопряженным оператором.

Известно, что явные двухслойные разностные схемы решения начально-краевых задач для уравнений типа Шредингера безусловно неустойчивы.

В данной работе для численного решения волнового уравнения типа Шредингера предлагается подход к построению и исследованию устойчивости явной трехслойной разностной схемы с усреднением.

Постановка задачи. При описании акустического поля в осесимметрическом волноводе $G=\{\ r_0<r<\infty, 0<z<L, r_0>0\ \}$, где (r,z) – цилиндрические кординаты и ось z направлена вертикально вниз, широко используется волновое параболическое уравнение [2 – 5]

$$2ik_0\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k_0^2(n^2(r,z)-1+ +i\upsilon(r,z))\,p=0. \qquad (1)$$

Здесь $p(r,z)$ – комплекснозначная функция; $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица; $k_0 = 2\pi f / c_0$ – волновое число; $n(r,z) = c_0 / c(r,z)$, $\upsilon(r,z) \geq 0$ – непрерывные достаточно гладкие функции (коэффициенты преломления и поглощения соответственно).

Дифференциальное уравнение (1) является базовым для определения дальнего комплекснозначного акустического давления $P(r,z)$, создаваемого точечным гармоническим источником. Вне источника это давление удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+k_0^2(n^2(r,z)+i\upsilon(r,z))P=0$$

и при $k_0 r >> 1$ представляется в виде $P(r,z)=H_0^{(1)}(k_0 r)\,p(r,z)$, где $H_0^{(1)}(\cdot)$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка. Для волн, распространяющихся в направлениях, близких к горизонтальному, комплекснозначная амплитуда $p(r,z)$ удовлетворяет псевдодифференциальному уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial r}+ik_0 p - ik_0\left(E+Q\right)^{1/2} p = 0, \qquad (2)$$

где E – единичный оператор, $Qp=\left(\left(n^2(r,z)-1+i\upsilon(r,z)\right)E+\frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)p$.

Подставляя в (2) приближенное выражение оператора корня квадратного в виде $(E+Q)^{1/2} \cong E+\frac{1}{2}Q,$ получаем параболическое волновое уравнение (1).

Отметим, что область эффективного использования уравнения (1) для моделирования акустических волн ограничена углами распространения до горизонтали, не превышающими 12°.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (1), ограничиваясь средой без потерь и мягкими границами волновода:

$$2ik_0\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k_0^2(n^2(r,z)-1)p=0, (r,z)\in G, \qquad (3)$$

$$p_{|z=0}=0,\; p_{|z=H}=0,\, r_0 \leq r < \infty, \qquad (4)$$

$$p(r_0,z)=u(z), 0<z<L. \qquad (5)$$

Для численного решения задачи (3) – (5) наиболее удобным является метод сеток. Следует отметить, что при исследовании разностных схем наиболее важным является вопрос устойчивости по начальным данным.

Разностная схема. На сетке

$$\overline{\omega}_{\tau h} = \overline{\omega}_{\tau} \times \overline{\omega}_{h} = \omega_{\tau h} \cup \gamma_{\tau h},\ \omega_{\tau h} = \omega_{\tau} \times \omega_{h}\,,$$

$$\overline{\omega}_{h} = \{z = z_k = kh,\ k = \overline{0, N},\ h = L/N\},\ \overline{\omega}_{\tau} = \{r = r_m = r_0 + m\tau,\ m = 0,1,2,...,\}\,,$$

$$\omega_{\tau} = \{r = r_m = r_0 + m\tau,\ m = 1,2,...,\},\ \omega_{h} = \{z = z_k = kh,\ k = \overline{1, N-1},\ h = L/N\}\,,$$

дифференциальную задачу (3) – (5) аппроксимируем с точностью $O(\tau^2 + h^2)$ явной трехслойной разностной схемой

$$2ik_0\, y_{\overset{\circ}{r}} + y_{\bar{z}z} + \frac{\tau^2}{2} b(r,z) y_{\bar{r}r} + b(z,r) y = 0,\ (z,r) \in \omega_{\tau h}, \tag{6}$$

$$y(z,0) = y_0(z),\ z \in \omega_h\,, \tag{7}$$

$$y(0,r) = 0,\ y(L,r) = 0,\ r \in \omega_{\tau}\,. \tag{8}$$

Здесь $b(r,z) = k_0^2 (n^2(r,z) - 1)$ и приняты следующие обозначения [6]:

$$y = y_k^m = y(r_m, z_k), \quad y_{\overset{\circ}{r}} = (y_k^{m+1} - y_k^{m-1}) / 2\tau,$$

$$y_{\bar{z}z} = \frac{1}{h^2}(y_{k+1}^m - 2y_k^m + y_{k-1}^m).$$

Легко видеть, что уравнение (6) получено из разностного уравнения

$$2ik_0\, y_{\overset{\circ}{r}} + y_{\bar{z}z} + b(r,z) y = 0,$$

путем усреднения сеточной функции при коэффициенте $b(r,z)$.

Отметим, что при расчетах, кроме решения при r_0 необходимо иметь значение решения $y^1 = y(\tau, z),\ z \in \omega_h$, которое можно получить каким-либо методом.

Перейдем к анализу устойчивости разностной схемы (6) – (8) по начальным данным.

Пусть H – пространство сеточных комплекснозначных функций, заданных на $\overline{\omega}_h$ и равных нулю при $z = 0,\ z = L$. Сеточная функция $y = y(r)$ определена на $\overline{\omega}_\tau$ со значениями в $H: y(r) = \{y(r,z),\ z \in \overline{\omega}_h\},\ y^m = y(r_m)$.

Введем скалярные произведения и нормы в H:

$$(y,v) = (y^m, v^m) = \sum_{z \in \omega_h} h y \bar{v},\ \|y\| = (y,y)^{1/2}, \tag{9}$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Введем далее гильбертово пространство $H^2 = H \oplus H$ как прямую сумму, т. е. элементами пространства H^2 являются векторы вида $y_m = (y^m, y^{m+1})$, $y^m, y^{m+1} \in H$ с покоординатными операциями сложения и умножения. Устойчивость трехслойной схемы (6) – (8) будем изучать в энергетическом пространстве H_D^2 с метрикой, порожденной некоторым (возможно зависящим от r) самосопряженным положительным оператором $D \, Z \, D_m \, Z \, D(r_m)$, действующим в H^2:

$$(y, v)_D = (Dy, v), \ \|y\|_D = (y, y)_D^{1/2}, \, y, v \in H^2 .$$

Следуя [6], под устойчивостью по начальным данным будем понимать выполнение оценки

$$(D_{m+1} y_{m+1}, y_{m+1}) \le \rho (D_m y_m, y_m), m = 0,1,2,...,$$

где ρ^m равномерно ограничена константой, не зависящей от параметров сетки.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Для решения разностной схемы (6) – (8) при выполнении условия $\tau \le 0{,}5 k_0 h^2$ имеет место энергетическое тождество

$$\left(D_m y_m, y_m\right) = \left(D_m y_{m-1}, y_{m-1}\right), \ y_m, \ y_{m-1} \in H_h^2 . \qquad (10)$$

Для доказательства (10) воспользуемся принципом замороженных коэффициентов [7], предполагая, что $b(r, z) = b = \text{const}$ в произвольном узле сетки $\omega_{\tau h}$.

Перепишем задачу (6) – (8) в операторной форме:

$$\alpha y^{m+1} + \bar{\alpha} y^{m-1} + A y^m = 0, \, r \in \omega_r , \qquad (11)$$

где y^0, y^1 заданы, $y^m = y(r_m) \in H$, а комплексный параметр α и оператор A определяются выражениями

$$\alpha = -\frac{b}{2} - \frac{ik_0}{\tau}, \ \ Ay = -y_{zz}, \, y \in H . \qquad (12)$$

Отметим свойство самоспряженности линейного разностного оператора A в смысле скалярного произведения (9).

Запишем уравнение (11) в виде

$$\alpha y^{m+1} + 0{,}5 A y^m = -\bar{\alpha} y^{m-1} \bar{y} - 0{,}5 A y^m$$

и возведем скалярно обе части равенства в квадрат. Тогда, учитывая самосопряженность оператора A, свойства $(Ay^m, \bar{\alpha} y^{m-1}) = \alpha (Ay^m, y^{m-1}) = (\alpha y^m y, Ay^{m-1})$, после преобразований получаем соотношение $J_m = J_{m-1}$, где J_m – квадратичная форма,

$$J_m = \left\| \alpha \hat{y} + \frac{1}{2} A y \right\|^2 + \left(\left(|\alpha|^2 E - \frac{1}{4} A^2 \right) y, y \right). \tag{13}$$

Из квадратичной формулы (13) следует, что J_m неотрицательна при выполнении неравенства

$$\left(\left(|\alpha|^2 E - \frac{1}{4} A^2 \right) y, y \right) \geq 0, \; y \in H. \tag{14}$$

В этом случае квадратичную форму (13) можно записать в виде скалярного произведения $J_m = \left(D_m y_m, y_m \right)$, где $y_m = (y^m, y^{m+1}) \in H^2$, а самосопряженный и неотрицательный оператор D_m, действующий в пространстве H^2, является квадратной операторной матрицей второго порядка:

$$D_m = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 E & \frac{1}{2} \alpha A \\ \frac{1}{2} \bar{\alpha} A & |\alpha|^2 E \end{pmatrix}.$$

Тогда на каждом шаге выполняется энергетическое тождество

$$\left(D_m y_m, y_m \right) = \left(D_m y_{m-1}, y_{m-1} \right), \; y_m \in H^2,$$

которое означает, что ошибка, допущенная на некотором шаге, не возрастает.

Если в (14) выполняется строгое неравенство, то выражение $\sqrt{\left(D_m y_m, y_m \right)}$ определяет норму в пространстве H^2, что обеспечивает устойчивость разностной схемы (6) – (8) в этой норме. Легко видеть, что условие неотрицательности квадратичной формы (13) означает выполнение неравенства $\|A\| \leq 2|\alpha|$. Учитывая, что $\|A\| \leq \lambda_{N-1}, |\alpha| = \sqrt{b^2 / 4 + k_0^2 / \tau^2}$, где $\lambda_{N-1} \leq 4 / h^2$ – максимальное собственное значение оператора $-y_{\bar{z}z}$, приходим к условию $\tau \leq 0,5 k_0 h^2$.

Из принципа замороженных коэффициентов следует равномерная устойчивость разностной схемы (6) – (8) по начальным данным при условии $\tau \leq 0,5 k_0 h^2$.

Выводы. Предложенный для моделирования акустических полей подход использует явные трехслойные разностные схемы для параболического уравнения типа Шредингера. Методика легко обобщается на случай разрывной плотности, других краевых условий, позволяет повысить эффективность вычислительных процессов, используя технологию параллельных вычислений.

А.В. Гладкий, Ю.А. Гладка

ПРО СТІЙКІСТЬ ОДНІЄЇ РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ З УСЕРЕДНЕННЯМ

Розглядається задача чисельного моделювання акустичних полів у підводних неоднорідних хвилеводах на основі хвильового параболічного рівняння типу Шредінгера. Запропонована явна тришарова різницева схема з усередненням, досліджена її стійкість та отримана умова стійкості за початковими даними.

A.V. Gladky, Y.A. Gladka

ABOUT STABILITY OF THE DIFFERENCE SCHEME WITH AVERAGING

A problem of acoustic field numerical modeling in underwater non-homogeneous waveguides on the basis of Schrödinger-type parabolic wave equation is considered. The explicit three-level difference scheme with averaging is proposed. The stability of this scheme is investigated. The stability condition on initial data is obtained.

Список литературы

1. Распространение волн и подводная акустика. Под ред. Дж. Б. Келлера и Дж. Пападакиса. М.: Мир, 1980. 230 с.
2. Lee D., McDaniel S.T. Ocean acoustic propagation by finite difference method. *Comput. Math. Appl*. 1987. **14**. P. 305 – 423.
3. Lee D., Pierse A.D., Shang E.C. Parabolic equation development in the twentieth century. *J. Comput. Acoust.* 2000. **1**, N 4. P. 527 – 637.
4. Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. Киев: Наук. думка, 2001. 452 с.
5. Завадский В.Ю. Моделирование волновых процессов. М.: Наука, 1991. 248 с.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 416 с.
7. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.

Получено 12.06.2018

Об авторах:

Гладкий Анатолий Васильевич,

доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий лабораторией Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
E-mail: gladky@ukr.net

Гладкая Юлия Анатольевна,

доцент Киевского национального торгово-экономического университета.
E-mail: yuliyagladkaya@hotmail.com