УДК 004.42:510.69 https://doi.org/10.15407/pp2019.03.028

О.С. Шкільняк

ПЕРШОПОРЯДКОВІ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНІ ЛОГІКИ З ПРЕДИКАТАМИ СЛАБКОЇ ТА СТРОГОЇ РІВНОСТІ

Досліджено нові програмно-орієнтовані логіки часткових предикатів з операцією (композицією) предикатного доповнення, такі логіки названо LC. Для першопорядкових LC запропоновано низку відношень логічного наслідку та відношень логічного наслідку за умови невизначеності. Досліджено властивості цих відношень, встановлено співвідношення між ними. Для відношень типів $|=_T$ та $|=_F$ доведено теорему про елімінацію умов невизначеності. Для запропонованих відношень описано умови їх гарантованої наявності, наведено властивості декомпозиції формул та елімінації кванторів.

Ключові слова: логіка, частковий предикат, композиційна алгебра, логічний наслідок.

Вступ

Поняття і методи математичної логіки засвідчують високу ефективність при розв'язанні широкого спектра задач інформатики й програмування (див., напр., [1]). Особливе місце серед них посідають задачі, пов’язані з розробкою надійного програмного забезпечення, найперше, із побудовою систем специфікації та верифікації програм. До найпоширеніших логічних формалізмів, які успішно використовуються в системах верифікації, належать логіки Флойда-Хоара [2, 3]. Такі логіки базуються на класичній логіці предикатів, яка в недостатній мірі враховує неповноту, частковість інформації про предметну область. Традиційні логіки Флойда-Хоара використовують тотальні перед- та після-умови (предикати), тому було запропоновано (див., напр., [4, 5]) їх узагальнення на випадок часткових предикатів. Важливим напрямком такого узагальнення стало введення спеціальної немонотонної операції (композиції) предикатного доповнення [5]. Композиційно-номінативні логіки часткових квазіарних предикатів, розширені композицією предикатного доповнення, названо LC. Пропозиційні LC детально описано в [6], чисті першопорядкові LC в розглянуто [7], відношення логічного наслідку в LC досліджено в [8].

В даній роботі запропоновано розширити композицією предикатного доповнення першопорядкові композиційно-номінативні логіки з предикатами рівності. Такі нові логіки названо LCE.

Спеціальні предикати рівності дають змогу ототожнювати й розрізняти значення предметних імен. Композиційно-номінативні логіки з предикатами рівності вивчалися в [9]. Можна виділити два різновиди цих предикатів: слабкої рівності та строгої рівності. Такі предикати можна розглядати на реномінативному рівні та на чистому першопорядковому (кванторному) рівні. Це дає принаймі 4 різновиди LCE: з предикатами слабкої рівності та з предикатами строгої рівності, які розглядаємо на реномінативному рівні та на чистому першопорядковому рівні.

В роботі описано композиційні алгебри та мови цих різновидів LCE. Основну увагу зосереджено на вивченні властивостей, пов’язаних з предикатами слабкої рівності й строгої рівності та з композицією предикатного доповнення. Введено та досліджено низку відношень логічного наслідку в першопорядкових LCE.

Поняття, які в роботі не визначаються, тлумачимо в сенсі [6, 9, 10].

1. Композиційні алгебри логік з предикатним доповненням та рівністю

Розглядаємо квазіарні предикати реляційного типу, або *R*-предикати [10].

V-*A*-квазіарний *R*-предикат – це часткова неоднозначна функція вигляду $Q : {}^V\!A \to \{T, F\}$, де $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень, ${}^V\!A$ – множина всіх *V*-*A*-

іменних множин. Тут V та A – множини предметних імен та базових значень.

Позначаємо $Q[d]$ множину всіх значень, які R-предикат Q може приймати на аргументі $d\in{}^{V}A$. Така $Q[d]$ може бути однією з множин $\varnothing$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$. Отже, кожний R-предикат Q можна задати за допомогою множин $T(Q) = \{d \mid T\in Q[d]\}$ та $F(Q) = \{d \mid F\in Q[d]\}$, які називають областю істинності та областю хибності предиката Q. Для R-предикатів область невизначеності визначається множинами $T(Q)$ та $F(Q)$: $\perp(Q) = \overline{T(Q)\cup F(Q)} = \overline{T(Q)} \cap \overline{F(Q)}$.

R-предикат Q монотонний, якщо

$$d_1 \subseteq d_2 \Rightarrow Q[d_1] \subseteq Q[d_2].$$

R-предикат Q антитонний, якщо

$$d_1 \subseteq d_2 \Rightarrow Q[d_1] \supseteq Q[d_2].$$

R-предикат Q частковий однозначний або P-предикат, якщо $T(Q)\cap F(Q) = \varnothing$.

R-предикат Q тотальний, або T-предикат, якщо $T(Q)\cup F(Q) = {}^{V}A$.

Для P-предиката Q запис $Q(d)\downarrow$ означає, що $Q(d)$ визначене, запис $Q(d)\uparrow$ означає, що $Q(d)$ невизначене.

Можна виділити [10] 4 константні R-предикати T, F, $\curlywedge$, Υ:

$$T(\mathrm{T}) = F(\mathrm{F}) = {}^{V}A, \quad T(\mathrm{F}) = F(\mathrm{T}) = \varnothing,$$
$$T(\curlywedge) = F(\curlywedge) = \varnothing, \; T(\Upsilon) = F(\Upsilon) = {}^{V}A.$$

Предикати T, F, $\curlywedge$, Υ відповідають множинам значень $\{T\}$, $\{F\}$, $\varnothing$, $\{T, F\}$, які R-предикат може прийняти на вхідному даному.

Предикати T, F, $\curlywedge$, Υ монотонні й антитонні, при цьому T, F, $\curlywedge$ однозначні.

Класи V-A-квазіарних R-предикатів та P-предикатів позначимо $Pr^{V\text{–}A}$ та $PrP^{V\text{–}A}$.

Характерною особливістю LC є наявність спеціальної немонотонної 1-арної композиції предикатного доповнення $\sim$ (див. [6]). Для R-предикатів $\sim$ задамо так:

$$T(\sim Q) = \perp(Q) = \overline{T(Q)\cup F(Q)},$$

$$F(\sim Q) = \varnothing.$$

Звідси $\perp(\sim Q) = T(Q) \cup F(Q)$.

Для P-предикатів композицію $\sim$ можна задати [6] так:

$$(\sim Q)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } Q(d)\uparrow, \\ \text{невизначене, якщо } Q(d)\downarrow \end{cases}$$

Із визначень випливає, що $\sim$ зберігає однозначність R-предикатів

Таким чином, класи P-предикатів та R-предикатів замкнені щодо композиції $\sim$.

Водночас композиція $\sim$ не зберігає тотальність R-предикатів.

Твердження 1. Для кожного предиката $Q\in Pr^{V\text{–}A}$ маємо $\sim Q \in PrP^{V\text{–}A}$;
для кожного $Q\in PrT^{V\text{–}A}$ маємо $\sim Q = \curlywedge$.

Звідси випливає, що клас T-предикатів незамкнений щодо $\sim$.

Це означає, що для T-предикатів LC не мають смислу.

Таким чином, можна розглядати LC R-предикатів та LC P-предикатів.

LC R-предикатів реномінативного рівня далі називаємо L^{RC}; LC P-предикатів реномінативного рівня називаємо L^{RCP};

LC R-предикатів чистого першопорядкового (кванторного) рівня називаємо L^{QC}; LC P-предикатів чистого першопорядкового рівня називаємо L^{QCP}.

В логіках квазіарних предикатів ототожнювати й розрізняти значення предметних імен можна за допомогою спеціальних 0-арних композицій – параметризованих за іменами предикатів рівності. Розглядають [9] два різновиди цих предикатів:

– слабкої (з точністю до визначеності) рівності $=_{xy}$;

– строгої (точної) рівності $\equiv_{xy}$.

Предикати $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ задаємо так:

$$T(=_{xy}) = \{d \mid d(x)\downarrow, d(y)\downarrow \text{ та } d(x) = d(y)\},$$

$$F(=_{xy}) = \{d \mid d(x)\downarrow, d(y)\downarrow \text{ та } d(x) \neq d(y)\};$$

$$T(\equiv_{xy}) = \{d \mid d(x)\downarrow, d(y)\downarrow \text{ та } d(x) = d(y)\} \cup$$
$$\cup \{d \mid d(x)\uparrow \text{ та } d(y)\uparrow\},$$

$$F(\equiv_{xy}) = \{d \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow,\ d(x) \neq d(y)\} \cup$$
$$\cup \{d \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\uparrow \text{ або } d(x)\uparrow,\ d(y)\downarrow\}.$$

Предикати $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ традиційно також позначають $x = y$ та $x \equiv y$.

Предикати $\equiv_{xy}$ тотальні однозначні, вони [9] немонотонні й неантитонні.

Водночас предикати $=_{xy}$ часткові однозначні, монотонні й еквітонні.

Неістотним для предикатів $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ є кожне $z \in V\setminus\{x, y\}$.

КНЛ з предикатами рівності назвемо LE. Зокрема, LE з предикатами слабкої рівності назвемо LEw, LE з предикатами строгої рівності назвемо LEs.

На реномінативному й першопорядковому рівнях можна виділити [9] низку різновидів LE. Зокрема, для *R*-предикатів та *P*-предикатів маємо такі різновиди.

На реномінативному рівні:

– L^{RE} – LEw *R*-предикатів;

– L^{REP} – LEw *P*-предикатів;

– L^{REs} – LEs *R*-предикатів;

– L^{REsP} – LEs *P*-предикатів.

На чистому першопорядковому (кванторному) рівні:

– L^{QE} – LEw *R*-предикатів;

– L^{QEP} – LEw *P*-предикатів;

– L^{QEs} – LEs *R*-предикатів;

– L^{QEsP} – LEs *P*-предикатів.

LC з предикатами рівності назвемо LCE. Зокрема, LCE з предикатами слабкої рівності назвемо LCEw, LCE з предикатами строгої рівності назвемо LCEs.

Маємо такі різновиди LCE.

На реномінативному рівні:

– L^{RCE} – LCEw *R*-предикатів;

– L^{RCEP} – LCEw *P*-предикатів;

– L^{RCEs} – LCEs *R*-предикатів;

– L^{RCEsP} – LCEs *P*-предикатів.

На чистому першопорядковому рівні:

– L^{QCE} – LCEw *R*-предикатів;

– L^{QCEP} – LCEw *P*-предикатів;

– L^{QCEs} – LCEs *R*-предикатів;

– L^{QCEsP} – LCEs *P*-предикатів.

Спільними базовими композиціями зазначених вище різновидів КНЛ є логічні зв'язки $\neg$ та $\vee$, композиції реномінації $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, композиції квантифікації $\exists x$ для першопорядкових логік. Для КНЛ зі слабкою рівністю до них додаються предикати слабкої рівності $=_{xy}$, а для КНЛ зі строгою рівністю – предикати строгої рівності $=_{xy}$. Для LC та LCE додаємо композицію предикатного доповнення $\sim$.

Стисло нагадаємо (див. [6]) визначення композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$.

Задамо $\neg$, $\vee$, $\exists x$ через області істинності й хибності відповідних предикатів:

$$T(\neg P) = F(P);$$
$$F(\neg P) = T(P);$$
$$T(P\vee Q) = T(P)\cup T(Q);$$
$$F(P\vee Q) = F(P)\cap F(Q);$$
$$T(\exists xP) = \{d \mid d\nabla x \mapsto a \in T(P) \text{ для деякого } a\in A\};$$
$$F(\exists xP) = \{d \mid d\nabla x \mapsto a \in F(P) \text{ для всіх } a\in A\}.$$

Композицію $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ задаємо умовою:

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(d) = P(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)) \text{ для всіх } d\in {}^{V}\!A.$$

Традиційним є використання похідних композицій $\to$, &, $\forall x$, вони задаються так:

$$P\to Q = \neg P\vee Q;\quad P\&Q = \neg(\neg P\vee\neg Q);$$
$$\forall xP = \neg\exists x\neg P.$$

Підсумовуючи, для зазначених вище різновидів КНЛ маємо такі множини базових композицій.

$$C_{RE} = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, =_{xy}\} \text{ – для } L^{RE} \text{ та } L^{REP};$$

$$C_{REs} = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \equiv_{xy}\} \text{ – для } L^{REs} \text{ та } L^{REsP};$$

$$C_{QE} = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, =_{xy}\} \text{ – для } L^{QE} \text{ та } L^{QEP};$$

$$C_{QEs} = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \equiv_{xy}\} \text{ – для } L^{QEs} \text{ та } L^{QEsP};$$

$C_{RC} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \sim\}$ – для L^{RC} та L^{RCP};

$C_{QC} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \exists x, \sim\}$ – для L^{QC} та L^{QCP};

$C_{RCE} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \sim, =_{xy}\}$ – для L^{RCE} та L^{RCEP};

$C_{RCEs} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \sim, \equiv_{xy}\}$ – для L^{RCEs} та L^{RCEsP};

$C_{QCE} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \exists x, \sim, =_{xy}\}$ – для L^{QCE} та L^{QCEP};

$C_{QCEs} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \exists x, \sim, \equiv_{xy}\}$ – для L^{QCEs} та L^{QCEsP}.

Семантичною основою КНЛ є композиційні предикатні системи вигляду $({}^{V}A, Pr^{V\text{–}A}, C_{LC})$, де C_B – множина базових композицій. Така композиційна система задає дві алгебри: алгебру (алгебраїчну систему) даних $({}^{V}A, Pr^{V\text{–}A})$ та композиційну алгебру предикатів $({}^{V}A, Pr^{V\text{–}A}, C_B)$.

Композиційну систему $({}^{V}A, Pr^{V\text{–}A}, C_{QE})$ назвемо *чистою першопорядковою композиційною системою* R-предикатів зі слабкою рівністю.

Композиційну алгебру $A^{QE} = (Pr^{V\text{–}A}, C_{QE})$ назвемо *чистою першопорядковою композиційною алгеброю* R-предикатів зі слабкою рівністю.

Композиційну систему $({}^{V}A, Pr^{V\text{–}A}, C_{QEs})$ назвемо *чистою першопорядковою композиційною системою* R-предикатів зі строгою рівністю.

Композиційну алгебру $A^{QEs} = (Pr^{V\text{–}A}, C_{QEs})$ назвемо *чистою першопорядковою композиційною алгеброю* R-предикатів зі строгою рівністю.

Композиційну систему $({}^{V}A, Pr^{V\text{–}A}, C_{QC})$, назвемо *чистою першопорядковою композиційною системою* R-предикатів з предикатним доповненням.

Композиційну алгебру $A^{QC} = (Pr^{V\text{–}A}, C_{QC})$ назвемо *чистою першопорядковою композиційною алгеброю* R-предикатів з предикатним доповненням.

Композиційну систему $({}^{V}A, Pr^{V\text{–}A}, C_{QCE})$ назвемо *чистою першопорядковою композиційною системою* R-предикатів зі слабкою рівністю та предикатним доповненням.

Композиційну алгебру $A^{QCE} = (Pr^{V\text{–}A}, C_{QCE})$ назвемо *чистою першопорядковою композиційною алгеброю* R-предикатів зі слабкою рівністю та предикатним доповненням.

Композиційну систему $({}^{V}A, Pr^{V\text{–}A}, C_{QCEs})$ назвемо *чистою першопорядковою композиційною системою* R-предикатів зі строгою рівністю та предикатним доповненням.

Композиційну алгебру $A^{QCEs} = (Pr^{V\text{–}A}, C_{QCEs})$ назвемо *чистою першопорядковою композиційною алгеброю* R-предикатів зі строгою рівністю та предикатним доповненням.

Композиційні алгебри зі слабкою рівністю також називатимемо композиційними E-алгебрами, зі строгою рівністю – композиційними Es-алгебрами, з композицією предикатного доповнення – композиційними C-алгебрами, з композицією предикатного доповнення та слабкою рівністю – композиційними CE-алгебрами, з композицією предикатного доповнення та строгою рівністю – композиційними CEs-алгебрами.

Наприклад, A^{QCEs} – композиційна CEs-алгебра R-предикатів.

Клас P-предикатів замкнений щодо базових композицій C_{QE}, C_{QEs}, C_{QC}, C_{QCE}, C_{QCEs}.

Таким чином, в алгебрах A^{QE}, A^{QEs}, A^{QC}, A^{QCE}, A^{QCEs} виділено підалгебри:

– $A^{QEP} = (PrP^{V\text{–}A}, C_{QE})$ – чиста першопорядкова композиційна E-алгебра P-предикатів;

– $A^{QEsP} = (PrP^{V\text{–}A}, C_{QEs})$ – чиста першопорядкова композиційна Es-алгебра P-предикатів;

– $A^{QCP} = (PrP^{V\text{–}A}, C_{QC})$ – чиста першопорядкова композиційна C-алгебра P-предикатів;

– $A^{QCEP} = (PrP^{V\text{–}A}, C_{QCE})$ – чиста першопорядкова композиційна CE-алгебра P-предикатів;

– $A^{QCEsP} = (PrP^{V\text{–}A}, C_{QCEs})$ – чиста першопорядкова композиційна CEs-алгебра P-предикатів.

Подібним чином отримуємо композиційні предикатні системи та композиційні алгебри КНЛ на реномінативних рівнях. Маємо такі композиційні алгебри:

$A^{RE} = (Pr^{V\text{–}A}, C_{RE})$,

$A^{REP} = (PrP^{V\text{–}A}, C_{RE})$;

$A^{REs} = (Pr^{V\text{–}A}, C_{REs})$,

$A^{REsP} = (PrP^{V\text{–}A}, C_{REs})$;

$A^{RC} = (Pr^{V\text{–}A}, C_{RC})$,

$A^{RCP} = (PrP^{V\text{–}A}, C_{RC})$;

$A^{RCE} = (Pr^{V\text{–}A}, C_{RCE})$,

$A^{RCEP} = (PrP^{V\text{–}A}, C_{RCE})$;

$A^{RCEs} = (Pr^{V\text{–}A}, C_{RCEs})$,

$A^{RCEsP} = (PrP^{V\text{–}A}, C_{RCEs})$.

2. Властивості композицій

Властивості пропозиційних композицій в LE, LC та LCE аналогічні властивостям пропозиційних композицій класичної логіки, вони наведені в [6].

В LE, LC та LCE основні властивості композицій квантифікації, не пов'язані з реномінацією, в цілому аналогічні відповідним властивостям кванторів класичної логіки. Зокрема, це

– комутативність однотипних кванторів;

– закони де Моргана для кванторів;

– неістотність квантифікованих імен:

Властивості, пов'язані з композиціями реномінації та квантифікації в LE, LC та LCE, аналогічні відповідним властивостям традиційної логіки квазіарних предикатів (див. [10]). Зокрема, це властивості R, RI, RU, R$\neg$, R$\vee$, RR, Ren, R$\exists$s, R$\exists$.

Для опису в перщопорядкових логіках властивостей елімінації кванторів додатково використовують спеціальні 0-арні композиції – предикати-індикатори Ez, які визначають наявність у вхідних даних компоненти з відповідним іменем $z \in V$.

Предикати Ez задаються [5] так:

$T(Ez) = \{d \mid d(z)\downarrow\}$; $F(Ez) = \{d \mid d(z)\uparrow\}$.

Предикати-індикатори Ez тотальні, однозначні, немонотонні, неантитонні. Кожне $x \in V$ таке, що $x \neq z$, неістотне для Ez.

Твердження 2. Маємо $\equiv_{xx} = \mathrm{T}$ та $\equiv_{xy} \vee \neg\equiv_{xy} = \mathrm{T}$.

Звідси $\neg\equiv_{xx} = \mathrm{F}$ та $\equiv_{xy} \,\&\, \neg\equiv_{xy} = \mathrm{F}$.

Отже, носій кожної підалгебри алгебр A^{QEs}, A^{QEsP}, A^{REs}, A^{REsP}, A^{QCEs}, A^{QCEsP}, A^{RCEs}, A^{RCEsP} містить константні предикати T та F.

Позначимо $[\mathrm{Pr}]_{\mathrm{Cm}}$ замикання множини предикатів Pr щодо множини композицій Cm

$\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{\equiv} = [\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\} \cup \{\equiv_{xy} \mid x, y \in V]_{CQEs}$ – це найменша множина R-предикатів, замкнена щодо базових композицій C_{QEs} та C_{REs}. Таким чином, в LEs можна виділити сингулярні композиційні алгебри предикатів $(\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{\equiv}, C_{QEs})$ та $(\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{\equiv}, C_{REs})$.

Подібним чином задаємо множини з константними предикатами $\{\curlywedge, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{\equiv}$, $\{\Upsilon, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{\equiv}$, $\{\curlywedge, \Upsilon, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{\equiv}$, вони замкнені щодо базових композицій C_{QEs} та C_{REs}. Тому:

Твердження 3. 1) В першопорядкових LEs R-предикатів виділяємо сингулярні композиційні алгебри $(\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{\equiv}, C_{QEs})$ $(\{\curlywedge, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{\equiv}, C_{QEs})$, $(\{\Upsilon, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{\equiv}, C_{QEs})$ та $(\{\curlywedge, \Upsilon, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{\equiv}, C_{QEs})$.

2) В першопорядкових LEs P-предикатів виділяємо сингулярні композиційні алгебри $(\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{\equiv}, C_{QEs})$, $(\{\curlywedge, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{\equiv}, C_{QEs})$.

Подібні сингулярні композиційні алгебри виділяємо в реномінативних LEs.

$[\mathrm{E}]_{=} = [\{=_{xy} \mid x, y \in V\}]_{CRE}$ замкнена щодо C_{RE}; $\{\curlywedge\}_{=} = [\{\curlywedge\} \cup \{=_{xy} \mid x, y \in V\}]_{CQE}$ вже замкнена щодо C_{QE}. Аналогічно задамо замкнені щодо C_{QE} множини з константними предикатами $\{\Upsilon\}_{=}$, $\{\curlywedge, \Upsilon\}_{=}$, $\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{=}$, $\{\curlywedge, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{=}$, $\{\Upsilon, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{=}$, $\{\curlywedge, \Upsilon, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{=}$. Звідси:

Твердження 4. 1) В першопорядкових LEw *R*-предикатів можна виділити сингулярні композиційні алгебри $(\{\curlywedge\}_{=}, C_{QE})$, $(\{\Upsilon\}_{=}, C_{QE})$, $(\{\curlywedge, \Upsilon\}_{=}, C_{QE})$, $(\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{=}, C_{QE})$, $(\{\curlywedge, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{=}, C_{QE})$, $(\{\Upsilon, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{=}, C_{QE})$, $(\{\curlywedge, \Upsilon, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{=}, C_{QE})$.

2) В першопорядкових LEw *P*-предикатів залишаються сингулярні алгебри $(\{\curlywedge\}_{=}, C_{QE})$, $(\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{=}, C_{QE})$, $(\{\curlywedge, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}_{=}, C_{QE})$.

Подібні сингулярні композиційні алгебри виділяємо в реномінативних LEw.

Згідно твердження 1 $\sim\mathrm{T} = \sim\mathrm{F} = \curlywedge$.

З іншого боку, маємо

Твердження 5. $\sim\curlywedge = \mathrm{T}$ та $\sim\Upsilon = \curlywedge$.

Справді, маємо $F(\sim\curlywedge) = \varnothing$,

$$T(\sim\curlywedge) = \perp(\curlywedge) = \overline{T(\curlywedge) \cup F(\curlywedge)} = \overline{\varnothing} = {}^{V}\!A;$$

далі маємо $F(\sim\Upsilon) = \varnothing$,

$$T(\sim\Upsilon) = \perp(\Upsilon) = \overline{T(\Upsilon) \cup F(\Upsilon)} = \varnothing.$$

Отже, носій кожної підалгебри алгебр A^{QC}, A^{QCP}, A^{RC}, A^{RCP}, A^{QCEs}, A^{QCEsP}, A^{RCEs}, A^{RCEsP}, A^{QCE}, A^{QCEP}, A^{RCE}, A^{RCEP} містить константні предикати $\curlywedge, \mathrm{T}, \mathrm{F}$; носій кожної підалгебри алгебр A^{QC}, A^{RC}, A^{QCEs}, A^{RCEs}, A^{QCE}, A^{RCE} містить константні предикати $\curlywedge, \Upsilon, \mathrm{T}, \mathrm{F}$. Звідси маємо таке.

Множини $\{\curlywedge, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ та $\{\curlywedge, \Upsilon, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ замкнені щодо C_{QC} та C_{RC}. Множини $\curlywedge\mathrm{TF}_{\equiv} = [\{\curlywedge, \mathrm{T}, \mathrm{F}\} \cup \{\equiv_{xy} \mid x, y \in V\}]_{CQCEs}$ та $\curlywedge\Upsilon\mathrm{TF}_{\equiv} = [\{\curlywedge, \Upsilon, \mathrm{T}, \mathrm{F}\} \cup \{\equiv_{xy} \mid x, y \in V\}]_{CQCEs}$ замкнені щодо C_{QCEs}. Подібним чином задаємо замкнені щодо C_{QCE} множини $\curlywedge\mathrm{TF}_{=}$ та $\curlywedge\Upsilon\mathrm{TF}_{=}$. Таким чином:

Твердження 6. 1) В першопорядкових LC, в першопорядкових LCEw та в першопорядкових LCEs можна відповідно виділити сингулярні композиційні алгебри $(\{\curlywedge, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}, C_{QC})$, $(\curlywedge\mathrm{TF}_{=}, C_{QCE})$ та $(\curlywedge\mathrm{TF}_{\equiv}, C_{QCEs})$.

2) В першопорядкових LC *R*-предикатів, в першопорядкових LCEw та в першопорядкових LCEs *R*-предикатів також можна відповідно виділити сингулярні композиційні алгебри $(\{\curlywedge, \Upsilon, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}, C_{QC})$, $(\curlywedge\Upsilon\mathrm{TF}_{=}, C_{QCE})$ та $(\curlywedge\Upsilon\mathrm{TF}_{\equiv}, C_{QCEs})$.

Аналогічні сингулярні композиційні алгебри можна виділити в реномінативних LC та LCE.

Розглянемо тепер властивості композиції $\sim$.

Теорема 1. Для кожного *R*-предиката *Q* маємо $Q \vee \neg Q \vee \sim Q = \mathrm{T}$.

Справді, для кожного $Q \in Pr^{V\text{–}A}$

$$T(Q \vee \neg Q \vee \sim Q) = T(Q) \cup T(\neg Q) \cup T(\sim Q) =$$

$$= T(Q) \cup F(Q) \cup \overline{T(Q) \cup F(Q)} = {}^{V}\!A;$$

$$F(Q \vee \neg Q \vee \sim Q) = F(Q) \cap F(\neg Q) \cap F(\sim Q) =$$

$$= F(Q) \cap T(Q) \cap \varnothing = \varnothing.$$

Таким чином, $Q \vee \neg Q \vee \sim Q = \mathrm{T}$.

Наслідок 1. Для кожного *R*-предиката *Q* маємо

$$\neg(Q \vee \neg Q \vee \sim Q) = \mathrm{F};$$

$$\sim(Q \vee \neg Q \vee \sim Q) = \curlywedge.$$

Твердження 7 (див. також [6]).

1) Для кожного $Q \in Pr^{V\text{–}A}$ маємо:

$$F(\neg\sim P) = T(\sim P) = \perp(P) = \overline{T(P)} \cap \overline{F(P)};$$

$$T(\neg\sim P) = F(\sim P) = \varnothing;$$

$$\perp(\neg\sim P) = \perp(\sim P) = T(P) \cup F(P).$$

2) Для кожного $Q \in Pr^{V\text{–}A}$ маємо:

$$\sim\neg Q = \sim Q; \quad \sim\sim\sim Q = \sim Q; \quad \sim\sim\sim\sim Q = \sim\sim Q.$$

3) Для кожного $Q \in PrP^{V\text{–}A}$ додатково маємо: $\sim\sim Q = Q \vee \neg Q$.

Розглянемо зв'язок між композиціями предикатного доповнення, реномінації та квантифікації. Згідно визначень маємо:

$$T(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim P)) = T(\sim(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)));$$

$$F(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim P)) = F(\sim(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P))) = \varnothing;$$

$$\perp(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim P))=\perp(\sim(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P))).$$

Звідси отримуємо властивість $\mathrm{R}^{\sim}$-дистрибутивності:

$$\mathrm{R}^{\sim})\ \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim P)=\sim\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P).$$

Із визначень отримуємо:

$$T(\sim\exists xP)=\perp(\exists xP);\quad F(\sim\exists xP)=\varnothing;$$

$$\perp(\sim\exists xP)=T(\exists xP)\cup F(\exists xP).$$

Розглянемо дію композиції $\sim$ на спеціальні предикати-індикатори та предикати слабкої й строгої рівності.

Предикати $\equiv_{xy}$ та Ez є тотальними. Враховуючи твердження 1, отримуємо:

Твердження 8.

$$\sim\equiv_{xy}=\curlywedge;\quad \sim Ez=\curlywedge.$$

Твердження 9. Для предикатів слабкої рівності маємо таке подання:

$$\sim=_{xy}=\neg Ex\vee\neg Ey\vee\curlywedge=\neg Ex\vee\neg Ey\vee\sim\equiv_{xy}.$$

Справді, для кожного $d\in{}^{V}\!A$ маємо:

$$\sim=_{xy}(d)=\begin{cases}T, & \text{якщо } =_{xy}(d)\uparrow,\\ \text{невизначене}, & \text{якщо } =_{xy}(d)\downarrow\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}T, & \text{якщо } \neg Ex(d)\vee\neg Ey(d)=T,\\ \text{невизначене}, & \text{якщо } Ex(d)\,\&\,Ey(d)=T\end{cases}=$$

$$=\neg Ex(d)\vee\neg Ey(d)\vee\curlywedge(d).$$

Нагадаємо (див. [9]) властивості, пов'язані з предикатами рівності.

Твердження 10. Маємо

$$\equiv_{xy}=(=_{xy}\,\&\,Ex\,\&\,Ey)\vee(\neg Ex\,\&\,\neg Ey).$$

Отже, предикати $\equiv_{xy}$ можна подати через предикати $=_{xy}$ та Ez.

Наведемо властивості реномінації предикатів рівності.

RD) Маємо

$\mathrm{R}_{\bar{v},z,w}^{\bar{u},x,y}(=_{xy})={=_{zw}}$ та $\mathrm{R}_{\bar{v},z,w}^{\bar{u},x,y}(\equiv_{xy})=\equiv_{zw}$;

за умови $y\notin\{\bar{u}\}$ маємо

$\mathrm{R}_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(=_{xy})={=_{zy}}$ та $\mathrm{R}_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\equiv_{xy})=\equiv_{zy}$;

за умови $x,y\notin\{\bar{u}\}$ маємо

$\mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(=_{xy})={=_{xy}}$ та $\mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\equiv_{xy})=\equiv_{xy}$.

Для $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ маємо властивості рефлективності, симетричності, транзитивності.

RfP) Кожний предикат вигляду $=_{xx}$ є неспростовним;

кожний предикат вигляду $\equiv_{xx}$ є тотожно істинним, тобто $\equiv_{xx}=\mathrm{T}$.

SmP) Для кожного $d\in{}^{V}\!A$ маємо

$=_{xy}(d)={=_{yx}(d)}$ та $\equiv_{xy}(d)=\equiv_{yx}(d)$.

TrP) Для кожного $d\in{}^{V}\!A$ маємо:

$=_{xy}(d)=T$ та $=_{yz}(d)=T\Rightarrow{=_{xz}(d)}=T$;

$\equiv_{xy}(d)=T$ та $\equiv_{yz}(d)=T\Rightarrow\equiv_{xz}(d)=T$.

Звідси отримуємо:

Наслідок 2. Кожний предикат вигляду $=_{xy}\&=_{yz}\rightarrow=_{xz}$ неспростовний;

кожний предикат вигляду $\equiv_{xy}\&\equiv_{yz}\rightarrow\equiv_{xz}$ тотожно істинний, тобто $\equiv_{xy}\&\equiv_{yz}\rightarrow\equiv_{xz}=\mathrm{T}$.

Для $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ маємо властивість заміни рівних.

ER) Для кожних $P\in Pr^{A}$ та $d\in{}^{V}\!A$ маємо:

$$=_{xy}(d)=T\Rightarrow\mathrm{R}_{\bar{z},x}^{\bar{u},v}(P)(d)=\mathrm{R}_{\bar{z},y}^{\bar{u},v}(P)(d);$$

$$\equiv_{xy}(d)=T\Rightarrow\mathrm{R}_{\bar{z},x}^{\bar{u},v}(P)(d)=\mathrm{R}_{\bar{z},y}^{\bar{u},v}(P)(d).$$

Квантифікація предикатів строгої рівності та слабкої рівності має (див. також [9]) певні особливості.

Теорема 2. 1) $\exists x\equiv_{xy}=Ey$;

2) якщо $|A|\geq 2$, то $\exists x\neg\equiv_{xy}=\mathrm{T}$; якщо $|A|=1$, то $\exists x\neg\equiv_{xy}=\neg Ey$.

Доводимо п.1. $\exists x\equiv_{xy}(d)=T\Leftrightarrow$ існує $a\in A$ таке, що $d(y)=a\Leftrightarrow d(y)\downarrow\Leftrightarrow Ey(d)=T$.

$\exists x\equiv_{xy}(d)=F\Leftrightarrow$ для кожного $a\in A$ невірно, що $d(y)=a\Leftrightarrow d(y)\uparrow\Leftrightarrow Ey(d)=F$.

Доводимо п.2. $\exists x\neg\equiv_{xy}(d)=T\Leftrightarrow$ існує $a\in A$ таке, що невірно $d(y)=a$. Якщо $|A|\geq 2$, то це так; якщо $|A|=1$, то це вимагає $d(y)\uparrow$, тобто $\neg Ey(d)=T$;

$\exists x \neg \equiv_{xy}(d) = F \Leftrightarrow$ для кожного $a \in A$ маємо $d(y) = a$. Якщо $|A| \geq 2$, то це не так; якщо $|A| = 1$, то це вимагає $d(y)\downarrow$, тобто $Ey(d) = T$, звідки $\neg Ey(d) = F$.

Наслідок 3. В L^{QCEs} предикати-індикатори є похідними.

Теорема 3. 1) $\exists x =_{xy} = Ey \vee \curlywedge$;

2) якщо $|A| \geq 2$, то $\exists x \neg =_{xy} = Ey \vee \curlywedge$; якщо $|A| = 1$, то $\exists x \neg =_{xy} = \neg Ey \,\&\, \curlywedge$.

Доводимо п.1. $\exists x (=_{xy})(d) = T \Leftrightarrow$ існує $a \in A$ таке, що $d(y) = a \Leftrightarrow d(y)\downarrow \Leftrightarrow Ey(d) = T$;

$\exists x =_{xy}(d) = F \Leftrightarrow d(y)\downarrow$ та для кожного $a \in A$ невірно, що $d(y) = a$, а це неможливо;

$\exists x =_{xy}(d)\uparrow \Leftrightarrow d(y)\uparrow$. Таким чином, $\exists x =_{xy} = Ey \vee \curlywedge$.

Доводимо п.2. $\exists x \neg =_{xy} = F \Leftrightarrow$ для кожного $a \in A$ маємо $d(y)\downarrow = a$. Якщо $|A| \geq 2$, то це неможливо; якщо $|A| = 1$, то це означає $d(y)\downarrow$, тобто $Ey(d) = T$, звідки $\neg Ey(d) = F$.

$\exists x \neg =_{xy}(d) = T \Leftrightarrow$ існує $a \in A$ таке, що $d(y)\downarrow$ та $d(y) \neq a$. Якщо $|A| \geq 2$, то це так за умови $d(y)\downarrow$; якщо $|A| = 1$, то це неможливо.

$\exists x \neg =_{xy}(d)\uparrow \Leftrightarrow$ для кожного $a \in A$ маємо $d(y) = a$ або $d(y)\uparrow$, причому неможливо $d(y)\downarrow = a$ для кожного $a \in A$; якщо $|A| \geq 2$, то це буде при $d(y)\uparrow$; якщо $|A| = 1$, то це буде при $d(y)\uparrow$.

Отже, $\exists x \neg =_{xy}(d)\uparrow \Leftrightarrow d(y)\uparrow$.

Таким чином:

– якщо $|A| \geq 2$, то $\exists x \neg =_{xy}(d) = T$ при $d(y)\downarrow$ та $\exists x \neg =_{xy}(d)\uparrow$ при $d(y)\uparrow$; звідси $\exists x \neg =_{xy} = Ey \vee \curlywedge$.

– якщо $|A| = 1$, то $\exists x \neg =_{xy}(d) = F$ при $d(y)\downarrow$ та $\exists x \neg =_{xy}(d)\uparrow$ при $d(y)\uparrow$; звідси $\exists x \neg =_{xy} = \neg Ey \,\&\, \curlywedge$.

3. Мови LCE

Мови LE та мови LC єокремими випадками мов LCE. Мови першопорядкових LE детально описано в [9]. Мови пропозиційних LC досліджено в [6], мови першопорядкових LC введено в [7]. Тому в даній роботі в першу чергу зосередимося на дослідженні мов чистих першопорядкових LCE.

Детально розглянемо мову L^{QCEs}.

Алфавіт мови:

– множина V предметних імен (змінних),

– множина Ps предикатних символів,

– множина $Cs_{QLCEs} = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \sim, =_{xy}\}$ символів базових композицій.

Дамо індуктивне визначення множини Fr формул мови:

– кожний $p \in Ps$ та кожний $\equiv_{xy}$ є формулою; такі формули назвемо атомарними;

– нехай $\Phi, \Psi \in Fr$; тоді $\neg\Phi \in Fr$, $\vee\Phi\Psi \in Fr$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi \in Fr$, $\exists x\Phi \in Fr$, $\sim\Phi \in Fr$

Для L^{QCEs} задамо множину $V_T \subseteq V$ імен, неістотних для всіх $p \in Ps$ – множину тотально неістотних [5] імен

Для визначення множин гарантовано неістотних для формул імен таку ν продовжуємо до $\nu : Fr \to 2^V$ таким чином:

$$\nu(\neg\Phi) = \nu(\Phi);$$

$$\nu(\vee\Phi\Psi) = \nu(\Phi) \cap \nu(\Psi);$$

$$\nu(R_{x_1,\ldots,x_n}^{v_1,\ldots,v_n}\Phi) =$$

$$= (\nu(\Phi) \cup \{v_1,\ldots,v_n\}) \setminus \{x_i \mid v_i \notin \nu(\Phi),\ i \in \overline{1,n}\};$$

$$\nu(\exists x\Phi) = \nu(\Phi) \cup \{x\};$$

$$\nu(\sim\Phi) = \nu(\Phi);$$

$$\nu(\equiv_{xy}) = V \setminus \{x, y\}.$$

Розширена сигнатура мови L^{QCEs} – це $\Sigma = (V, V_T, Cs_{QLCEs}, Ps)$.

Якщо $x \in \nu(\Phi)$, то (див. [3]) ім'я x неістотне для формули Φ.

Для довільної $\Gamma \subseteq Fr$ вводимо такі позначення:

– $\sigma(\Gamma)$ – це множина всіх $p \in Ps$, які входять до складу $\Phi \in \Gamma$;

– $nm(\Gamma)$ – це множина всіх $x\in V$, які фігурують у формулах $\Phi\in\Gamma$;

$$-\,\nu(\Gamma) = \bigcap_{\Phi\in\Gamma}\nu(\Phi),\ fu(\Gamma) = V_T\setminus nm(\Gamma).$$

Інтерпретуємо мову L^{QCEs} на композиційних системах CS = $({}^{V}A, Pr^{V\text{–}A}, C_{QCEs})$.

Задаємо тотальне однозначне $I : Ps \to Pr^{V\text{–}A}$, яке продовжимо до відображення інтерпретації формул $I : Fr \to Pr^{V\text{–}A}$:

$$I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi)),$$

$$I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi)),$$

$$I(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I(\Phi)),$$

$$I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi))$$

$$I(\sim\Phi) = \sim(I(\Phi)),$$

$$I(\equiv_{xy}) = \boldsymbol{\equiv}_{xy}.$$

Трійку $\boldsymbol{J} = (\mathrm{CS}, \Sigma, I)$ назвемо інтерпретацією мови L^{QCEs}. Скорочено інтерпретації мови позначаємо як (A, I).

Предикат $I(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ – позначимо Φ_J.

Предметне ім'я $x\in V$ неістотне для формули Φ, якщо при кожній інтерпретації $\boldsymbol{J}$ ім'я x неістотне для предиката Φ_J.

Мова L^{QCE} визначається аналогічно мові L^{QCEs} лише замість символів $\boldsymbol{\equiv}_{xy}$ пишемо символи $=_{xy}$.

Подібним чином описуємо мови реномінативних логік L^{RCEs} та L^{RCE}, опускаючи пункти для $\exists x$.

При визначенні мов L^{QC} та L^{RC} опускаємо пункти, де фігурують символи предикатів рівності.

При визначенні мов L^{QEs}, L^{QE}, L^{REs}, L^{RE} опускаємо пункти, де фігурують символи композиції предикатного доповнення.

Виділення в LCE підалгебр P-предикатів виділяє загальний клас R-інтерпретацій та підклас P-інтерпретацій. Такі класи інтерпретацій називають семантиками, їх позначаємо $\boldsymbol{R}$ та $\boldsymbol{P}$.

Нехай α – деякий клас інтерпретацій (семантика).

Формула Φ неспростовна (частково істинна) при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\boldsymbol{J}\models\Phi$), якщо предикат Φ_J – неспростовний.

Формула Φ неспростовна (частково істинна) в α, що позначаємо ${}^{\alpha}\!\models\Phi$, якщо $\boldsymbol{J}\models\Phi$ при кожній $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

Формула Φ тотожно істинна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\boldsymbol{J}\models_{id}\Phi$), якщо предикат Φ_J – тотожно істинний.

Формула Φ тотожно істинна в α (позн. ${}^{\alpha}\!\models_{id}\Phi$), якщо $\boldsymbol{J}\models_{id}\Phi$ при кожній $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

Якщо семантика α зафіксована, то замість ${}^{\alpha}\!\models$, ${}^{\alpha}\!\models_{id}$ пишемо $\models$, $\models_{id}$.

Формула Φ виконувана при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, якщо предикат Φ_J – виконуваний.

Формула Φ виконувана в α, якщо Φ виконувана при деякій $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

Твердження 11. $\boldsymbol{J}\models_{id}\Phi \Rightarrow \boldsymbol{J}\models\Phi$; $\models_{id}\Phi \Rightarrow\ \models\Phi$.

Приклад 2. Маємо ${}^{\alpha}\!\models x = x$ та ${}^{\alpha}\!\models x = y \leftrightarrow y = x$ (тут α – R чи P).

Приклад 3. Маємо ${}^{\alpha}\!\models_{id} x \equiv x$ та ${}^{\alpha}\!\models_{id} x \equiv y \leftrightarrow y \equiv x$ (тут α – R чи P).

Із твердження 8 отримуємо:

Твердження 12. Для кожної інтерпретації $\boldsymbol{J}$ маємо

$$(\sim\boldsymbol{\equiv}_{xy})_J = \curlywedge;$$

$$(\sim Ez)_J = \curlywedge.$$

Із теореми 1 отримуємо:

Твердження 13. Для кожних $\Phi\in Fr$ та інтерпретації $\boldsymbol{J}$ маємо

$$(\Phi\vee\neg\Phi\vee\sim\Phi)_J = \mathrm{T};$$

$$\neg(\Phi\vee\neg\Phi\vee\sim\Phi)_J = \mathrm{F};$$

$$\sim(\Phi\vee\neg\Phi\vee\sim\Phi)_J = \curlywedge.$$

Наслідок 4. Для кожної $\Phi\in Fr$

${}^{\alpha}\!\models_{id}\Phi\vee\neg\Phi\vee\sim\Phi$ (тут α – R чи P).

Отже, в LC та LCE в семантиках $\boldsymbol{R}$ та $\boldsymbol{P}$ множини тотожно істинних формул та неспростовних формул непорожні.

4. Відношення логічного наслідку

Для формалізації фундаментального поняття логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів запропоновано (див. [10, 9]) низку відповідних відношень.

Спочатку задаємо відношення наслідку для двох формул при фіксованій інтерпретації $\boldsymbol{J}$.

1) Істиннісний, або T-наслідок ${}_J|\!\!=_T$: $\Phi\ {}_J|\!\!=_T \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \subseteq T(\Psi_J)$.

2) Хибнісний, або F-наслідок ${}_J|\!\!=_F$: $\Phi\ {}_J|\!\!=_F \Psi \Leftrightarrow F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J)$.

3) Сильний, або TF-наслідок ${}_J|\!\!=_{TF}$: $\Phi\ {}_J|\!\!=_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_J|\!\!=_T \Psi$ та $\Phi\ {}_J|\!\!=_F \Psi$.

4) Неспростовнісний, або IR-наслідок ${}_J|\!\!=_{IR}$: $\Phi\ {}_J|\!\!=_{IR} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) = \varnothing$.

5) Дуальний до IR, або DI-наслідок ${}_J|\!\!=_{DI}$: $\Phi\ {}_J|\!\!=_{DI} \Psi \Leftrightarrow F(\Phi_J) \cup T(\Psi_J) = {}^V\!A$.

Відповідні відношення логічного наслідку в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$ задаємо за схемою: $\Phi\ {}^\alpha|\!\!=_* \Psi$, якщо $\Phi\ {}_J|\!\!=_* \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

В загальному випадку логік квазіарних предикатів (реляційного типу) та LE можна розглядати (див. [10, 9]) семантики $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{TS}$; при цьому семантики $\boldsymbol{P}$ та $\boldsymbol{T}$ дуальні, семантики $\boldsymbol{R}$ та $\boldsymbol{TS}$ автодуальні.

Для зазначених відношень маємо [10, 9] такі властивості:

– в TS-семантиці усі ці відношення збігаються і стають єдиним відношенням ${}^{TS}|\!\!=$;

– ${}^P|\!\!=_{DI} = {}^T|\!\!=_{IR} = {}^R|\!\!=_{IR} = {}^R|\!\!=_{DI} = \varnothing$;

– ${}^P|\!\!=_{IR} = {}^T|\!\!=_{DI} = {}^{TS}|\!\!=$;

– ${}^P|\!\!=_T = {}^T|\!\!=_F$; ${}^P|\!\!=_F = {}^T|\!\!=_T$;

– ${}^P|\!\!=_{TF} = {}^T|\!\!=_{TF}$; ${}^R|\!\!=_T = {}^R|\!\!=_F = {}^R|\!\!=_{TF}$.

Серед цих відношень маємо лише 5 різних:

$${}^P|\!\!=_{IR},\ {}^P|\!\!=_T,\ {}^P|\!\!=_F,\ {}^P|\!\!=_{TF},\ {}^R|\!\!=_{TF}.$$

При цьому:

– ${}^P|\!\!=_T \not\subset {}^P|\!\!=_F$ та ${}^P|\!\!=_F \not\subset {}^P|\!\!=_T$;

– ${}^R|\!\!=_{TF} \subset {}^P|\!\!=_{TF} = {}^P|\!\!=_T \cap {}^P|\!\!=_F$;

– ${}^P|\!\!=_T \subset {}^P|\!\!=_{IR}$ та ${}^P|\!\!=_F \subset {}^P|\!\!=_{IR}$.

Відношення логічного наслідку індукують відношення логічної еквівалентності.

Відношення еквівалентності при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ ${}_J\!\sim_T$, ${}_J\!\sim_F$, ${}_J\!\sim_{TF}$, ${}_J\!\sim_{IR}$ визначаємо за такою схемою:

$$\Phi\ {}_J\!\sim_* \Psi, \text{ якщо } \Phi\ {}_J|\!\!=_* \Psi \text{ та } \Psi\ {}_J|\!\!=_* \Phi.$$

Відношення логічної еквівалентності ${}^P\!\sim_{IR}$, ${}^P\!\sim_T$, ${}^P\!\sim_F$, ${}^P\!\sim_{TF}$, ${}^R\!\sim_{TF}$ визначаємо так:

$$\Phi\ {}^\alpha\!\sim_* \Psi, \text{ якщо } \Phi\ {}^\alpha|\!\!=_* \Psi \text{ та } \Psi\ {}^\alpha|\!\!=_* \Phi.$$

При цьому:

$$\Phi\ {}^\alpha\!\sim_* \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_J\!\sim_* \Psi \text{ для кожної } \boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}.$$

Особливе значення має відношення ${}_J\!\sim_{TF}$. Це випливає з наступного:

$$\Phi\ {}_J\!\sim_{TF} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) = T(\Psi_J) \text{ та } F(\Phi_J) = F(\Psi_J).$$

Отже, $\Phi\ {}_J\!\sim_{TF} \Psi$ означає:

Φ_J та Ψ_J – це один і той же предикат.

Основою еквівалентних перетворень формул є [10] теорема еквівалентності. Вона формулюється для відношень ${}^R\!\sim_{TF}$, ${}^P\!\sim_{TF}$, ${}^P\!\sim_{IR}$. Для ${}^P\!\sim_T$ та ${}^P\!\sim_F$ теорема невірна.

Теорема 4. Нехай Φ' отримано з формули Φ заміною деяких входжень $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$. Якщо $\Phi_1\ {}^\alpha\!\sim_* \Psi_1$, ..., $\Phi_n\ {}^\alpha\!\sim_* \Psi_n$, то $\Phi\ {}^\alpha\!\sim_* \Phi'$.

Тут ${}^\alpha\!\sim_*$ одне з ${}^R\!\sim_{TF}$, ${}^P\!\sim_{TF}$, ${}^P\!\sim_{IR}$.

Відношення логічного наслідку поширюються на пари множин формул.

Нехай $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$, $\boldsymbol{J}$ – інтерпретація.

Далі позначаємо

$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_J) \text{ як } T^\cap(\Gamma_J),\quad \bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_J) \text{ як } F^\cap(\Delta_J),$$

$$\bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_J) \text{ як } T^\cup(\Delta_J),\quad \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_J) \text{ як } F^\cup(\Gamma_J).$$

Δ є IR-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J|\!\!=_{IR} \Delta$), якщо $T^\cap(\Gamma_J) \cap F^\cap(\Delta_J) = \varnothing$.

Δ є T-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J|\!\!=_T \Delta$), якщо $T^\cap(\Gamma_J) \subseteq T^\cup(\Delta_J)$.

Δ є F-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J|\!=_F \Delta$),

$$\text{якщо } F^{\cap}(\Delta_J) \subseteq F^{\cup}(\Gamma_J).$$

Δ є TF-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J|\!=_{TF} \Delta$),

$$\text{якщо } \Gamma\ {}_J|\!=_T \Delta \text{ та } \Gamma\ {}_J|\!=_F \Delta.$$

Відповідні відношення логічного наслідку визначаємо за схемою:

$$\Gamma\ {}^{\alpha}|\!=_* \Delta, \text{ якщо } \Gamma\ {}_J|\!=_* \Delta \text{ для кожної } \boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}.$$

Аналогом теореми 4 для множин формул є теорема заміни еквівалентних.

Теорема 5. Нехай $\Phi \sim \Psi$, тоді:

$$\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta;$$

$$\Gamma \models \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Psi.$$

Тут ~ – одне з ${}^R\!\sim_{TF}$, ${}^P\!\sim_{TF}$, ${}^P\!\sim_{IR}$; $\models$ – одне з відношень ${}^R|\!=_{TF}$, ${}^P|\!=_{TF}$, ${}^P|\!=_{IR}$.

Нагадаємо (див. [10, 9]) основні властивості відношень логічного наслідку для множин формул. Надалі, якщо інше не зазначене, $\models$ – це одне з ${}^R|\!=_{TF}$, ${}^P|\!=_{TF}$, ${}^P|\!=_T$, ${}^P|\!=_F$, ${}^P|\!=_{IR}$.

M) Нехай $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді

$\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Lambda \models \Sigma$ (монотонність).

Декомпозиція формул:

$\neg\neg_L$) $\neg\neg\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$.

$\neg\neg_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$.

$\vee_L$) $\Phi \vee \Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models \Delta$.

$\vee_R$) $\Gamma \models \Delta, \Phi \vee \Psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi$.

$\neg\vee_L$) $\neg(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma \models \Delta$.

$\neg\vee_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma \models \Delta, \neg\Psi$.

Для ${}^P|\!=_{IR}$ також маємо (це невірно [10] для ${}^R|\!=_{TF}$, ${}^P|\!=_{TF}$, ${}^P|\!=_T$, ${}^P|\!=_F$):

$\neg_L$) $\neg\Phi, \Gamma\ {}^P|\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^P|\!=_{IR} \Delta, \Phi$.

$\neg_R$) $\Gamma\ {}^P|\!=_{IR} \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\ {}^P|\!=_{IR} \Delta$.

Властивості еквівалентних перетворень, пов'язані з реномінацією, отримуються на основі властивостей R, RI, RU, RR, R¬, R∨ (див. [10]). Кожна з них продукує 4 відповідні властивості для відношення логічного наслідку, коли виділена формула чи її заперечення знаходиться у лівій чи правій частині цього відношення.

Для першопорядкових логік маємо [10] властивості елімінації кванторів, первісного означення та E-розподілу; вони справджуються також для LE та LCE.

Властивості елімінації кванторів:

$\exists_L$) $\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), Ez, \Gamma \models \Delta$
за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$);

$\exists R_L$) $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), Ez, \Gamma \models \Delta$
за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$;

$\neg\exists_R$) $\Gamma \models \neg\exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma, Ez \models \neg R_z^x(\Phi), \Delta$
за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$);

$\neg\exists R_R$) $\Gamma \models \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma, Ez \models \neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \Delta$
за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$;

$\exists v_R$) $\Gamma, Ey \models \exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma, Ey \models \exists x\Phi, R_y^x(\Phi), \Delta$;

$\exists R v_R$) $\Gamma, Ey \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma, Ey \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)$;

$\neg\exists v_L$) $\neg\exists x\Phi, Ey, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R_y^x(\Phi), Ey, \Gamma \models \Delta$;

$\neg\exists R v_L$) $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), Ey, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), Ey, \Gamma \models \Delta$.

Властивості E-розподілу та первісного означення:

Ed) $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, Ey$ та $Ey, \Gamma \models \Delta$;

Ev) $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow Ez, \Gamma \models \Delta$, де $z \in fu(\Gamma, \Delta)$.

Гарантують (див. [10]) наявність того чи іншого відношення логічного наслідку властивості *C*, *CL*, *CR*, *CLR*.

Для усіх відношень маємо:

C) $\Phi, \Gamma \models \Delta, \Phi$.

Додатково гарантують наявність відповідного відношення такі властивості:

CL) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma\ {}^P|\!=_T \Delta$;

CR) $\Gamma\ {}^P|\!=_F \Delta, \Phi, \neg\Phi$;

$CLR)\ \Phi, \neg\Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi.$

Властивості *C*, *CL*, *CR*, *CLR* справджуються для LE та LCE.

Зауважимо, що відношення, які ми позначаємо одним символом (напр., ${}^{P}|\!\!=_{T}$), *різні* в LE, LC, LCE, але з контексту буде зрозуміло, про яке відношення йде мова.

5. Особливості відношень логічного наслідку в LE та в LCE

Розглянемо особливості відношень логічного наслідку в LE, пов'язані з наявністю предикатів рівності.

Опишемо властивості LEw, пов'язані з предикатами слабкої рівності.

На основі Sm маємо властивості:

$Sm_L)\ x = y, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow x = y, y = x, \Gamma \models \Delta;$

$Sm_R)\ \Gamma \models \Delta, \neg x = y \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg x = y, \neg y = x.$

Tr індукує властивості:

$Tr_L)\ x = y, y = z, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = y, y = z, x = z, \Gamma \models \Delta$

(тут $\models$ – це ${}^{P}|\!\!=_{IR}$ чи ${}^{P}|\!\!=_{T}$);

$Tr_R)\ \Gamma \models \Delta, \neg x = y, \neg y = z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg x = y, \neg y = z, \neg x = z$

(тут $\models$ – це ${}^{P}|\!\!=_{IR}$ чи ${}^{P}|\!\!=_{F}$).

Справді, $T(x = y) \cap T(y = z) =$
$= T(x = y) \cap T(y = z) \cap T(x = z).$

Теорема 6. Tr_L невірна для $|\!\!=_F$; Tr_R невірна для $|\!\!=_T$.

Справді, для $d = [x \mapsto a, z \mapsto b]$
$d \notin F(x = y) \cup F(y = z) = F(x = y \,\&\, y = z)$;
проте $d \in F(x = z)$, тому

$d \in F(x = z) \cup F(x = y) \cup F(y = z) =$
$= F(x = y \,\&\, y = z \,\&\, x = z).$

Звідси $x = y \,\&\, y = z\ {}^{P}|\!\!\neq_{F}\ x = y \,\&\, y = z \,\&\, x = z.$
Проте $\Phi\ {}^{P}|\!\!=_{F} \Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ {}^{P}|\!\!=_{T} \neg\Phi$, тому

$\neg x = y \vee \neg y = z \vee \neg x = z\ {}^{P}|\!\!\neq_{T}\ \neg x = y \vee \neg y = z.$

Водночас $x = y \,\&\, y = z\ {}^{P}|\!\!=_{T}\ x = y \,\&\, y = z \,\&\, x = z,$

$\neg x = y \vee \neg y = z \vee \neg x = z\ {}^{P}|\!\!=_{F}\ \neg x = y \vee \neg y = z.$

Таким чином, транзитивність слабкої рівності порушується для відношень ${}^{P}|\!\!=_{F}$ та ${}^{P}|\!\!=_{T}$, тому й для ${}^{P}|\!\!=_{TF}$ та ${}^{R}|\!\!=_{TF}$. Тому в LEw ці відношення некоректні.

Наслідок 5. Для LEw коректним залишається лише відношення ${}^{P}|\!\!=_{IR}$.

Властивість RD індукує властивості реномінації рівності для відношення ${}^{P}|\!\!=_{IR}$.

$RD_L)\ R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x = y), \Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow x = y, \Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} \Delta$
за умови $x, y \notin \{\bar{u}\}$;

$R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(x = y), \Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow z = y, \Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} \Delta$
за умови $y \notin \{\bar{u}\}$;

$R_{\bar{v},z,u}^{\bar{u},x,y}(x = y), \Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow z = u, \Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} \Delta.$

$RD_R)\ \Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x = y), \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} \Delta, x = y$ за умови $x, y \notin \{\bar{u}\}$;

$\Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(x = y), \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} \Delta, z = y$
за умови $y \notin \{\bar{u}\}$;

$\Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} R_{\bar{v},z,u}^{\bar{u},x,y}(x = y), \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} \Delta, z = u.$

Властивість ER індукує властивості заміни рівних для відношення ${}^{P}|\!\!=_{IR}$:

$ER_L)\ x = y, R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), \Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = y, R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},z}(\Phi), \Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} \Delta;$

$ER_R)\ x = y, \Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = y, \Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},z}(\Phi), \Delta.$

Властивість Rf індукує спеціальну умову наявності відношення ${}^{P}|\!\!=_{IR}$:

$C_{Rf})\ \Gamma\ {}^{P}|\!\!=_{IR} x = x, \Delta.$

Опишемо властивості LEs, пов'язані з предикатами строгої рівності. Далі $\models$ – це одне з ${}^{R}|\!\!=_{TF}$, ${}^{P}|\!\!=_{TF}$, ${}^{P}|\!\!=_{T}$, ${}^{P}|\!\!=_{F}$, ${}^{P}|\!\!=_{IR}$.

Для відношень типу *T*, *F*, *TF* знімати заперечення, переносячи $\neg\Phi$ з лівої частини відношення у праву як Φ і навпаки, взагалі кажучи, не можна. Проте це можна робити для предикатів строгої рівності:

$E_{LR})\ \Gamma \models \neg x \equiv y, \Delta \Leftrightarrow x \equiv y, \Gamma \models \Delta$ та
$\neg x \equiv y, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models x \equiv y, \Delta;$

$ER_{LR})\ \Gamma \models \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x \equiv y), \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x \equiv y), \Gamma \models \Delta$ та

$\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x \equiv y), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x \equiv y), \Delta$.

Властивості, індуковані Sm та Tr:

SmS) $x \equiv y, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow x \equiv y, y \equiv x, \Gamma \models \Delta$;

TrS) $x = y, y = z, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = y, y = z, x = z, \Gamma \models \Delta$.

Властивість RD індукує властивості реномінації рівності.

$\mathrm{RDS_L}$) $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x \equiv y), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \equiv y, \Gamma \models \Delta$ за умови $x, y \notin \{\bar{u}\}$;

$R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(x \equiv y), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow z \equiv y, \Gamma \models \Delta$
за умови $y \notin \{\bar{u}\}$;

$R_{\bar{v},z,u}^{\bar{u},x,y}(x \equiv y), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow z \equiv u, \Gamma \models \Delta$;

$\mathrm{RDS_R}$) $\Gamma \models R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x \equiv y), \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models x \equiv y, \Delta$
за умови $x, y \notin \{\bar{u}\}$;

$\Gamma \models R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(x \equiv y), \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models z \equiv y, \Delta$
за умови $y \notin \{\bar{u}\}$;

$\Gamma \models R_{\bar{v},z,u}^{\bar{u},x,y}(x \equiv y), \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models z \equiv u, \Delta$.

Властивість ER індукує такі властивості заміни рівних:

$\mathrm{ERS_L}$) $\Gamma, x \equiv y, R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi) \models \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma, x \equiv y, R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},z}(\Phi) \models \Delta$;

$\mathrm{ERS_R}$) $\Gamma, x \equiv y \models R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma, x \equiv y \models R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},z}(\Phi), \Delta$.

Властивість Rf індукує спеціальну умову наявності кожного з відношень ${}^{R}|\!=_{TF}$, ${}^{P}|\!=_{TF}$, ${}^{P}|\!=_{T}$, ${}^{P}|\!=_{F}$, ${}^{P}|\!=_{IR}$:

C_{RfS}) $\Gamma \models x \equiv x, \Delta$.

Підсумовуючи, в LEw маємо такі властивості відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$:

– декомпозиції $\neg_L$, $\neg_R$, $\vee_L$, $\vee_R$;

– еквівалентних перетворень на основі R, RI, RU, RR, R$\neg$, R$\vee$;

– елімінації кванторів $\exists_L$, $\exists R_L$, $\exists v_R$, $\exists Rv_R$;

– E-розподілу Ed та первісного означення Ev;

– пов'язані з предикатами слабкої рівності $\mathrm{Sm_L}$, $\mathrm{Tr_L}$, $\mathrm{RD_L}$, $\mathrm{RD_R}$, $\mathrm{ER_L}$, $\mathrm{ER_R}$;

– властивості C та C_{Rf} гарантованої наявності відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$.

Подібні властивості відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$ маємо в LEs; відмінність тільки в заміні символів $=_{xy}$ на символи $\equiv_{xy}$, що дає такі властивості:

– пов'язані з предикатами строгої рівності SmS, TrS, $\mathrm{RDS_L}$, $\mathrm{RDS_R}$, $\mathrm{ERS_L}$, $\mathrm{ERS_R}$;

– властивості C та C_{RfS} гарантованої наявності відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$.

Властивості відношень ${}^{R}|\!=_{TF}$, ${}^{P}|\!=_{TF}$, ${}^{P}|\!=_{T}$, ${}^{P}|\!=_{F}$ в LEs:

– декомпозиції формул $\neg\neg_L$, $\neg\neg_R$, $\vee_L$, $\vee_R$, $\neg\vee_L$, $\neg\vee_R$;

– еквівалентних перетворень на основі R, RI, RU, RR, R$\neg$, R$\vee$;

– елімінації кванторів $\exists_L$, $\exists R_L$, $\neg\exists_R$, $\neg\exists R_R$, $\exists v_R$, $\exists Rv_R$, $\neg\exists v_L$, $\neg\exists Rv_L$;

– E-розподілу і первісного означення;

– пов'язані з предикатами строгої рівності властивості $\mathrm{E_{LR}}$, $\mathrm{ER_{LR}}$, SmS, TrS, $\mathrm{RDS_L}$, $\mathrm{RDS_R}$, $\mathrm{ERS_L}$, $\mathrm{ERS_R}$;

– властивості C, CL, CR, CLR, C_{RfS} гарантованої наявності відношення логічного наслідку.

Детальніше щодо виконання цих властивостей щодо різних відношень:

– C, CL, C_{RfS} для ${}^{P}|\!=_{T}$;

– C, CR, C_{RfS} для ${}^{P}|\!=_{F}$;

– C, CLR, C_{RfS} для ${}^{P}|\!=_{TF}$;

– C, C_{RfS} для ${}^{R}|\!=_{TF}$.

В LC та в LCE відношення логічного наслідку вводимо так, як описано вище. Водночас композиція предикатного доповнення має специфічні особливості, що відображається на властивостях відношень логічного наслідку.

В LC, тому і в LCE, змістовними є лише R-семантика та P-семантика, тому малозмістовними є відношення типу DI.

Для відношення ${}^{R}|\!=_{IR}$ рефлексивність порушується як в традиційних логіках квазіарних предикатів, так і в LC, LE, LCE. Справді, для довільного $p \in Ps$ маємо $p^{Rc}|\!\neq_{IR}\, p$ (беремо $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{R}$ таку, що $p_J = \Upsilon$). Тому вироджене відношення ${}^{R}|\!=_{IR}$; далі не розглядаємо.

Для LEw відношення типів T, F, TF для пар формул нетранзитивні (теорема 6), нетранзитивними вони залишаться і для LCEw. Тому для LCEw коректним може бути лише відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$.

Відношення логічного наслідку в LC детально досліджено в [8]. Зокрема, показано, що відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$ в LC коректно ввести неможливо. Причиною цього є неможливість коректно задати умови декомпозиції формул вигляду $\sim\!\Phi$. Зумовлено це тим, що декомпозиція формули $\sim\!\Phi$ вимагає подання області невизначеності формули Φ через її області істинності та хибності за допомогою лише $\cap$ та $\cup$. Як показано в [8], це неможливо.

Таким чином, для LC відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$ неадекватне. Це мотивує перехід від відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$ до загальнішого відношення $|\!=_{IR}{}^{\perp}$ неспростовнісного логічного наслідку за умов невизначеності. Відношення $|\!=_{IR}{}^{\perp}$ в LC досліджено в [6, 7].

Неадекватність відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$ в LC робить його і неадекватним і в LCE.

Отже, ${}^{P}|\!=_{IR}$ буде неадекватним в LCEw та LCEs. Враховуючи, що в LCEw відношення типів T, F, TF теж неадекватні, LCEw до певної міри вироджена, для неї може працювати лише відношення $|\!=_{IR}{}^{\perp}$.

Стисло опишемо відношення типів T та F в LC та LCEs. Це відношення ${}^{P}|\!=_{T}$ і ${}^{R}|\!=_{T}$, які також будемо позначати $|\!=_{T}$, та відношення ${}^{P}|\!=_{F}$ і ${}^{R}|\!=_{F}$, які також позначатимемо $|\!=_{F}$.

Для цих відношень в LC та LCEs справджуються відповідні властивості декомпозиції формул, еквівалентних перетворень, елімінації кванторів, E-розподілу та первісного означення, які мають місце для традиційних логік квазіарних предикатів (див. [10]). Справджуються також наведені в [10] умови, які гарантують наявність того чи іншого відношення логічного наслідку. Водночас в LC з'являються (див. [8]) нові властивості, пов'язані з композицією предикатного доповнення.

Для відношень $|\!=_{T}$ додатково маємо наступні властивості.

Умова гарантованої наявності $|\!=_{T}$:

$C\neg\sim)\ \neg\sim\!\Phi, \Gamma\,|\!=_{T}\Delta.$

Декомпозиція формул типу $\sim\!\Phi$:

$\sim_{\mathrm{LT}})\ \sim\!\Phi, \Gamma\,|\!=_{T}\Delta \ \Leftrightarrow\ \Gamma\,|\!=_{T}\Delta, \Phi, \neg\Phi.$

$\sim_{\mathrm{RT}})\ \Gamma\,|\!=_{T}\Delta, \sim\!\Phi\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Phi, \Gamma\,|\!=_{T}\Delta$ та $\neg\Phi, \Gamma\,|\!=_{T}\Delta.$

$\neg\sim_{\mathrm{El}})\ \Gamma\,|\!=_{T}\Delta, \neg\sim\!\Phi\ \Leftrightarrow\ \Gamma\,|\!=_{T}\Delta.$

Властивість $\neg\sim_{\mathrm{El}}$ – це фактично елімінація $\sim$.

Для відношень $|\!=_{F}$ додатково маємо наступні властивості.

Умова гарантованої наявності $|\!=_{F}$:

$C\sim)\ \Gamma\,|\!=_{F}\sim\!\Phi, \Delta.$

Декомпозиція формул типу $\sim\!\Phi$:

$\neg\sim_{\mathrm{RF}})\ \Gamma\,|\!=_{F}\Delta, \neg\sim\!\Phi\ \Leftrightarrow\ \Gamma, \Phi, \neg\Phi\,|\!=_{F}\Delta.$

$\neg\sim_{\mathrm{LF}})\ \neg\sim\!\Phi, \Gamma\,|\!=_{F}\Delta\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_{F}\Delta, \Phi$ та $\Gamma\,|\!=_{F}\Delta, \neg\Phi.$

$\sim_{\mathrm{El}})\ \sim\!\Phi, \Gamma\,|\!=_{F}\Delta\ \Leftrightarrow\ \Gamma\,|\!=_{F}\Delta.$

Властивість $\sim_{\mathrm{El}}$ – це фактично елімінація $\sim$.

Як випливає з цих співвідношень, для відношень типу $|\!=_{T}$ та типу $|\!=_{F}$ маємо *різні* властивості декомпозиції формул вигляду $\sim\!\Phi$, їх *не можна* подати як спільну властивість для відношень типу $|\!=_{TF}$.

Це означає, що в LC відношення ${}^{R}|\!=_{T}$, ${}^{R}|\!=_{F}$, ${}^{R}|\!=_{TF}$ *різні*, водночас в традиційній логіці квазіарних предикатів маємо ${}^{R}|\!=_{T} = {}^{R}|\!=_{F} = {}^{R}|\!=_{TF}$.

Властивості декомпозиції формул вигляду $\sim\!\Phi$ для відношень типу $|\!=_{TF}$ отримуємо, поєднуючи наведені вище відповідні властивості для $|\!=_{T}$ та $|\!=_{F}$: $\sim_{\mathrm{LT}}$ та $\sim_{\mathrm{El}}$,

$\sim_{\mathrm{RT}}$ та $C\sim$, $C\neg\sim$ та $\neg\sim_{\mathrm{LF}}$, $\neg\sim_{\mathrm{El}}$ та $\neg\sim_{\mathrm{RF}}$:

$\sim_{\mathrm{LTF}}$) $\sim\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma \models_T \Delta, \Phi, \neg\Phi$ та $\Gamma \models_F \Delta$;

$\sim_{\mathrm{RTF}}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \sim\Phi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_T \Delta$ та $\neg\Phi, \Gamma \models_T \Delta$;

$\neg\sim_{\mathrm{LTF}}$) $\neg\sim\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma \models_F \Delta, \Phi$ та $\Gamma \models_F \Delta, \neg\Phi$;

$\neg\sim_{\mathrm{RTF}}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg\sim\Phi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma \models_T \Delta$ та $\Gamma, \Phi, \neg\Phi \models_F \Delta$.

Аналогічні властивості відношень типів $\models_T$ та $\models_F$, пов'язані з композицією предикатного доповнення, маємо в LCEs.

Звідси, зокрема, випливає, що в в LCEs усі відношення ${}^P\!\models_T$, ${}^P\!\models_F$, ${}^P\!\models_{TF}$, ${}^R\!\models_T$, ${}^R\!\models_F$, ${}^R\!\models_{TF}$ є різними.

В LCEs також виконуються наведені вище властивості LEs, пов'язані з предикатами строгої рівності. Новими є відношення, які пов'язують $\sim$ та предикати строгої рівності.

Згідно твердження 12 для кожної інтерпретації $\boldsymbol{J}$ маємо

$$T((\sim x \equiv y)_J) = F((\sim x \equiv y)_J) = \varnothing.$$

Звідси умови гарантованої наявності $\models_T$ та гарантованої наявності $\models_F$:

$C_{\sim\equiv\mathrm{L}}$) $\sim x \equiv y, \Gamma \models_T \Delta$;

$C_{\sim\equiv\mathrm{R}}$) $\Gamma \models_F \Delta, \sim x \equiv y$.

При взаємній заміні $\models_T$ та $\models_F$ маємо властивості спрощення – елімінації $\sim\equiv_{xy}$:

$\mathrm{El}_{\sim\equiv\mathrm{L}}$) $\sim x \equiv y, \Gamma \models_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_F \Delta$;

$\mathrm{El}_{\sim\equiv\mathrm{R}}$) $\Gamma \models_T \Delta, \sim x \equiv y \Leftrightarrow \Gamma \models_T \Delta$.

Підсумовуючи, в LCEs маємо такі властивості відношень ${}^R\!\models_T$, ${}^R\!\models_F$, ${}^P\!\models_T$, ${}^P\!\models_F$.

Спільні для ${}^R\!\models_T$, ${}^R\!\models_F$, ${}^P\!\models_T$, ${}^P\!\models_F$ властивості:

– декомпозиції формул $\neg\neg_{\mathrm{L}}$, $\neg\neg_{\mathrm{R}}$, $\vee_{\mathrm{L}}$, $\vee_{\mathrm{R}}$, $\neg\vee_{\mathrm{L}}$, $\neg\vee_{\mathrm{R}}$;

– еквівалентних перетворень на основі R, RI, RU, RR, $\mathrm{R}\neg$, $\mathrm{R}\vee$, $\mathrm{R}\sim$;

– елімінації кванторів $\exists_{\mathrm{L}}$, $\exists\mathrm{R}_{\mathrm{L}}$, $\neg\exists_{\mathrm{R}}$, $\neg\exists\mathrm{R}_{\mathrm{R}}$, $\exists\mathrm{v}_{\mathrm{R}}$, $\exists\mathrm{Rv}_{\mathrm{R}}$, $\neg\exists\mathrm{v}_{\mathrm{L}}$, $\neg\exists\mathrm{Rv}_{\mathrm{L}}$;

– пов'язані з предикатами строгої рівності властивості E_{LR}, $\mathrm{ER}_{\mathrm{LR}}$, SmS, TrS, $\mathrm{RDS}_{\mathrm{L}}$, $\mathrm{RDS}_{\mathrm{R}}$, $\mathrm{ERS}_{\mathrm{L}}$, $\mathrm{ERS}_{\mathrm{R}}$.

Для відношень $\models_T$ додатково маємо:

– властивості $\sim_{\mathrm{LT}}$, $\sim_{\mathrm{RT}}$, $\neg\sim_{\mathrm{El}}$ декомпозиції формул типу $\sim\Phi$;

– властивість $\mathrm{El}_{\sim\equiv\mathrm{R}}$ елімінації $\sim\equiv_{xy}$.

Властивості гарантованої наявності відношення ${}^P\!\models_T$: C, CL, C_{RfS}, $C\neg\sim$, $C_{\sim\equiv\mathrm{L}}$.

Властивості гарантованої наявності відношення ${}^R\!\models_T$: C, C_{RfS}, $C\neg\sim$, $C_{\sim\equiv\mathrm{L}}$.

Для відношень $\models_F$ додатково маємо:

– властивості $\neg\sim_{\mathrm{RF}}$, $\neg\sim_{\mathrm{LF}}$, $\sim_{\mathrm{El}}$ декомпозиції формул типу $\sim\Phi$;

– властивість $\mathrm{El}_{\sim\equiv\mathrm{L}}$ елімінації $\sim\equiv_{xy}$.

Властивості гарантованої наявності відношення ${}^P\!\models_F$: C, CR, C_{RfS}, $C\sim$, $C_{\sim\equiv\mathrm{R}}$.

Властивості гарантованої наявності відношення ${}^R\!\models_F$: C, C_{RfS}, $C\sim$, $C_{\sim\equiv\mathrm{R}}$.

Такі ж властивості відношень ${}^R\!\models_T$, ${}^R\!\models_F$, ${}^P\!\models_T$, ${}^P\!\models_F$ справджуються в LC, але при цьому ми опускаємо властивості, в яких фігурують символи предикатів строгої рівності.

Наявність в LC та в LCE композиції предикатного доповнення дає змогу визначити відношення логічного наслідку за умови невизначеності. Для LC такі відношення вивчались в [6–8]. Для LCE дослідження відношень логічного наслідку за умови невизначеності буде зроблено в наступних статтях.

Висновки

В роботі досліджено нові програмно-орієнтовані логічні формалізми – композиційно-номінативні логіки з предикатами рівності та композицією предикатного доповнення, такі логіки названо LCE. Можна виділити предикати слабкої рівності та строгої рівності, це дає LCE з предикатами слабкої рівності, які названо LCEw, та з предикатами строгої рівності, які названо LCEs. LCE можна розглядати на першопорядковому рівні та реномінативному рівні. Розглянуто композиційні алгебри LCE, досліджено властивості їх композицій, описано першопорядкові мови цих логік. Основну увагу зосереджено на вивченні властивостей, пов'язаних з предикатами рівності та композицією предикатного доповнення. Введено та досліджено низку відношень логічного наслідку в першопорядкових LCE, розглянуто їх особливості. Зокрема, встановлено певну виродженість LCEw, для якої коректним є лише відношення неспростовнісного логічного наслідку за умов невизначеності. Детальне дослідження відношень логічного наслідку за умови невизначеності в LCE буде зроблено в наступних роботах.

Властивості відношень логічного наслідку є семантичною основою побудови в LCE відповідних першопорядкових числень секвенційного типу. Таку побудову теж планується здійснити робити в наступних роботах.

Література

1. Handbook of Logic in Computer Science / Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. – Oxford University Press, Vol. 1–5. 1993–2000.
2. Hoare C. An axiomatic basis for computer programming, Comm. 1969. ACM. 12(10). P. 576–580.
3. Apt K. Ten years of Hoare's logic: a survey – part I, ACM Trans. Program. Lang. Syst. 3(4) (1981). P. 431–483.
4. Ivanov I., Nikitchenko M. On the sequence rule for the Floyd-Hoare logic with partial pre- and post-conditions. In Proceedings of the 14th International Conference on ICT. 2018. Vol. 2104. of CEUR Workshop Proc. P. 716–724.
5. Ivanov I., Nikitchenko M. Inference Rules for the Partial Floyd-Hoare Logic Based on Composition of Predicate Complement, Comm. in Computer and Information Science, 2019. Vol. 1007. Springer, Cham, P. 71–88.
6. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С., Мамедов Т.А. Пропозиційні логіки часткових предикатів з композицією предикатного доповнення. *Проблеми програмування.* 2019. № 1. С. 3–13.
7. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів з композицією предикатного доповнення. Dynamical systems modelling and stability investigation: international conference: proceeding. К., 2019. С. 371–373.
8. Шкільняк О.С. Відношення логічного наслідку в логіках часткових предикатів з композицією предикатного доповнення. *Проблеми програмування.* 2019. № 3. С. 11–27.
9. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Чисті першопорядкові квазіарні логіки з предикатами рівності. *Проблеми програмування.* 2017. № 2. С. 3–23.
10. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів. *Проблеми програмування.* 2016. № 2–3. С. 73–86.

References

1. ABRAMSKY, S., GABBAY, D. and MAIBAUM, T. (editors). (1993–2000). *Handbook of Logic in Computer Science* Oxford University Press, Vol. 1–5.
2. HOARE, C. (1969). An axiomatic basis for computer programming, Comm. ACM 12(10), 576–580, 1969.
3. APT, K. (1981). Ten years of Hoare's logic: a survey – part I, ACM Trans. Program. Lang. Syst. 3(4), pp. 431–483.
4. IVANOV, I. and NIKITCHENKO, M. (2018). On the sequence rule for the Floyd-Hoare logic with partial pre- and post-conditions. *In Proceedings of the 14th International Conference on ICT.* Vol 2104 of CEUR Workshop Proc., pp. 716–724.
5. IVANOV, I. and NIKITCHENKO, M. (2019). Inference Rules for the Partial Floyd-Hoare Logic Based on Composition of Predicate Complement. *In Communication. in Computer and Information Science.* Vol. 1007. Springer, Cham, pp. 71-88.
6. NIKITCHENKO, M., SHKILNIAK, O., SHKILNIAK, S. and MAMEDOV, T. (2019). Propositional logics of partial predicates with composition of predicate complement. In *Problems in Progamming.* No 1. P. 3–13 (in ukr).

7. NIKITCHENKO, M., SHKILNIAK, O. and SHKILNIAK, S. (2019). Pure first-order logics of quasiary predicates with the composition of predicate complement. In Proceedings of the XIXh International Conference "Dynamical systems modelling and stability investigation", pp. 371–373 (in ukr).
8. SHKILNIAK, O. (2019). Relations of logical consequence in logics of partial predicates with composition of predicate complement. In *Problems in Progamming*. No 3 (in ukr).
9. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2017). Pure first-order quasiary logics with equality predicates. In *Problems in Progamming*. No 2. P. 3–23 (in ukr).
10. NIKITCHENKO, M., SHKILNIAK, O. and SHKILNIAK, S. (2016). Pure first-order logics of quasiary predicates. In *Problems in Progamming*. No 2–3. P. 73–86 (in ukr).

Одержано 10.06.2019

Про автора:

Шкільняк Степан Степанович,
доктор фізико-математичних наук,
професор, професор кафедри Теорії
та технології програмування.
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – понад 240,
у тому числі у фахових виданнях –
понад 100.
Кількість наукових публікацій в
зарубіжних виданнях – 22.
Scopus Author ID: 36646762300
h-індекс (Google Scholar): 7 (5 з 2014).
http://orcid.org/0000-0001-8624-5778.

***Місце роботи автора*:**

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
01601, Київ, вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259 05 19.