УДК 681.322.012

Л.Д. ЕЛФИМОВА

УЛЬТРАБЫСТРЫЙ КЛЕТОЧНЫЙ МЕТОД УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

Аннотация. Рассмотрен ультрабыстрый клеточный метод умножения матриц, который оперирует клеточными подматрицами, взаимодействует с известными клеточными методами умножения матриц и минимизирует вычислительную сложность полученных на их основе клеточных аналогов известных алгоритмов умножения матриц на 12.5 %. Взаимодействие ультрабыстрого метода с объединенным клеточным методом позволяет достичь наивысший по сравнению с известными клеточными методами процент минимизации (45.2 %) мультипликативной, аддитивной и общей сложностей известных алгоритмов умножения матриц. Оценка вычислительной сложности ультрабыстрого метода дана на примерах получения клеточных аналогов традиционного алгоритма умножения матриц.

Ключевые слова: линейная алгебра, клеточные методы, семейство клеточных методов умножение матриц, клеточные аналоги алгоритмов умножения матриц.

ВВЕДЕНИЕ

Переход к крупномасштабному параллелизму на уровне клеточных операций приводит к достижению высокой степени распараллеливания вычислений, загруженности оборудования, более выгодного соотношения между объемом вычислений и накладными расходами на их организацию [1]. Клеточные методы решения задач произвольных размерностей чаще используются в линейной алгебре, где одной из базовых является операция умножения матриц. В настоящее время разработано семейство клеточных методов умножения матриц [2–5], к которому относятся быстрые и гибридные клеточные методы, позволяющие варьировать размер клетки и получать клеточные аналоги известных алгоритмов умножения матриц с минимизированными мультипликативной, аддитивной и общей сложностями.

Быстрые клеточные методы умножения матриц порядка $n=2\mu r$ $(\mu>1)$ [2] и $n=3\mu r$ $(\mu>1)$ [4] оперируют числовыми $(r\times r)$-клетками и используют в качестве внутренних известные алгоритмы умножения матриц, минимизируя их мультипликативную, аддитивную и общую сложности соответственно на 12.5 и 15 %.

К гибридным клеточным методам умножения матриц относятся два смешанных [3, 4] и объединенный [5], являющиеся гибридами двух и трех методов. В смешанном клеточном методе умножения матриц порядка $n=2^q\cdot\mu r$ $(q>1,$ $\mu>1)$ [3] объединены рекурсивный метод Штрассена [6] и быстрый клеточный метод умножения матриц [2], взаимодействие которых позволяет получить клеточные аналоги известных матричных алгоритмов с минимизированными на 25 % мультипликативной, аддитивной и общей сложностями. В смешанном клеточном методе умножения матриц порядка $n=3^q\cdot\mu r$ $(q>1,\ \mu>1)$ [4] сочетаются рекурсивный метод Лейдермана [7] и быстрый клеточный метод умножения матриц [4], взаимодействие которых приводит к минимизации упомянутых сложностей матричных алгоритмов на 28%. Объединенный клеточный метод умножения матриц порядка $n=2^\gamma\cdot 3^q\mu r$ $(\gamma>0,\ q>1,\ \mu>1)$ [5] является гибридом трех методов: рекурсивных методов Штрассена, Лейдермана и быстрого клеточного метода умножения матриц [4]. Взаимодействие этих методов обеспечивает минимизацию мультипликативной, аддитивной и общей сложностей матричных алгоритмов на 37 %.

Целью настоящей статьи является оптимизация вычислительной сложности известных клеточных методов умножения матриц. Рассматривается ультрабыстрый клеточный метод умножения матриц, позволяющий варьировать не только порядок числовой клетки, но и порядок клеточной подматрицы, на которые декомпозируются исходные матрицы, что дает возможность использовать в качестве внутренних методов перечисленные ранее клеточные методы умножения матриц и минимизировать на 12.5 % вычислительную сложность получаемых на их основе клеточных аналогов известных алгоритмов умножения матриц. При взаимодействии с объединенным клеточным методом умножения матриц [5] новый метод по сравнению с известными клеточными методами обеспечивает наивысший процент минимизации (45.2 %) мультипликативной, аддитивной и общей сложностей клеточных аналогов матричных алгоритмов. Оценка вычислительной сложности предложенного метода дана на примере получения клеточных аналогов традиционного алгоритма умножения матриц.

УЛЬТРАБЫСТРЫЙ КЛЕТОЧНЫЙ МЕТОД УМНОЖЕНИЯ $(4\Omega \times 4\Omega)$-МАТРИЦ

Ультрабыстрый метод является внешним методом, оперирующим клеточными подматрицами и позволяющим варьировать их порядок. В качестве внутренних методов используются известные клеточные методы, принадлежащие семейству клеточных методов умножения матриц [2–5]. Порядок числовой подматрицы Ω зависит от выбранного внутреннего клеточного метода и может принимать следующие значения: $\Omega = 2\mu r, 3\mu r, \; 2^q \cdot \mu r, \; 3^q \cdot \mu r, \; 2^\gamma \cdot 3^q \mu r,$ где $\mu > 1, \; q > 1, \; \gamma > 0, \; r$ — порядок числовой клетки, зависящий от выбранного для каждого клеточного метода внутреннего алгоритма, в качестве которого используются известные алгоритмы умножения матриц, оперирующие числами.

Представленные на рис. 1 и 2 исходные матрицы A и B порядка $n = 4\Omega$ декомпозируются на числовые клетки A_{ij} и B_{ij} заданного порядка r, в результате чего образуются клеточные $(m \times m)$-матрицы при $m = n / r, \; \xi = m / 4, i, j = 1, 2, \ldots, m$. Каждая полученная клеточная матрица A и B порядка m разбивается на 16 равных клеточных подматриц $A_{ij}^{\xi\xi}$ и $B_{ij}^{\xi\xi}$ заданного порядка ξ, где нижние индексы $i, j = 1, \ldots, 4$ показывают место этих подматриц в полной $(m \times m)$-матрице, а верхние индексы $\xi\xi$ — число матричных строк и столбцов указанных под-

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
A_{11} & \cdots & A_{1\xi} & A_{1,\xi+1} & \cdots & A_{1,2\xi} & A_{1,2\xi+1} & \cdots & A_{1,3\xi} & A_{1,3\xi+1} & \cdots & A_{1m} \\
\vdots & A_{11}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{12}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{13}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{14}^{\xi\xi} & \vdots \\
A_{\xi 1} & \cdots & A_{\xi\xi} & A_{\xi,\xi+1} & \cdots & A_{\xi,2\xi} & A_{\xi,2\xi+1} & \cdots & A_{\xi,3\xi} & A_{\xi,3\xi+1} & \cdots & A_{\xi m} \\
\hline
A_{\xi+1,1} & \cdots & A_{\xi+1,\xi} & A_{\xi+1,\xi+1} & \cdots & A_{\xi+1,2\xi} & A_{\xi+1,2\xi+1} & \cdots & A_{\xi+1,3\xi} & A_{\xi+1,3\xi+1} & \cdots & A_{\xi+1,m} \\
\vdots & A_{21}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{22}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{23}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{24}^{\xi\xi} & \vdots \\
A_{2\xi,1} & \cdots & A_{2\xi,\xi} & A_{2\xi,\xi+1} & \cdots & A_{2\xi,2\xi} & A_{2\xi,2\xi+1} & \cdots & A_{2\xi,3\xi} & A_{2\xi,3\xi+1} & \cdots & A_{2\xi,m} \\
\hline
A_{2\xi+1,1} & \cdots & A_{2\xi+1,\xi} & A_{2\xi+1,\xi+1} & \cdots & A_{2\xi+1,2\xi} & A_{2\xi+1,2\xi+1} & \cdots & A_{2\xi+1,3\xi} & A_{2\xi+1,3\xi+1} & \cdots & A_{2\xi+1,m} \\
\vdots & A_{31}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{32}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{33}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{34}^{\xi\xi} & \vdots \\
A_{3\xi,1} & \cdots & A_{3\xi,\xi} & A_{3\xi,\xi+1} & \cdots & A_{3\xi,2\xi} & A_{3\xi,2\xi+1} & \cdots & A_{3\xi,3\xi} & A_{3\xi,3\xi+1} & \cdots & A_{3\xi,m} \\
\hline
A_{3\xi+1,1} & \cdots & A_{3\xi+1,\xi} & A_{3\xi+1,\xi+1} & \cdots & A_{3\xi+1,2\xi} & A_{3\xi+1,2\xi+1} & \cdots & A_{3\xi+1,3\xi} & A_{3\xi+1,3\xi+1} & \cdots & A_{3\xi+1,m} \\
\vdots & A_{41}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{42}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{43}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{44}^{\xi\xi} & \vdots \\
A_{m1} & \cdots & A_{m\xi} & A_{m,\xi+1} & \cdots & A_{m,2\xi} & A_{m,2\xi+1} & \cdots & A_{m,3\xi} & A_{m,3\xi+1} & \cdots & A_{m,m}
\end{array}\right]$$

Рис. 1

$$B=\begin{bmatrix}
B_{11} & \cdots & B_{1\xi} & B_{1,\xi+1} & \cdots & B_{1,2\xi} & B_{1,2\xi+1} & \cdots & B_{1,3\xi} & B_{1,3\xi+1} & \cdots & B_{1m}\\
\vdots & B_{11}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{12}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{13}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{14}^{\xi\xi} & \vdots\\
B_{\xi1} & \cdots & B_{\xi\xi} & B_{\xi,\xi+1} & \cdots & B_{\xi,2\xi} & B_{\xi,2\xi+1} & \cdots & B_{\xi,3\xi} & B_{\xi,3\xi+1} & \cdots & B_{\xi m}\\
B_{\xi+1,1} & \cdots & B_{\xi+1,\xi} & B_{\xi+1,\xi+1} & \cdots & B_{\xi+1,2\xi} & B_{\xi+1,2\xi+1} & \cdots & B_{\xi+1,3\xi} & B_{\xi+1,3\xi+1} & \cdots & B_{\xi+1,m}\\
\vdots & B_{21}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{22}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{23}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{24}^{\xi\xi} & \vdots\\
B_{2\xi,1} & \cdots & B_{2\xi,\xi} & B_{2\xi,\xi+1} & \cdots & B_{2\xi,2\xi} & B_{2\xi,2\xi+1} & \cdots & B_{2\xi,3\xi} & B_{2\xi,3\xi+1} & \cdots & B_{2\xi,m}\\
B_{2\xi+1,1} & \cdots & B_{2\xi+1,\xi} & B_{2\xi+1,\xi+1} & \cdots & B_{2\xi+1,2\xi} & B_{2\xi+1,2\xi+1} & \cdots & B_{2\xi+1,3\xi} & B_{2\xi+1,3\xi+1} & \cdots & B_{2\xi+1,m}\\
\vdots & B_{31}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{32}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{33}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{34}^{\xi\xi} & \vdots\\
B_{3\xi,1} & \cdots & B_{3\xi,\xi} & B_{3\xi,\xi+1} & \cdots & B_{3\xi,2\xi} & B_{3\xi,2\xi+1} & \cdots & B_{3\xi,3\xi} & B_{3\xi,3\xi+1} & \cdots & B_{3\xi,m}\\
B_{3\xi+1,1} & \cdots & B_{3\xi+1,\xi} & B_{3\xi+1,\xi+1} & \cdots & B_{3\xi+1,2\xi} & B_{3\xi+1,2\xi+1} & \cdots & B_{3\xi+1,3\xi} & B_{3\xi+1,3\xi+1} & \cdots & B_{3\xi+1,m}\\
\vdots & B_{41}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{42}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{43}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{44}^{\xi\xi} & \vdots\\
B_{m1} & \cdots & B_{m\xi} & B_{m,\xi+1} & \cdots & B_{m,2\xi} & B_{m,2\xi+1} & \cdots & B_{m,3\xi} & B_{m,3\xi+1} & \cdots & B_{m,m}
\end{bmatrix}$$

Рис. 2

$$C=\begin{bmatrix}
C_{11} & \cdots & C_{1\xi} & C_{1,\xi+1} & \cdots & C_{1,2\xi} & C_{1,2\xi+1} & \cdots & C_{1,3\xi} & C_{1,3\xi+1} & \cdots & C_{1m}\\
\vdots & C_{11}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{12}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{13}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{14}^{\xi\xi} & \vdots\\
C_{\xi1} & \cdots & C_{\xi\xi} & C_{\xi,\xi+1} & \cdots & C_{\xi,2\xi} & C_{\xi,2\xi+1} & \cdots & C_{\xi,3\xi} & C_{\xi,3\xi+1} & \cdots & C_{\xi m}\\
C_{\xi+1,1} & \cdots & C_{\xi+1,\xi} & C_{\xi+1,\xi+1} & \cdots & C_{\xi+1,2\xi} & C_{\xi+1,2\xi+1} & \cdots & C_{\xi+1,3\xi} & C_{\xi+1,3\xi+1} & \cdots & C_{\xi+1,m}\\
\vdots & C_{21}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{22}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{23}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{24}^{\xi\xi} & \vdots\\
C_{2\xi,1} & \cdots & C_{2\xi,\xi} & C_{2\xi,\xi+1} & \cdots & C_{2\xi,2\xi} & C_{2\xi,2\xi+1} & \cdots & C_{2\xi,3\xi} & C_{2\xi,3\xi+1} & \cdots & C_{2\xi,m}\\
C_{2\xi+1,1} & \cdots & C_{2\xi+1,\xi} & C_{2\xi+1,\xi+1} & \cdots & C_{2\xi+1,2\xi} & C_{2\xi+1,2\xi+1} & \cdots & C_{2\xi+1,3\xi} & C_{2\xi+1,3\xi+1} & \cdots & C_{2\xi+1,m}\\
\vdots & C_{31}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{32}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{33}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{34}^{\xi\xi} & \vdots\\
C_{3\xi,1} & \cdots & C_{3\xi,\xi} & C_{3\xi,\xi+1} & \cdots & C_{3\xi,2\xi} & C_{3\xi,2\xi+1} & \cdots & C_{3\xi,3\xi} & C_{3\xi,3\xi+1} & \cdots & C_{3\xi,m}\\
C_{3\xi+1,1} & \cdots & C_{3\xi+1,\xi} & C_{3\xi+1,\xi+1} & \cdots & C_{3\xi+1,2\xi} & C_{3\xi+1,2\xi+1} & \cdots & C_{3\xi+1,3\xi} & C_{3\xi+1,3\xi+1} & \cdots & C_{3\xi+1,m}\\
\vdots & C_{41}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{42}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{43}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{44}^{\xi\xi} & \vdots\\
C_{m1} & \cdots & C_{m\xi} & C_{m,\xi+1} & \cdots & C_{m,2\xi} & C_{m,2\xi+1} & \cdots & C_{m,3\xi} & C_{m,3\xi+1} & \cdots & C_{m,m}
\end{bmatrix}$$

Рис. 3

матриц. Если в качестве внутренних методов используются гибридные клеточные методы [3–5], то каждая клеточная $(\xi\times\xi)$-подматрица дополнительно разбивается в соответствии с клеточной структурой этих методов. Произведением клеточных матриц A и B является матрица C, представленная на рис. 3 и имеющая аналогичную каждому сомножителю клеточную структуру.

Ультрабыстрый клеточный метод умножения матриц, оперирующий клеточными подматрицами порядка ξ, состоит из четырех этапов.

Этап 1. Вычисляем суммы клеточных $(\xi\times\xi)$-подматриц $X^1,\ldots,X^{20}$ и $Y^1,\ldots,Y^{20}$ по следующим формулам:

$$
\begin{aligned}
X^{l} &= (A^{\xi\xi}_{2i-1,2k-1} + A^{\xi\xi}_{2i,2k}), & Y^{l} &= (B^{\xi\xi}_{2k-1,2j-1} + B^{\xi\xi}_{2k,2j}),\\
X^{l+4} &= (A^{\xi\xi}_{2i,2k-1} + A^{\xi\xi}_{2i,2k}), & Y^{l+4} &= (B^{\xi\xi}_{2k-1,2j} - B^{\xi\xi}_{2k,2j}),\\
X^{l+8} &= (A^{\xi\xi}_{2i-1,2k-1} + A^{\xi\xi}_{2i-1,2k}), & Y^{l+8} &= (B^{\xi\xi}_{2k,2j-1} - B^{\xi\xi}_{2k-1,2j}),\\
X^{l+12} &= (A^{\xi\xi}_{2i,2k-1} - A^{\xi\xi}_{2i-1,2k-1}), & Y^{l+12} &= (B^{\xi\xi}_{2k-1,2j-1} + B^{\xi\xi}_{2k-1,2j}),\\
X^{l+16} &= (A^{\xi\xi}_{2i-1,2k} - A^{\xi\xi}_{2i,2k}), & Y^{l+16} &= (B^{\xi\xi}_{2k,2j-1} + B^{\xi\xi}_{2k,2j}),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $i, j, k = 1, 2;\ l = 1, \ldots, 4$.

Оперируя числовыми $(r \times r)$-клетками, вычисляем матричные суммы согласно (1) по следующим формулам:

$$
\begin{aligned}
X^{1}_{ij} &= (A_{ij} + A_{\xi+i,\xi+j}), & Y^{1}_{ij} &= (B_{ij} + B_{\xi+i,\xi+j}),\\
X^{2}_{ij} &= (A_{i,2\xi+j} + A_{\xi+i,3\xi+j}), & Y^{2}_{ij} &= (B_{i,2\xi+j} + B_{\xi+i,3\xi+j}),\\
X^{3}_{ij} &= (A_{2\xi+i,j} + A_{3\xi+i,\xi+j}), & Y^{3}_{ij} &= (B_{2\xi+i,j} + B_{3\xi+i,\xi+j}),\\
X^{4}_{ij} &= (A_{2\xi+i,2\xi+j} + A_{3\xi+i,3\xi+j}), & Y^{4}_{ij} &= (B_{2\xi+i,2\xi+j} + B_{3\xi+i,3\xi+j}),\\
X^{5}_{ij} &= (A_{\xi+i,j} + A_{\xi+i,\xi+j}), & Y^{5}_{ij} &= (B_{i,\xi+j} - B_{\xi+i,\xi+j}),\\
X^{6}_{ij} &= (A_{\xi+i,2\xi+j} + A_{\xi+i,3\xi+j}), & Y^{6}_{ij} &= (B_{i,3\xi+j} - B_{\xi+i,3\xi+j}),\\
X^{7}_{ij} &= (A_{3\xi+i,j} + A_{3\xi+i,\xi+j}), & Y^{7}_{ij} &= (B_{2\xi+i,\xi+j} - B_{3\xi+i,\xi+j}),\\
X^{8}_{ij} &= (A_{3\xi+i,2\xi+j} + A_{3\xi+i,3\xi+j}), & Y^{8}_{ij} &= (B_{2\xi+i,3\xi+j} - B_{3\xi+i,3\xi+j}),\\
X^{9}_{ij} &= (A_{ij} + A_{i,\xi+j}), & Y^{9}_{ij} &= (B_{\xi+i,j} - B_{ij}),\\
X^{10}_{ij} &= (A_{i,2\xi+j} + A_{i,3\xi+j}), & Y^{10}_{ij} &= (B_{\xi+i,2\xi+j} - B_{i,2\xi+j}),\\
X^{11}_{ij} &= (A_{2\xi+i,j} + A_{2\xi+i,\xi+j}), & Y^{11}_{ij} &= (B_{3\xi+i,j} - B_{2\xi+i,j}),\\
X^{12}_{ij} &= (A_{2\xi+i,2\xi+j} + A_{2\xi+i,3\xi+j}), & Y^{12}_{ij} &= (B_{3\xi+i,2\xi+j} - B_{2\xi+i,2\xi+j}),\\
X^{13}_{ij} &= (A_{\xi+i,j} - A_{ij}), & Y^{13}_{ij} &= (B_{ij} + B_{i,\xi+j}),\\
X^{14}_{ij} &= (A_{\xi+i,2\xi+j} - A_{i,2\xi+j}), & Y^{14}_{ij} &= (B_{i,2\xi+j} + B_{i,3\xi+j}),\\
X^{15}_{ij} &= (A_{3\xi+i,j} - A_{2\xi+i,j}), & Y^{15}_{ij} &= (B_{2\xi+i,j} + B_{2\xi+i,\xi+j}),\\
X^{16}_{ij} &= (A_{3\xi+i,2\xi+j} - A_{2\xi+i,2\xi+j}), & Y^{16}_{ij} &= (B_{2\xi+i,2\xi+j} + B_{2\xi+i,3\xi+j}),\\
X^{17}_{ij} &= (A_{i,\xi+j} - A_{\xi+i,\xi+j}), & Y^{17}_{ij} &= (B_{\xi+i,j} + B_{\xi+i,\xi+j}),\\
X^{18}_{ij} &= (A_{i,3\xi+j} - A_{\xi+i,3\xi+j}), & Y^{18}_{ij} &= (B_{\xi+i,2\xi+j} + B_{\xi+i,3\xi+j}),\\
X^{19}_{ij} &= (A_{2\xi+i,\xi+j} - A_{3\xi+i,\xi+j}), & Y^{19}_{ij} &= (B_{3\xi+i,j} + B_{3\xi+i,\xi+j}),\\
X^{20}_{ij} &= (A_{2\xi+i,3\xi+j} - A_{3\xi+i,3\xi+j}), & Y^{20}_{ij} &= (B_{3\xi+i,2\xi+j} + B_{3\xi+i,3\xi+j}),
\end{aligned}
$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, \xi$.

Этап 2. Вычисляем матричные произведения $P^1, P^2, \ldots, P^{56}$, для реализации каждого из которых используются известные клеточные методы умножения матриц [2–5]:

$$P^1 = X^1Y^1,\ P^2 = X^2Y^3,\ P^3 = X^1Y^2,\ P^4 = X^2Y^4,\ P^5 = X^3Y^1, P^6 = X^4Y^3,$$

$$P^7 = X^3Y^2,\ P^8 = X^4Y^4,\ P^9 = X^5B_{11}^{\xi\xi},\ P^{10} = X^6B_{31}^{\xi\xi},\ P^{11} = X^5B_{13}^{\xi\xi},$$

$$P^{12} = X^6B_{33}^{\xi\xi},\ P^{13} = X^7B_{11}^{\xi\xi},\ P^{14} = X^8B_{31}^{\xi\xi},\ P^{15} = X^7B_{13}^{\xi\xi},\ P^{16} = X^8B_{33}^{\xi\xi},$$

$$P^{17} = A_{11}^{\xi\xi}Y^5, P^{18} = A_{13}^{\xi\xi}Y^7,\ P^{19} = A_{11}^{\xi\xi}Y^6,\ P^{20} = A_{13}^{\xi\xi}Y^8,\ P^{21} = A_{31}^{\xi\xi}Y^5,$$

$$P^{22} = A_{33}^{\xi\xi}Y^7,\ P^{23} = A_{31}^{\xi\xi}Y^6,\ P^{24} = A_{33}^{\xi\xi}Y^8,\ P^{25} = A_{22}^{\xi\xi}Y^9, P^{26} = A_{24}^{\xi\xi}Y^{11},$$

$$P^{27} = A_{22}^{\xi\xi}Y^{10},\ P^{28} = A_{24}^{\xi\xi}Y^{12},\ P^{29} = A_{42}^{\xi\xi}Y^9, P^{30} = A_{44}^{\xi\xi}Y^{11},\ P^{31} = A_{42}^{\xi\xi}Y^{10}, \quad (2)$$

$$P^{32} = A_{44}^{\xi\xi}Y^{12},\ P^{33} = X^9B_{22}^{\xi\xi},\ P^{34} = X^{10}B_{42}^{\xi\xi},\ P^{35} = X^9B_{24}^{\xi\xi},\ P^{36} = X^{10}B_{44}^{\xi\xi},$$

$$P^{37} = X^{11}B_{22}^{\xi\xi},\ P^{38} = X^{12}B_{42}^{\xi\xi},\ P^{39} = X^{11}B_{24}^{\xi\xi},\ P^{40} = X^{12}B_{44}^{\xi\xi},\ P^{41} = X^{13}Y^{13},$$

$$P^{42} = X^{14}Y^{13},\ P^{43} = X^{13}Y^{14},\ P^{44} = X^{14}Y^{16},\ P^{45} = X^{15}Y^{13}, P^{46} = X^{16}Y^{15},$$

$$P^{47} = X^{15}Y^{14},\ P^{48} = X^{16}Y^{16},\ P^{49} = X^{17}Y^{17},\ P^{50} = X^{18}Y^{19},\ P^{51} = X^{17}Y^{18},$$

$$P^{52} = X^{18}Y^{20},\ P^{53} = X^{19}Y^{17},\ P^{54} = X^{20}Y^{19},$$
$$P^{55} = X^{19}Y^{18},\ P^{56} = X^{20}Y^{20}.$$

Этап 3. Оперируя клетками порядка r, вычисляем промежуточные матричные суммы Z_{ij}^k $(k = 1, 2, \ldots, 28)$ по следующим формулам:

$$Z_{ij}^1 = P_{ij}^1 + P_{ij}^2,\ Z_{ij}^2 = P_{ij}^3 + P_{ij}^4,\ Z_{ij}^3 = P_{ij}^5 + P_{ij}^6,\ Z_{ij}^4 = P_{ij}^7 + P_{ij}^8,\ Z_{ij}^5 = P_{ij}^9 + P_{ij}^{10},$$

$$Z_{ij}^6 = P_{ij}^{11} + P_{ij}^{12},\ Z_{ij}^7 = P_{ij}^{13} + P_{ij}^{14},\ Z_{ij}^8 = P_{ij}^{15} + P_{ij}^{16},\ Z_{ij}^9 = P_{ij}^{17} + P_{ij}^{18},\ Z_{ij}^{10} = P_{ij}^{19} + P_{ij}^{20},$$

$$Z_{ij}^{11} = P_{ij}^{21} + P_{ij}^{22},\ Z_{ij}^{12} = P_{ij}^{23} + P_{ij}^{24}, Z_{ij}^{13} = P_{ij}^{25} + P_{ij}^{26},\ Z_{ij}^{14} = P_{ij}^{27} + P_{ij}^{28},$$

$$Z_{ij}^{15} = P_{ij}^{29} + P_{ij}^{30},\ Z_{ij}^{16} = P_{ij}^{31} + P_{ij}^{32}, Z_{ij}^{17} = P_{ij}^{33} + P_{ij}^{34},\ Z_{ij}^{18} = P_{ij}^{35} + P_{ij}^{36}, \quad (3)$$

$$Z_{ij}^{19} = P_{ij}^{37} + P_{ij}^{38},\ Z_{ij}^{20} = P_{ij}^{39} + P_{ij}^{40},\ Z_{ij}^{21} = P_{ij}^{41} + P_{ij}^{42}, Z_{ij}^{22} = P_{ij}^{43} + P_{ij}^{44},$$

$$Z_{ij}^{23} = P_{ij}^{45} + P_{ij}^{46},\ Z_{ij}^{24} = P_{ij}^{47} + P_{ij}^{48},\ Z_{ij}^{25} = P_{ij}^{49} + P_{ij}^{50},$$

$$Z_{ij}^{26} = P_{ij}^{51} + P_{ij}^{52},\ Z_{ij}^{27} = P_{ij}^{53} + P_{ij}^{54},\ Z_{ij}^{28} = P_{ij}^{55} + P_{ij}^{56},$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, \xi$.

Этап 4. Вычисляем результирующие клеточные $(\xi \times \xi)$-подматрицы $C_{ij}^{\xi\xi}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 4)$:

$$C_{11}^{\xi\xi} = Z^1 + Z^{13} - Z^{17} + Z^{25},\ C_{12}^{\xi\xi} = Z^9 + Z^{17},\ C_{13}^{\xi\xi} = Z^2 + Z^{14} - Z^{18} + Z^{26},$$

$$C_{14}^{\xi\xi} = Z^{10} + Z^{18},\ C_{21}^{\xi\xi} = Z^5 + Z^{13},\ C_{22}^{\xi\xi} = Z^1 - Z^5 + Z^9 + Z^{21},\ C_{23}^{\xi\xi} = Z^6 + Z^{14},$$

$$C_{24}^{\xi\xi} = Z^2 - Z^6 + Z^{10} + Z^{22},\ C_{31}^{\xi\xi} = Z^3 + Z^{15} - Z^{19} + Z^{27},\ C_{32}^{\xi\xi} = Z^{11} + Z^{19}, \quad (4)$$

$$C_{33}^{\xi\xi} = Z^4 + Z^{16} - Z^{20} + Z^{28},\ C_{34}^{\xi\xi} = Z^{12} + Z^{20},\ C_{41}^{\xi\xi} = Z^7 + Z^{15},$$

$$C_{42}^{\xi\xi} = Z^3 - Z^7 + Z^{11} + Z^{23},\ C_{43}^{\xi\xi} = Z^8 + Z^{16},\ C_{44}^{\xi\xi} = Z^4 - Z^8 + Z^{12} + Z^{24}.$$

Оперируя $(r \times r)$-клетками, вычисляем результирующие матрицы C_{ij} согласно (4) по следующим формулам:

$$C_{ij} = Z_{ij}^1 + Z_{ij}^{13} - Z_{ij}^{17} + Z_{ij}^{25},\ C_{i,\xi+j} = Z_{ij}^9 + Z_{ij}^{17},\ C_{i,2\xi+j} = Z_{ij}^2 + Z_{ij}^{14} - Z_{ij}^{18} + Z_{ij}^{26},$$

$$C_{i,3\xi+j} = Z_{ij}^{10} + Z_{ij}^{18},\ C_{\xi+i,j} = Z_{ij}^5 + Z_{ij}^{13},\ C_{\xi+i,\xi+j} = Z_{ij}^1 - Z_{ij}^5 + Z_{ij}^9 + Z_{ij}^{21},$$

$$C_{\xi+i,2\xi+j} = Z_{ij}^6 + Z_{ij}^{14},\ C_{\xi+i,3\xi+j} = Z_{ij}^2 - Z_{ij}^6 + Z_{ij}^{10} + Z_{ij}^{22},$$

$$C_{2\xi+i,j} = Z_{ij}^3 + Z_{ij}^{15} - Z_{ij}^{19} + Z_{ij}^{27},\ C_{2\xi+i,\xi+j} = Z_{ij}^{11} + Z_{ij}^{19},$$

$$C_{2\xi+i,2\xi+j} = Z_{ij}^4 + Z_{ij}^{16} - Z_{ij}^{20} + Z_{ij}^{28},\ C_{2\xi+i,3\xi+j} = Z_{ij}^{12} + Z_{ij}^{20},$$

$$C_{3\xi+i,j} = Z_{ij}^7 + Z_{ij}^{55},\ C_{3\xi+i,\xi+j} = Z_{ij}^3 - Z_{ij}^7 + Z_{ij}^{11} + Z_{ij}^{23},$$

$$C_{3\xi+i,2\xi+j} = Z_{ij}^8 + Z_{ij}^{16},\ C_{3\xi+i,3\xi+j} = Z_{ij}^4 - Z_{ij}^8 + Z_{ij}^{12} + Z_{ij}^{24},$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, \xi$.

ОЦЕНКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ УЛЬТРАБЫСТРОГО КЛЕТОЧНОГО МЕТОДА УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

Оценим операционную сложность рассмотренного метода (1)–(4) на примерах его взаимодействия с известными клеточными методами, принадлежащими семейству клеточных методов умножения матриц, для которых в качестве внутреннего алгоритма, оперирующего числами, выбираем традиционный алгоритм умножения матриц, требующий r^3 скалярных операций умножения и $(r^3 - r^2)$ скалярных операций сложения (r — порядок клетки).

Пример 1. Рассмотрим взаимодействие ультрабыстрого метода (1)–(4) с быстрым клеточным методом умножения матриц порядка $\Omega = 2\mu r$ $(\mu > 1)$ [2], на основе которого получен клеточный аналог традиционного алгоритма умножения матриц со следующими значениями мультипликативной, аддитивной и общей сложностей:

- $W_{\text{м}}^* = 0.875\,\Omega^3$ операций умножения;
- $W_{\text{а}}^* = 0.875\,\Omega^3 + 2.75\,\Omega^2$ операций сложения;
- $W_{\text{общ}}^* = 1.75\,\Omega^3 + 2.75\,\Omega^2$ операций умножения/сложения.

При взаимодействии двух упомянутых методов мультипликативная и аддитивная сложности вычислений (2), т.е. сложность вычисления 56 матричных произведений $P^1, P^2, \ldots, P^{56}$, для реализации которых используется быстрый клеточный метод, определяется следующим образом:

$$W_{\text{м}}^{(2)} = 56\,W_{\text{м}}^* = 56 \cdot 0.875\,\Omega^3 = 56 \cdot 0.875 \left(\frac{n}{4}\right)^3 = 0.875 \cdot 0.875\,n^3 \approx 0.765\,n^3$$ операций умножения;

$$W_{\text{а}}^{(2)} = 56W_{\text{а}}^{*} = 56(0.875\Omega^3 + 2.75\Omega^2) = 56\left[0.875\left(\frac{n}{4}\right)^3 + 2.75\left(\frac{n}{4}\right)^2\right] \approx 0.765n^3 +$$

$+9.625n^2$ операций сложения.

При вычислении матричных выражений (1), (3) и (4) необходимы соответственно $40\xi^2$, $28\xi^2$ и $32\xi^2$ матричных операций сложения, для каждой из которых внутренний алгоритм требует r^2 скалярных операций сложения. Суммарная аддитивная сложность вычислений (1), (3) и (4), определяемая количеством скалярных операции сложения, составляет

$$W_{\text{а}}^{(1),(3),(4)} = W_{\text{а}}^{(1)} + W_{\text{а}}^{(3)} + W_{\text{а}}^{(4)} = 40\xi^2 \cdot r^2 + 28\xi^2 \cdot r^2 + 32\xi^2 \cdot r^2 = 100\xi^2 \cdot r^2 =$$

$$= 100\left(\frac{m}{4}\right)^2 \cdot r^2 = 100\left(\frac{n}{4r}\right)^2 \cdot r^2 = 6.25n^2 \text{ операций сложения.}$$

Следовательно, на основе ультрабыстрого клеточного метода (1)–(4) при взаимодействии с быстрым клеточным методом умножения матриц порядка $\Omega = 2\mu r$ [2] получаем клеточный аналог традиционного алгоритма со следующими значениями мультипликативной, аддитивной и общей сложностей:

- $W_{\text{м}} = W_{\text{м}}^{(2)} \approx 0.765n^3$ операций умножения;
- $W_{\text{а}} = W_{\text{а}}^{(2)} + W_{\text{а}}^{(1),(3),(4)} \approx 0.765n^3 + 9.625n^2 + 6.25n^2 \approx 0.765n^3 + 15.875n^2$ операций сложения;
- $W_{\text{общ}} = W_{\text{м}} + W_{\text{а}} \approx 0.765n^3 + 0.765n^3 + 15.875n^2 \approx 1.53n^3 + 15.875n^2$ операций умножения/сложения.

Таким образом, ультрабыстрый метод (1)–(4) при взаимодействии с быстрым клеточным методом [2] обеспечивает минимизацию мультипликативной сложности традиционного алгоритма умножения матриц на 23.5 % при всех значениях n, а также аддитивной и общей сложностей при $n \geq 10^4$, когда сложность $O(n^2) \ll O(n^3)$. Отметим, что при $n = 10^4$ сложность $O(n^2)$ в значениях аддитивной и общей сложностей составляет соответственно 0.2 % и 0.1 % сложности $O(n^3)$. Аналогично рассчитывается вычислительная сложность клеточных аналогов других известных алгоритмов матричного умножения.

Пример 2. Рассмотрим взаимодействие ультрабыстрого метода (1)–(4) с одним из известных гибридных клеточных методов, а именно с объединенным клеточным методом умножения матриц порядка $\Omega = 2^{\gamma} \cdot 3^{q} \mu r$ [5], на основе которого получен клеточный аналог традиционного алгоритма умножения матриц со следующими значениями мультипликативной, аддитивной и общей сложностей:

- $W_{\text{м}}^{*} \approx 0.627\,\Omega^3$ операций умножения;
- $W_{\text{а}}^{*} \approx 0.627\,\Omega^3 + 60.66\Omega^2$ операций сложения;
- $W_{\text{общ}} \approx 1.254\Omega^3 + 60.66\Omega^2$ операций умножения/сложения.

Мультипликативная и аддитивная сложности вычислений (2) соответственно составляют:

$$W_{\text{м}}^{(2)} = 56W_{\text{м}}^{*} = 56 \cdot 0.627\Omega^3 = 56 \cdot 0.627\left(\frac{n}{4}\right)^3 \approx 0.875 \cdot 0.627n^3 \approx 0.548n^3 \text{ опера-}$$

ций умножения;

$$W_{\text{а}}^{(2)} = 56W_{\text{а}}^{*} \approx 56(0.627\Omega^3 + 60.66\Omega^2) \approx 56\left[0.627\left(\frac{n}{4}\right)^3 + 60.66\left(\frac{n}{4}\right)^2\right] \approx$$

$$\approx 0.875 \cdot 0.627n^3 + 60.66 \cdot 3.5n^2 \approx 0.548n^3 + 212.31n^2 \text{ операций сложения.}$$

Согласно расчетам примера 1 аддитивная сложность вычислений (1), (3), (4) составляет

Таблица 1

Характеристики клеточных аналогов традиционного алгоритма, полученных на основе ультрабыстрого клеточного метода				
Внутренние методы	Вычислительная сложность (число операций)			Минимизация мультипликативной, аддитивной и общей сложностей, %
	Мультипликативная $W_{\text{м}}$	Аддитивная $W_{\text{а}}$	Общая $W_{\text{общ}}$	
Быстрый клеточный метод умножения матриц порядка $\Omega = 2\mu r$ [2]	$\approx 0.765n^3$	$\approx 0.765n^3 + 15.9n^2$	$\approx 1.530n^3 + 15.9n^2$	23.5
Быстрый клеточный метод умножения матриц порядка $\Omega = 3\mu r$ [4]	$\approx 0.743n^3$	$\approx 0.743n^3 + 35.4n^2$	$\approx 1.486n^3 + 35.4n^2$	25.7
Смешанный клеточный метод умножения матриц порядка $\Omega = 2^q \cdot \mu r$ [3]	$\approx 0.667n^3$	$\approx 0.667n^3 + 38.8n^2$	$\approx 1.334n^3 + 38.8n^2$	33.3
Смешанный клеточный метод умножения матриц порядка $\Omega = 3^q \cdot \mu r$ [4]	$\approx 0.630n^3$	$\approx 0.630n^3 + 118.9n^2$	$\approx 1.260n^3 + 118.9n^2$	37
Объединенный клеточный метод умножения матриц порядка $\Omega = 2^\gamma \cdot 3^q \cdot \mu r$ [5]	$\approx 0.548n^3$	$\approx 0.548n^3 + 218.5n^2$	$\approx 1.096n^3 + 218.5n^2$	45.2

$W_{\text{a}}^{(1),(3),(4)} = W_{\text{a}}^{(1)} + W_{\text{a}}^{(3)} + W_{\text{a}}^{(4)} = 40\xi^2 \cdot r^2 + 28\xi^2 \cdot r^2 + 32\xi^2 \cdot r^2 = 100\xi^2 \cdot r^2 = 6.25n^2$ операций сложения. Тогда суммарная аддитивная сложность вычислений (1)–(4) составляет:

$W_{\text{a}} = W_{\text{a}}^{(2)} + W_{\text{a}}^{(1),(3),(4)} \approx 0.548n^3 + 212.31n^2 + 6.25n^2 \approx 0.548n^3 + 218.56n^2$ операций сложения.

Следовательно, клеточной аналог традиционного алгоритма умножения матриц, полученный на основе ультрабыстрого клеточного метода (1)–(4), имеет следующие значения мультипликативной, аддитивной и общей сложностей:

- $W_{\text{м}} = W_{\text{м}}^{(2)} \approx 0.548n^3$ операций умножения;
- $W_{\text{a}} = W_{\text{a}}^{(1),(2),(3),(4)} \approx 0.548n^3 + 218.56n^2$ операций сложения;
- $W_{\text{общ}} = W_{\text{м}} + W_{\text{a}} \approx 0.548n^3 + 0.548n^3 + 218.56n^2 \approx 1.096n^3 + 218.56n^2$ операций умножения/сложения.

Таким образом, при взаимодействии с объединенным клеточным методом рассмотренный метод (1)–(4) обеспечивает минимизацию мультипликативной сложности традиционного алгоритма умножения матриц на 45.2 % при всех значениях n, а также аддитивной и общей сложностей при $n \geq 10^5$, когда сложность $O(n^2) \ll O(n^3)$. Отметим, что при $n = 10^5$ сложность $O(n^2)$ в значениях аддитивной и общей сложностей составляет соответственно 0.3 % и 0.1 % сложности $O(n^3)$.

В табл. 1 приведены значения мультипликативной, аддитивной и общей сложностей клеточных аналогов традиционного алгоритма, получаемых на основе метода (1)–(4) при его взаимодействии со всеми методами из семейства клеточных методов умножения матриц, а также процент минимизации вычислительной сложности известных алгоритмов умножения матриц (на примере традиционного алгоритма).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построен ультрабыстрый клеточный метод умножения матриц, который оперирует клеточными подматрицами, варьируя их порядок, и взаимодействует с известными клеточными методами умножения матриц, минимизируя на 12.5 % мультипликативную, аддитивную и общую сложности клеточных аналогов известных алгоритмов умножения матриц, получаемых на их основе.

Новый метод расширяет семейство клеточных методов умножения матриц, дает возможность получить наивысший по сравнению с известными методами процент минимизации (45.2 %) мультипликативной, аддитивной и общей сложностей известных алгоритмов умножения матриц, допускает свободу в выборе масштаба параллелизма, хорошо адаптируется к крупномасштабной параллельной обработке и открывает новые возможности для оптимизации вычислительной сложности известных клеточных методов умножения матриц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Giloi W.K. Parallel supercomputer architectures and their programming models. *Parallel Computing*. 1994. Vol. 20. P. 1443–1470.
2. Елфимова Л.Д. Быстрый клеточный метод умножения матриц. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 3. С. 55–59.
3. Елфимова Л.Д. Смешанный клеточный метод умножения матриц. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. № 1. С. 22–27.
4. Елфимова Л.Д. Новые клеточные методы умножения матриц. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. № 1. С. 19–29.
5. Елфимова Л.Д. Объединенный клеточный метод умножения матриц. *Кибернетика и системный анализ.* 2013. № 5. С. 28–37.
6. Strassen V. Gaussian elimination is not optimal. *Numerische Mathematik*. 1969. Vol. 13. P. 354–356.
7. Laderman J.D. A noncommutative algorithm for multiplying 3 x 3 matrices using 23 multiplications. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1976. Vol. 82, N 1. P. 126–128.

Надійшла до редакції 04.12.2017

Л.Д. Єлфімова

УЛЬТРАШВИДКИЙ КЛІТИННИЙ МЕТОД МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ

Анотація. Розглянуто ультрашвидкий клітинний метод множення матриць, який оперує клітинними підматрицями, взаємодіє з відомими клітинними методами множення матриць та мінімізує обчислювальну складність отриманих на їхній основі клітинних аналогів відомих алгоритмів множення матриць на 12.5 %. Взаємодія ультрашвидкого методу з об'єднаним клітинним методом множення матриць забезпечує найвищий порівняно з відомими клітинними методами відсоток мінімізації (45.2 %) мультиплікативної, адитивної та загальної складності відомих алгоритмів множення матриць. Оцінку обчислювальної складності ультрашвидкого методу наведено на прикладах отримання клітинних аналогів традиційного алгоритму множення матриць.

Ключові слова: лінійна алгебра, клітинні методи, сім'я клітинних методів множення матриць, клітинні аналоги алгоритмів множення матриць.

L.D. Jelfimova

AN ULTRAFAST CELLULAR METHOD OF MATRIX MULTIPLICATION

Abstract. The author considers the ultrafast cellular method of matrix multiplication, which operates by cellular submatrices, interacts with well-known matrix multiplication cellular methods, and minimizes by 12.5% the computational complexity of cellular analogs of well-known matrix multiplication algorithms derived on their basis. The interaction of the ultrafast cellular method with the unified cellular method of matrix multiplication provides the highest (in comparison with well-known methods) percentage (equal to 45.2%) of minimizing of the multiplicative, additive, and overall complexities of the well-known matrix multiplication algorithms. The computational complexity of the ultrafast method is estimated using the models of getting cellular analogs of the traditional matrix multiplication algorithm.

Keywords: linear algebra, cellular methods, family of cellular methods of matrix multiplication, cellular analogs of matrix multiplication algorithms.

Елфимова Лариса Дмитриевна,
младший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев,
e-mail: larisaelf@gmail.com.