

## ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ СЛУЧАЙНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

**Аннотация.** Для решения дискретных некорректных задач методом случайного проецирования исследованы смещение и дисперсия ошибки, возникающие вследствие усреднения по реализациям случайной матрицы. Получена оценка вектора входа, позволяющая значительно повысить точность решения таких задач методом случайного проецирования.

**Ключевые слова:** дискретная некорректная задача, случайное проецирование, усреднение по случайным матрицам.

### ВВЕДЕНИЕ

Решение некорректных задач актуально для многих областей науки и техники. Дискретные некорректные задачи (ДНЗ) возникают, например, при дискретизации интегральных уравнений в таких областях, как спектрометрия, гравиметрия, магнитометрия, электроразведка и др. [1–3].

В случае линейной ДНЗ матрица, моделирующая некоторую измерительную систему, выполняет линейное преобразование входного вектора в выходной. Для ДНЗ характерно, что выходной вектор содержит шум и ряд сингулярных чисел матрицы плавно спадает к нулю. При этом решение (оценка входного вектора) с использованием обращения матрицы преобразования является неустойчивым и неточным. Для преодоления неустойчивости и повышения точности решения используют методы регуляризации [3–5]. Однако разработка эффективных устойчивых методов решения ДНЗ по-прежнему актуальна.

В разрабатываемом автором методе решения ДНЗ на основе случайного проецирования [6–8] на точность решения оказывают влияние две случайные величины (с.в.): аддитивный шум в выходном векторе и гауссова случайная матрица, выполняющая случайное проецирование. В работах [9, 10] показано, что существует оптимальный размер случайной матрицы, обеспечивающий минимум ошибки решения при заданном уровне шума.

Экспериментальные результаты свидетельствуют о том, что при усреднении по реализациям случайной матрицы зависимость ошибки решения от размера матрицы сглаживается, число локальных минимумов уменьшается. Полагаем, что это поможет разрабатывать более эффективные алгоритмы поиска близкого к оптимальному размера случайной матрицы.

В работах [9–12] проведено аналитическое исследование ошибки решения ДНЗ, где вначале выделены составляющие ошибки, одна из которых содержит шум в выходном векторе, другая не содержит шума, а затем проведено усреднение по реализациям шума и усреднение по реализациям случайной матрицы. Полученные таким образом выражения позволяют исследовать составляющие ошибки и являются основой для построения критерия выбора размера случайной матрицы, близкого к оптимальному.

В настоящей статье предлагается выделить составляющие ошибки решения, появляющиеся вследствие усреднения по реализациям случайной матрицы, а затем усреднить по реализациям шума в выходном векторе. Это делает более наглядными источники ошибки решения и позволяет повысить точность решения ДНЗ по сравнению с методом случайного проецирования.

## 1. РЕШЕНИЕ ДНЗ МЕТОДОМ СЛУЧАЙНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Во многих практических приложениях преобразование вектора  $\mathbf{x}$  описывается линейной моделью вида

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

где известны матрица  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  и вектор  $\mathbf{b} \in \mathfrak{R}^N$  ( $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ). Компоненты вектора шума  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathfrak{R}^N$  — реализации независимых случайных величин (с.в.), имеющих гауссово распределение с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ . Требуется оценить вектор  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^N$ .

Будем считать  $\mathbf{A}$  матрицей, моделирующей некоторую линейную измерительную систему и выполняющей линейное преобразование вектора  $\mathbf{x}$  в вектор  $\mathbf{b}$ . Соответственно будем называть неизвестный вектор  $\mathbf{x}$  входным, а известный вектор  $\mathbf{b}$  — выходным.

Далее разрабатывается подход, основанный на отыскании минимума ошибки решения ДНЗ с использованием случайного проецирования (RP), обеспечивающий устойчивость решения. Случайное проецирование является разновидностью методов формирования нейросетевых распределенных представлений [13–20].

Для решения на основе этого подхода обе части исходного уравнения (1) умножим на матрицу  $\mathbf{R}_k \in \mathfrak{R}^{k \times N}$ , элементы которой — реализации случайной величины с гауссовым распределением, нулевым средним и единичной дисперсией. Получим уравнение

$$\mathbf{R}_k \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{R}_k \mathbf{b}$$

и оценку входного вектора

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b}, \quad (2)$$

где  $(\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+$  — псевдообратная матрица. Отметим, что последняя широко используется в исследованиях нейронных сетей [21–23].

Ошибка восстановления входного вектора  $\mathbf{x}$  есть

$$e_R = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2. \quad (3)$$

Для отыскания  $k$ , обеспечивающего значение ошибки решения, близкое к минимальному, разработан подход, рассмотренный в [9, 10]. Получены неравенства, характеризующие значение  $k$ , при котором ошибка минимальна.

Экспериментальное исследование [10] показало, что оптимальные размерности модели (количество строк матрицы  $\mathbf{R}_k$ ) для ошибки восстановления входного вектора и ошибки восстановления незашумленного выходного вектора близки. Поэтому зависимость ошибки восстановления незашумленного выходного вектора от размерности модели может использоваться для определения оптимальной размерности модели.

В работе [10] экспериментально показано, что при усреднении по реализациям случайной матрицы зависимость ошибки решения от размера матрицы сглаживается, число локальных минимумов уменьшается. В целях исследования влияния усреднения по реализациям случайной матрицы на зависимость ошибки от размера матрицы усреднение (нахождение м.о.) было проведено аналитически [11, 12] и получено следующее выражение для ошибки решения ДНЗ:

$$E_{\boldsymbol{\varepsilon}} \{E_{\boldsymbol{\varepsilon}} \{e_R\}\} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{U} \mathbf{S}^2 \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{x} + \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T), \quad (4)$$

где  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{U}$  — матрицы собственных значений и собственных векторов для  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{D}_k$  — диагональная матрица, значения элементов которой подробнее рассмотрены далее.

При вычислении м.о. по случайным матрицам для ошибки (4) вначале группировались слагаемые, содержащие вектор шума, и слагаемые, не содержащие его (стохастическая и детерминированная составляющие ошибки  $e_R = e_{R_s} + e_{R_d}$ ), затем вычислялось м.о. по векторам шума  $E_{\boldsymbol{\varepsilon}} \{e_R\} = E_{\boldsymbol{\varepsilon}} \{e_{R_s}\} + e_{R_d}$ , и для полу-

ченного выражения вычислялось м.о. по реализациям случайной матрицы  $E_R \{E_\varepsilon \{e_R\}\}$ . Такой подход к разложению ошибки на составляющие не позволил выявить полезную структуру ошибки: смещение и дисперсия ошибки, появляющиеся вследствие усреднения по реализациям случайной матрицы, не выражены явно и поэтому не анализировались.

Получим выражения для ошибки в таком виде, который позволяет предложить метод решения ДНЗ с уменьшенной ошибкой относительно метода случайного проецирования [8–10].

## 2. СМЕЩЕНИЕ И ДИСПЕРСИЯ ОШИБКИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВХОДНОГО ВЕКТОРА ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ПО СЛУЧАЙНЫМ МАТРИЦАМ

Получим составляющие смещения и дисперсии при усреднении ошибки (3) по реализациям случайной матрицы  $\mathbf{R}_k$ . Воспользуемся известным приемом [24–26] для выделения составляющих ошибки: прибавим и вычтем усредненную оценку  $\mathbf{x}^*$

$$e_R = \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*\|^2, \quad (5)$$

где  $\bar{\mathbf{x}} = E_R \{\mathbf{x}^*\}$  — значение оценки  $\mathbf{x}^*$ , усредненной по реализациям случайной матрицы  $\mathbf{R}_k$ .

В работе [27] получены важные результаты, связанные с усреднением (нахождением м.о.) по случайным матрицам  $\mathbf{R}_k$  выражений вида

$$E_R \{\mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{B} \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k\}, E_R \{\mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{Z} \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k\}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  — любая симметричная положительно-полуопределенная матрица,  $\mathbf{Z} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  — диагональная матрица собственных значений матрицы  $\mathbf{B}$ .

Поэтому преобразуем  $(\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+$ , необходимую для получения  $\mathbf{x}^*$  (2) и  $E_R \{\mathbf{x}^*\}$ , к виду (6). Ранг случайной матрицы равен  $k$  почти наверное [28]. Так как  $\text{rank}(\mathbf{R}_k \mathbf{A}) \leq \text{rank}(\mathbf{R}_k)$ , а согласно неравенству Сильвестра  $\text{rank}(\mathbf{R}_k \mathbf{A}) \geq \text{rank}(\mathbf{R}_k)$ , то  $\text{rank}(\mathbf{R}_k \mathbf{A}) = k$ , т.е. строки  $\mathbf{R}_k \mathbf{A}$  линейно независимы. Для  $\mathbf{M} \in \mathfrak{R}^{k \times N}$  с линейно независимыми строками  $\mathbf{M}^+ = \mathbf{M}^T (\mathbf{M} \mathbf{M}^T)^{-1}$ , поэтому  $(\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ = (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^T (\mathbf{R}_k \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{R}_k^T)^{-1}$  и

$$\bar{\mathbf{x}} = E_R \{(\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b}\} = \mathbf{A}^T E_R \{\mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k\} \mathbf{b}.$$

С учетом того, что  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{U} \mathbf{S}^2 \mathbf{U}^T$ , преобразуем (3):

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T E_R \{\mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{U} \mathbf{S}^2 \mathbf{U}^T \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k\} \mathbf{b}. \quad (7)$$

Для нахождения м.о. потребуется следующее преобразование. Пусть  $\mathbf{R}_k$  — матрица  $(k \times N)$  с элементами  $r_{ij} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2)$ ,  $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  — любая симметричная положительно-полуопределенная (PSD) матрица, собственное разложение которой  $\mathbf{B} = \mathbf{U} \mathbf{Z} \mathbf{U}^T$ , где  $\mathbf{Z}$  — диагональная матрица собственных значений матрицы  $\mathbf{B}$ , значения диагональных элементов которой упорядочены по убыванию,  $\mathbf{U}$  — ортогональная матрица ( $\mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$ ). Тогда

$$E_R \{\mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{B} \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k\} = \mathbf{U} E_R \{\mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{Z} \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k\} \mathbf{U}^T. \quad (8)$$

Для доказательства отметим, что  $\mathbf{U}(\mathbf{R}_k \mathbf{U})^T = \mathbf{R}_k^T$ , так как  $\mathbf{U}(\mathbf{R}_k \mathbf{U})^T = \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{R}_k^T$  и  $\mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$ . Кроме того,  $\mathbf{R}_k \mathbf{U}$  имеет такое же распределение, как и  $\mathbf{R}_k$  (гауссово с тем же м.о. и дисперсией). Это следует из того, что ввиду 2-устойчивости гауссова распределения и единичной евклидовой нормы столбцов  $\mathbf{U}$  эле-

менты  $\mathbf{R}_k \mathbf{U}$  имеют распределение  $N(0, \sigma^2)$ . Элементы в различных строках  $\mathbf{R}_k \mathbf{U}$  независимы, так как строки  $\mathbf{R}_k$  независимы. Элементы в строке  $\mathbf{R}_k \mathbf{U}$  также независимы. Действительно, элементы в строке  $\mathbf{R}_k \mathbf{U}$  получены как  $\langle \mathbf{r}, \mathbf{u}_i \rangle$ , где  $\mathbf{u}_i$  — вектор-столбец  $\mathbf{U}$ . Распределение  $\langle \mathbf{r}, \mathbf{u}_j \rangle$  вследствие инвариантности к повороту гауссова распределения такое же, как у  $\langle \mathbf{r}, \mathbf{e}_j \rangle$ , где  $\mathbf{e}_j$  — стандартный единичный вектор, т.е. базисный вектор. Так как строка  $\mathbf{r}$  матрицы  $\mathbf{R}$  состоит из независимых с.в.,  $\langle \mathbf{r}, \mathbf{e}_j \rangle$  также независимы для различных  $j$ , т.е. элементы строки  $\mathbf{R}_k \mathbf{U}$  независимы. Таким образом,

$$\begin{aligned} E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{M} \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \} &= E_R \{ \mathbf{U} (\mathbf{R}_k \mathbf{U})^T (\mathbf{R}_k \mathbf{U} \mathbf{Z} \mathbf{U}^T \mathbf{R}_k^T)^{-1} (\mathbf{R}_k \mathbf{U}) \mathbf{U}^T \} = \\ &= \mathbf{U} E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{Z} \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \} \mathbf{U}^T, \end{aligned}$$

т.е. выполняется (8) (см. также в [27] выражение (29), [29, 30]).

Воспользовавшись (8), преобразуем (7) следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^T E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{U} \mathbf{S}^2 \mathbf{U}^T \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \} \mathbf{b} = \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{U} E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{S}^2 \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \} \mathbf{U}^T \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть  $\mathbf{Z} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  — диагональная матрица с  $m$  убывающими положительными значениями  $m$  первых элементов диагонали, т.е. матрица вида  $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{N-m} \end{bmatrix}$ .

Например, такой вид имеет матрица собственных чисел, полученная из собственного разложения  $\mathbf{B} = \mathbf{U} \mathbf{Z} \mathbf{U}^T$  PSD матрицы  $\mathbf{B}$  ранга  $m$ . Пусть  $k \leq m$ ,  $\mathbf{R}_k \in \mathfrak{R}^{k \times N}$ ,

$r_{ij} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2)$ . В работе [27, разд. V] показано, что  $E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{Z} \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \} = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_m, \mu_{m+1} \dots \mu_N) \equiv \mathbf{D}_k(\mathbf{Z}_m)$ ,  $\mu = \text{const}$ , т.е.  $\mathbf{D}_k(\mathbf{Z}_m)$  ( $N \times N$ ) является диагональной (с элементами на диагонали определенного вида). Отметим, что усреднение увеличивает ранг (в случае, когда ранг неполный).

Рассмотрим шаги, приводящие к диагонализации и вычислению  $\mu$  и  $\lambda_i$ . Разобьем  $\mathbf{R}_k$  ( $k \times N$ ) по столбцам на две подматрицы:  $\mathbf{X}_k \in \mathfrak{R}^{k \times m}$  и  $\mathbf{Y}_k \in \mathfrak{R}^{k \times N-m}$ , и запишем  $\mathbf{D}_k(\mathbf{Z}_m)$  в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_k(\mathbf{Z}_m) &= E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{Z} \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \} = \\ &= \begin{bmatrix} E_R \{ \mathbf{X}_k^T (\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T)^{-1} \mathbf{X}_k \} & E_R \{ \mathbf{X}_k^T (\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T)^{-1} \mathbf{Y}_k \} \\ E_R \{ \mathbf{Y}_k^T (\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T)^{-1} \mathbf{X}_k \} & E_R \{ \mathbf{Y}_k^T (\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T)^{-1} \mathbf{Y}_k \} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Так как  $\mathbf{X}_k$  и  $\mathbf{Y}_k$  — независимые случайные матрицы с нулевым м.о., то  $E_R \{ \mathbf{X}_k^T (\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T)^{-1} \} E_R \{ \mathbf{Y}_k \} = 0$ ,  $E_R \{ \mathbf{Y}_k^T \} E_R \{ (\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T)^{-1} \mathbf{X}_k \} = 0$  и

$$\begin{aligned} E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{Z} \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \} &= \\ &= \begin{bmatrix} E_R \{ \mathbf{X}_k^T (\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T)^{-1} \mathbf{X}_k \} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_R \{ \mathbf{Y}_k^T (\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T)^{-1} \mathbf{Y}_k \} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Найдем подматрицы в (10). Преобразуем выражение для  $E_R \{ \mathbf{Y}_k^T (\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T)^{-1} \mathbf{Y}_k \}$ . Обозначим  $(\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T)^{-1} \equiv \mathbf{C}$  ( $k \times k$ ). Каждый элемент матрицы  $\mathbf{Y}_k^T \mathbf{C} \mathbf{Y}_k$  ( $N-m \times N-m$ ) является суммой  $k$  произведений трех чисел — элементов, входящих в произведение матриц. Для каждого недиагонального элемента  $\mathbf{Y}_k^T \mathbf{C} \mathbf{Y}_k$  два из трех сомножителей каждого слагаемого являются различными элементами  $\mathbf{Y}$ , т.е. независимыми случайными величинами с нулевым м.о. Для каждого диаго-

нального элемента  $\mathbf{Y}_k^T \mathbf{C} \mathbf{Y}_k$  формирующие его слагаемые, содержащие все диагональные элементы  $\mathbf{B}$ , в качестве двух других сомножителей имеют одинаковые элементы  $\mathbf{Y}$ , а остальные слагаемые содержат различные элементы  $\mathbf{Y}$ . Поэтому при вычислении  $E_R \{ \mathbf{Y}_k^T (\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T)^{-1} \mathbf{Y}_k \}$  все недиагональные элементы результирующей матрицы  $(N - m \times N - m)$  обратятся в нуль, а диагональные будут равны  $\text{tr} [(\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T)^{-1}] \equiv \mu$ . Тогда  $E_R \{ \mathbf{Y}_k^T (\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T)^{-1} \mathbf{Y}_k \} = \mu \mathbf{I}_{N-m}$ .

Можно показать [27], что  $\mu = \frac{\det(\mathbf{G})}{\det(\Delta \mathbf{Z}_m)}$ , где  $\Delta \mathbf{Z}_m$  — матрица Вандермонда  $(N \times m)$ , ассоциированная с  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{G}$  — матрица, сформированная заменой  $k$ -й строки в  $\Delta \mathbf{Z}_m$  на  $[z_1^{(m-(k+1))} \log(z_1), \dots, z_m^{(m-(k+1))} \log(z_m)]$ . Быструю аппроксимацию  $\mu$  при больших значениях  $m, k$  в [27] получают решением уравнения из  $\frac{m-k}{m} \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{1+\mu z_i}$ .

Теперь рассмотрим  $E_R \{ \mathbf{X}_k^T (\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T)^{-1} \mathbf{X}_k \}$  — матрицу  $(m \times m)$ . Поскольку  $\mathbf{Z}_m$  — квадратная диагональная матрица, имеющая на диагонали положительные значения, существует  $\mathbf{Z}_m^{1/2}$  и  $\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T$  можно представить в виде  $\mathbf{W} \mathbf{W}^T$ , где  $\mathbf{W} = \mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m^{1/2}$ . Поэтому запишем

$$E_R \{ \mathbf{X}_k^T (\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T)^{-1} \mathbf{X}_k \} = \mathbf{Z}_m^{-1/2} E \{ \mathbf{W}^T (\mathbf{W} \mathbf{W}^T)^{-1} \mathbf{W} \} \mathbf{Z}_m^{-1/2}.$$

Громоздкая серия диагонализаций [27] дает  $E_R \{ \mathbf{X}_k^T (\mathbf{X}_k \mathbf{Z}_m \mathbf{X}_k^T)^{-1} \mathbf{X}_k \} = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_m) \equiv \Lambda_k(\mathbf{Z}_m)$ . В [31] показано, что  $\lambda_i = \frac{\partial}{\partial z_i} \left( \frac{\det(\mathbf{P})}{\Delta \mathbf{Z}_m} \right)$ , где  $\Delta \mathbf{Z}_m$  — матрица Вандермонда  $(m \times m)$ , ассоциированная с  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{P}$  — матрица, полученная заменой  $k$ -й строки в  $\Delta \mathbf{Z}_m$  на  $\frac{1}{m-(k+1)!} \left\{ \int_0^\infty e^{-t} (tz_i)^{m-(k+1)} \log(tz_i) \right\}_{i=1}^m$ . Выражения в замкнутой форме для  $\lambda_i$  не приводятся (хотя возможно интегрирование и дифференцирование численными методами).

Быструю аппроксимацию  $\lambda_i$  при больших значениях  $m, k$  в [27] получают как  $\lambda_i \approx \frac{\partial \mu}{\partial z_i} \sum_{i=1}^m \frac{z_i}{1+\mu z_i} + \frac{\mu}{1+\mu z_i} - \frac{k}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z_i}$  или  $\lambda_i \approx \frac{\mu}{1+\mu z_i}$ .

Таким образом, используя лемму из [27, разд. IV, с. 5] ( $E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{S}_k^2 \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \} = \mathbf{D}_k$ ), из (9) получаем

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{U} E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{S}_k^2 \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \} \mathbf{U}^T \mathbf{b} = \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{D}_k(\mathbf{S}_k^2) = \text{diag}(\Lambda_k(\mathbf{Z}_m), \mu \mathbf{I}_{N-m})$ , элементы матрицы  $\mathbf{D}_k(\mathbf{S}_k^2)$  зависят только от  $\mathbf{A}$  (ее  $m$  собственных значений,  $m = \text{rank}(\mathbf{A})$ ) и числа строк  $k$  матрицы  $\mathbf{R}_k$ . Учитывая (11), получаем

$$\bar{\mathbf{x}} = E_R \{ (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b} \} = \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}.$$

Таким образом, при усреднении по матрицам  $\mathbf{R}_k$  с i.i.d. элементами из стандартного гауссова распределения  $\bar{\mathbf{x}}$  не зависит от элементов  $\mathbf{R}_k$ .

Чтобы получить составляющие смещения и дисперсии ошибки решения ДНЗ (3) при усреднении по случайным матрицам  $\mathbf{R}_k$ , преобразуем квадрат нормы (5) следующим образом:

$$e_R = \| \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \|^2 + \| \bar{\mathbf{x}} - (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b} \|^2 + 2 \langle \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}} - (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b} \rangle.$$

Так как  $\langle \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}} - (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b} \rangle = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T (\bar{\mathbf{x}} - (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b})$  и  $\bar{\mathbf{x}}$  не зависит от элементов случайной матрицы  $\mathbf{R}_k$ , то  $E_R \{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T (\bar{\mathbf{x}} - (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b})\} = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T E_R \{(\bar{\mathbf{x}} - (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b})\}$ . Поскольку  $E_R \{\bar{\mathbf{x}} - (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b}\} = 0$ , выражение для усредненной по  $\mathbf{R}_k$  ошибки восстановления входного вектора принимает вид

$$E_R \{e_R\} = \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 + E_R \|\bar{\mathbf{x}} - (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b}\|^2.$$

В работах [24–26] изучались смещение и дисперсия ошибки, возникающей вследствие наличия аддитивного шума в выходном векторе. Назовем по аналогии составляющую  $e_R^B = \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2$  квадратом смещения, а  $e_R^V = E_R \|\bar{\mathbf{x}} - (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b}\|^2$  — дисперсией ошибки восстановления вектора  $\mathbf{x}$  (входного) при усреднении по случайным матрицам  $\mathbf{R}_k$ . Преобразуя дисперсию, получаем

$$\begin{aligned} e_R^V &= E_R \|\bar{\mathbf{x}} - (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b}\|^2 = \\ &= \|\bar{\mathbf{x}}\|^2 + E_R \|\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b}\|^2 - 2\langle \bar{\mathbf{x}}, E_R \{(\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b}\} \rangle. \end{aligned}$$

Так как  $\bar{\mathbf{x}} = E_R \{(\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b}\}$  по определению (6), то  $2\langle \bar{\mathbf{x}}, E_R \{(\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b}\} \rangle = 2\|\bar{\mathbf{x}}\|^2$  и

$$e_R^V = E_R \|\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b}\|^2 - \|\bar{\mathbf{x}}\|^2. \quad (12)$$

Преобразуем первое слагаемое в выражении для  $e_R^V$  из (12):

$$\begin{aligned} E_R \|\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b}\|^2 &= \mathbf{b}^T E \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{U} \mathbf{S}^2 \mathbf{U}^T \mathbf{R}_k^T)^+ \mathbf{R}_k \} \mathbf{b} = \\ &= \mathbf{b}^T \mathbf{U} E \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{S}^2 \mathbf{R}_k^T)^+ \mathbf{R}_k \} \mathbf{U}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставив (11) и (13) в (12), получим

$$e_R^V = \mathbf{b}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b} - \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}\|^2. \quad (14)$$

Выражение для  $e_R^B$  с учетом (11) имеет вид

$$e_R^B = \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}\|^2.$$

Поэтому средняя по случайным матрицам ошибка восстановления входного вектора  $\mathbf{x}$  есть

$$E_R \{e_R\} = e_R^B + e_R^V = \|\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}\|^2 + \mathbf{b}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b} - \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}\|^2. \quad (15)$$

### 3. СМЕЩЕНИЕ И ДИСПЕРСИЯ ОШИБКИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВХОДНОГО ВЕКТОРА ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ПО ШУМУ И ПО СЛУЧАЙНЫМ МАТРИЦАМ

Проведем усреднение (15) по реализациям шума  $\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\begin{aligned} E_\varepsilon \{E_R \{e_R\}\} &= E_\varepsilon \{e_R^B\} + E_\varepsilon \{e_R^V\} = E_\varepsilon \{ \|\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}\|^2 \} + \\ &+ E_\varepsilon \{ \mathbf{b}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b} - \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}\|^2 \}. \end{aligned} \quad (16)$$

Запишем (14) в виде  $e_R^V = \|\mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}\|^2$ . Подставив  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}$ , получим

$$\begin{aligned} e_R^V &= \|\mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{U}^T (\mathbf{b}_0 + \boldsymbol{\varepsilon})\|^2 - \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T (\mathbf{b}_0 + \boldsymbol{\varepsilon})\|^2 = \\ &= \|\mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0\|^2 + \|\mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 - 2\langle \mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0, \mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \\ &- \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0\|^2 - \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 - 2\langle \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0, \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon} \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

Усредним (17) по реализациям шума

$$E_e \{e_R^V\} = \|\mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0\|^2 + E_e \{ \|\mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \} - E_e \{ 2\langle \mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0, \mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \} -$$

$-\|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0\|^2 - E_e \{ \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \} - E_e \{ 2 \langle \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0, \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \}$ ,  
и учитывая, что  $E_e \{ 2 \langle \mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0, \mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \} = 0$  и  $E_e \{ 2 \langle \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0, \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \} = 0$ ,  
получаем

$$E_e \{ e_R^V \} = \|\mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0\|^2 + \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T) - \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0\|^2 - E_e \{ \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \}. \quad (18)$$

Для  $e_R^B$  запишем:

$$e_R^B = \|\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T (\mathbf{b}_0 + \boldsymbol{\varepsilon})\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0\|^2 + \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 + \langle \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0, \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$$

и усредним по реализациям шума

$$E_e \{ e_R^B \} = \|\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0\|^2 + E_e \{ \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \} + E_e \{ \langle \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0, \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \}.$$

Учитывая, что  $E_e \{ \langle \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0, \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \} = 0$ , получаем

$$E_e \{ e_R^B \} = \|\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0\|^2 + E_e \{ \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \}.$$

Так как  $\|\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0\|^2 - 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0 \rangle$ , то

$$E_e \{ e_R^B \} = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0\|^2 - 2 \mathbf{b}_0^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0 + E_e \{ \|\mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \}. \quad (19)$$

Просуммировав составляющие дисперсии (18) и смещения (19), получим выражение для ошибки

$$E_e \{ E_R \{ e_R \} \} = E_e \{ e_R^V \} + E_e \{ e_R^B \} = \mathbf{b}_0^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0 + \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T) + \|\mathbf{x}\|^2 - 2 \mathbf{b}_0^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}_0^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0 + \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{U} \mathbf{S}^2 \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{x} + \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T); \mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{N \times N}. \quad (20)$$

Таким образом, (20) совпадает с (4). Далее будет получена оценка, обеспечивающая ошибку решения ДНЗ, меньшую (4), т.е. меньшую ошибки, полученной в [8, 11, 12].

#### 4. УМЕНЬШЕНИЕ ОШИБКИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВХОДНОГО ВЕКТОРА И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Из выражения (15) видно, что ошибку восстановления входного вектора без усреднения по шуму можно уменьшить на величину дисперсии  $e_R^V$  (появляющейся вследствие умножения на случайную матрицу и последующего усреднения), если восстановление входного вектора проводить как

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}, \quad (21)$$

где  $\mathbf{U}$  получена из SVD-разложения  $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T$ , а  $\mathbf{D}_k = E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{S}^2 \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \}$ .

Действительно, при этом получаем ошибку, которая совпадает с квадратом смещения в (15)

$$e_{DR} = \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}\|^2. \quad (22)$$

Назовем метод решения ДНЗ по (21) детерминированным методом на основе аналитического усреднения случайного проецирования (DRP).

Из выражения (16) видно, что усредненная по шуму ошибка восстановления входного вектора  $E_e \{ E_R \{ e_R \} \}$  превышает ошибку (22), усредненную по шуму, т.е. больше чем

$$E_e \{ e_{DR} \} = E_e \{ \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|^2 \} = E_e \{ \|\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}\|^2 \}. \quad (23)$$



**Таблица 1.** Обозначения ошибок решения ДНЗ

Метод решения	Тип усреднения	Формула ошибки	Обозначение
TSVD	Без усреднения	$\  \mathbf{x} - \mathbf{V}_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{U}_k^T \mathbf{b} \ ^2$	eSVD
TSVD	Аналитическое по шуму	$E_\varepsilon \{ \  \mathbf{x} - \mathbf{V}_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{U}_k^T \mathbf{b} \ ^2 \} =$ $= \  (\mathbf{I} - \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T) \mathbf{x} \ ^2 + \sigma^2 \text{tr} (\mathbf{S}_k^{-2})$	Eeps{eSVD}
RP	Без усреднения	$\  \mathbf{x} - (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b} \ ^2$ (3)	eR
RP	Экспериментальное по 500 реализациям шума	$M_\varepsilon \{ \  \mathbf{x} - (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b} \ ^2 \}$	Meps{eR}
RP	Экспериментальное по 500 реализациям матриц	$M_R \{ \  \mathbf{x} - (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b} \ ^2 \}$	Mr{eR}
RP	Аналитическое по шуму и по матрицам	$E_R \{ E_\varepsilon \{ e \} \} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{U} \mathbf{S}^2 \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{x} +$ $+ \sigma^2 \text{tr} (\mathbf{D}_k)$ (4)	Er{Eeps{eR}}
DRP	Аналитическое по матрицам	$e_R = \  \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \ ^2 = \  \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b} \ ^2$ (21)	eDR
DRP	Экспериментальное по 500 реализациям шума	$M_\varepsilon \{ \  \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b} \ ^2 \}$	Meps{eDR}

Исследуем ошибки различных решений в задачах Carasso, Phillips и Delves [32].

**Задача Carasso** [32] — реконструкция временного профиля источника тепла на основе измерения температуры с фиксированного расстояния. Обратное уравнение теплового потока — интегральное уравнение Вольтерры первого рода

$\int_a^x K(x, t) f(t) dt = g(x)$  с интервалом интегрирования  $[0, 1]$ . Ядром является

$K(s, t) = k(s-t)$ ,  $k(t) = (t^{-3/2} / 2\pi^{1/2}) \exp(-1/4t)$ . Интегральное уравнение дискретизируется методом квадратур с использованием простой коллокации и правила средней точки с  $N$  точками. Конструируется точное решение  $\mathbf{x}_0$ , и затем  $\mathbf{b}_0$  вычисляется как  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{A} \mathbf{x}$ , т.е. в этой задаче  $\mathbf{A} \mathbf{x}$  точно равно  $\mathbf{b}_0$ .

**Задача Phillips** [32] — решение уравнения Фредгольма первого рода

$\int_a^b K(s, t) f(t) dt = g(s)$ . Решение  $f$ , ядро  $K$ , правая часть  $g$  имеют вид соответствен-

но:  $f(t) = 1 + \cos(\pi t/3)$  при  $|t| < 3$ ,  $f(t) = 0$  при  $|t| \geq 3$ ;  $K(s, t) = f(s-t)$ ;  $g(s) = (6 - |s|)(1 + 0.5 \cos(\pi s/3)) + (9/2\pi) \sin(\pi |s|/3)$ . Интервал интегрирования  $[-6, 6]$ . Дискретизация осуществляется методом Галеркина. Размер матрицы  $\mathbf{A}$  должен быть кратен 4. В этой задаче  $\mathbf{A} \mathbf{x}$  не точно равно  $\mathbf{b}_0$ .

**Задача Delves** [32] — вычисление второй производной. Проводится дискретизация аналитически заданного уравнения Фредгольма первого рода с ядром  $K$ , которое является функцией Грина второй производной, с правой частью  $g$ , решением  $f$ :  $K(s, t) = s(t-1)$  при  $s < t$ ,  $K(s, t) = t(s-1)$  при  $s \geq t$ ,  $g(s) = (s^3 - s)/6$ ,  $f(t) = t$ . В этой задаче  $\mathbf{A} \mathbf{x}$  точно равно  $\mathbf{b}_0$ .

Решение ДНЗ методом усеченного сингулярного разложения [4] обозначим TSVD, среднее значение —  $M\{\cdot\}$ , остальные обозначения представлены в табл. 1.

Дискретное представление ядер и правых частей для задач Carasso, Phillips, Delves получено с использованием программ Regularization Tools [32]. Результаты исследования приведены на рис. 1–3. Аддитивное зашумление правой части выполнено реализациями гауссовой случайной величины с нулевым м.о. и различной дисперсией («уровень шума»).



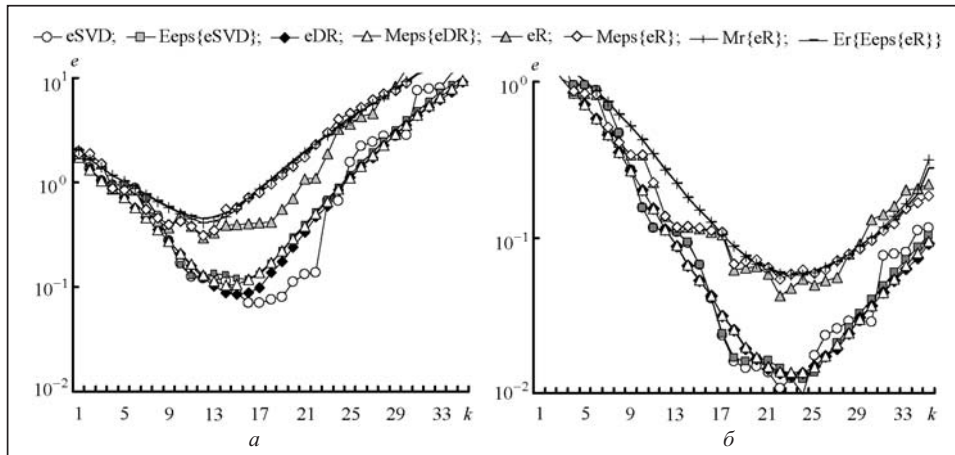


Рис. 1. Зависимости значений ошибки восстановления входного вектора от  $k$  для задачи Carasso при уровнях шума  $10^{-3}$  (а) и  $10^{-4}$  (б)

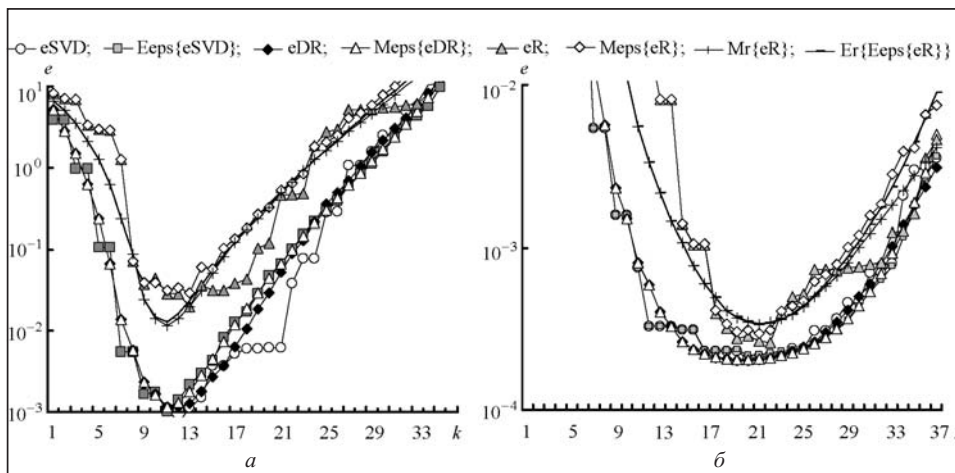


Рис. 2. Зависимости значений ошибки восстановления входного вектора от  $k$  для задачи Phillips при уровнях шума  $10^{-3}$  (а) и  $10^{-5}$  (б)

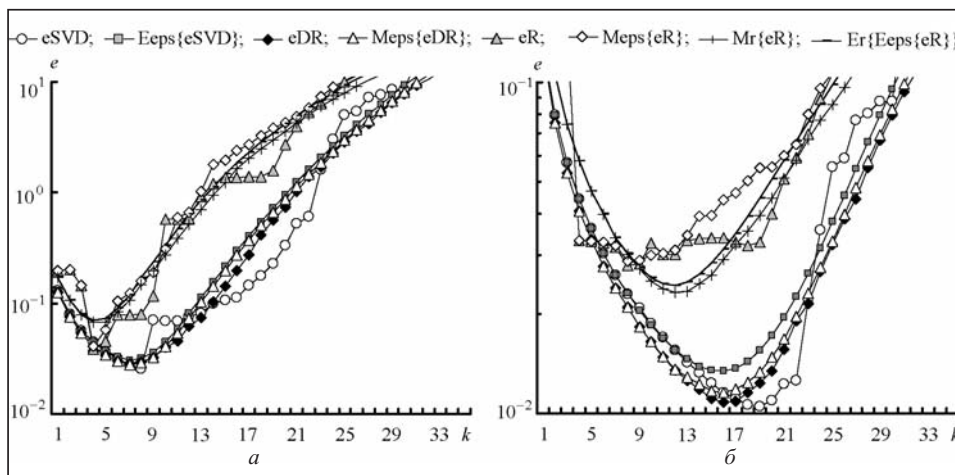


Рис.3. Зависимости значений ошибки восстановления входного вектора от  $k$  для задачи Delves при уровнях шума  $10^{-4}$  (а) и  $10^{-5}$  (б)

Из рисунков видно, что ошибка  $eR$  решения ДНЗ  $\|x - x^*\|^2$  для оценки  $x^* = (R_k A)^+ R_k b$  значительно превышает ошибку решения  $eDR$  для оценки  $\tilde{x} = A^T U D_k U^T b$ , предложенной в настоящей статье. Усреднение  $eDR$  по шуму в выходном векторе ведет к незначительному сглаживанию зависимости ошибки от  $k$ . Это позволяет предположить, что на гладкость характеристики ошибки и ее величину большее влияние оказывает усреднение по случайным матрицам, нежели по шуму в выходном векторе. И действительно, из экспериментальных данных следует, что усреднение ошибки по случайным матрицам  $M\{eR\}$  приводит к значительному сглаживанию зависимости ошибки от  $k$ . Аналитическое усреднение ошибки по случайным матрицам и шуму в выходном векторе  $E\{E\{eR\}\}$  [11, 12] дает зависимость от  $k$ , очень близкую к  $M\{eR\}$ . Для предложенной оценки выходного вектора  $\tilde{x} = A^T U D_k U^T b$  зависимость ошибки  $eDR$  от  $k$  гладкая. Усреднение по шуму  $M\{eDR\}$  мало влияет на гладкость и дает зависимость, близкую к исходной.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При исследовании точности решения ДНЗ методом случайного проецирования изучают влияние на точность решения двух независимых случайных величин: аддитивного шума в выходном векторе (распределение которого полагают гауссовым, а дисперсию в общем случае — неизвестной) и случайной величины, формирующей случайную матрицу (распределение гауссово, дисперсия единичная). Изменение числа строк  $k$  случайной матрицы приводит к изменению точности решения ДНЗ. При отсутствии шума в выходном векторе рост числа строк случайной матрицы ведет к уменьшению ошибки решения. Зашумленность выходного вектора приводит к появлению составляющей ошибки, значение которой возрастет с увеличением числа строк случайной матрицы. Поэтому зависимость ошибки решения ДНЗ от числа строк случайной матрицы (при некоторых уровнях шума) имеет минимум при  $k < N$ .

Для того чтобы сделать зависимость ошибки от числа строк случайной матрицы более гладкой и облегчить тем самым поиск минимума (с использованием критериев выбора модели [10]), в работах [7–10] проводилось усреднение по шуму в выходном векторе. Последующее усреднение по случайным матрицам приводит к дальнейшему сглаживанию зависимости ошибки от размера случайной матрицы [10, 12].

Аналитическое усреднение по случайным матрицам позволило проанализировать смещение и дисперсию ошибки, появляющиеся вследствие усреднения по реализациям случайной матрицы, и получить оценку входного вектора, обеспечивающую большую точность решения ДНЗ, чем оценка, полученная при усреднении совместно по шуму и по матрицам.

Проведенное экспериментальное исследование показало, что предложенная оценка входного вектора обеспечивает точность решения, очень близкую к точности метода усеченного сингулярного разложения, и при этом зависимость ошибки от  $k$  является более гладкой, чем для усеченного сингулярного разложения. Предполагаем, что полученная гладкость может быть использована для повышения точности решения ДНЗ в реальных задачах за счет более точного выбора оптимальной размерности модели критериями выбора модели.

Направлением дальнейших работ является разработка метода определения числа строк случайной матрицы, которое обеспечивает минимальную ошибку решения ДНЗ, на основе предложенной оценки выходного вектора и с использованием критериев выбора модели.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Забулонов Ю.Л., Коростиль Ю.М., Ревунова Е.Г. Оптимизация решения обратной задачи по восстановлению функции плотности распределения поверхностных загрязнений. *Зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г.С. Пухова НАН України «Моделювання та інформаційні технології»*. 2006. Вип. 39. С. 77–83.
2. Rachkovskij D.A., Revunova E.G. Intelligent gamma-ray data processing for environmental monitoring. *Intelligent Data Analysis in Global Monitoring for Environmental and Security*. Kiev; Sofia: ITHEA. 2011. P. 136–157.
3. Старков В.Н. Конструктивные методы вычислительной физики в задачах интерпретации. Киев: Наук. думка, 2002. 263 с.
4. Hansen P. Rank-deficient and discrete ill-posed problems. Numerical aspects of linear inversion. Philadelphia: SIAM, 1998. 247 с.
5. Tikhonov A., Arsenin V. Solution of ill-posed problems. Washington: V.H. Winston, 1977. 231 p.
6. Revunova E.G., Rachkovskij D.A. Using randomized algorithms for solving discrete ill-posed problems. *Intern. Journal Information Theories and Applications*. 2009. Vol. 2, N 16. P. 176–192.
7. Ревунова Е.Г. Исследование составляющих ошибки для решения обратной задачи с использованием случайных проекций. *Математические машины и системы*. 2010. № 4. С. 33–42.
8. Rachkovskij D.A., Revunova E.G. Randomized method for solving discrete ill-posed problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. Vol. 48, N 4. P. 621–635.
9. Revunova E.G. Analytical study of the error components for the solution of discrete ill-posed problems using random projections. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 6. P. 978–991.
10. Revunova E.G. Model selection criteria for a linear model to solve discrete ill-posed problems on the basis of singular decomposition and random projection. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 4. P.647–664.
11. Revunova E.G. Averaging over matrices in solving discrete ill-posed problems on the basis of random projection. *Proc. CSIT'17*. 2017. Vol. 1. P. 473–478.
12. Revunova E.G. Solution of the discrete ill-posed problem on the basis of singular value decomposition and random projection. *Advances in Intelligent Systems and Computing II*. Cham: Springer, 2017. P. 434–449.
13. Kussul E.M., Baidyk T.N., Lukovich V.V., Rachkovskij D.A. Adaptive neural network classifier with multfloat input coding. *Proc. Neuro-Nimes'93*. 1993. P. 209–216.
14. Lukovich V.V., Goltsev A.D., Rachkovskij D.A. Neural network classifiers for micromechanical equipment diagnostics and micromechanical product quality inspection. *Proc. EUFIT'97*. 1997. Vol. 1. P. 534–536.
15. Kussul E.M., Kasatkina L.M., Rachkovskij D.A., Wunsch D.C. Application of random threshold neural networks for diagnostics of micro machine tool condition. IEEE World Congress on Computational Intelligence. 1998. *Neural Networks Proceedings*. 1998. Vol. 1. P. 241–244.
16. Rachkovskij D.A., Slipchenko S.V., Kussul E.M., Baidyk T.N. Properties of numeric codes for the scheme of random subspaces RSC. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2005. Vol. 41, N 4. P. 509–520.
17. Rachkovskij D.A., Misuno I.S., Slipchenko S.V. Randomized projective methods for construction of binary sparse vector representations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. Vol. 48, N 1. P. 146–156.
18. Gritsenko V.I., Rachkovskij D.A., Goltsev A.D., Lukovych V.V., Misuno I.S., Revunova E.G., Slipchenko S.V., Sokolov A.M., Talayev S.A. Neural distributed representation for intelligent information technologies and modeling of thinking. *Cybernetics and Computer Engineering*. 2013. Iss. 3 (173). P. 7–24.
19. Kleyko D., Osipov E., Rachkovskij D.A. Modification of holographic graph neuron using sparse distributed representations. *Procedia Computer Science*. 2016. Vol. 88. P. 39–45.
20. Gritsenko V.I., Rachkovskij D.A., Frolov A.A., Gayler R., Kleyko D., Osipov E. Neural distributed autoassociative memories: A survey. *Cybernetics and Computer Engineering*. 2017. Iss. 2 (188). P. 5–35.
21. Nowicki D., Verga P., Siegelmann H. Modeling reconsolidation in kernel associative memory. *PLoS ONE*. 2013. Vol. 8, Iss. 8: e68189. DOI: 10.1371/journal.pone.0068189.
22. Nowicki D., Siegelmann H. Flexible kernel memory. *PLoS ONE*. 2010. Vol. 5, Iss. 6: e10955. DOI: 10.1371/journal.pone.0010955.
23. Kirichenko N.F., Reznik A.M., Shchetenyuk S.P. Matrix pseudoinversion in the problem of design of associative memory. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2001. Vol. 37, N 3. P. 308–316.

24. Geman S., Bienenstock E., Doursat R. Neural networks and the bias/variance dilemma. *Neural Computation*. 1992. Vol. 4, N 1. P. 1–58.
25. Haykin S.S. Neural networks: A comprehensive foundation. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1999. 842 p.
26. Niyogi P., Girosi F. Generalization bounds for function approximation from scattered noisy data. *Advances in Computational Mathematics*. 1999. Vol. 10, N 1. P. 51–80.
27. Marzetta T., Tucci G., Simon S. A random matrix-theoretic approach to handling singular covariance estimates. *IEEE Trans. Information Theory*. 2011. Vol. 57, N 9. P. 6256–6271.
28. Durrant R.J., Kaban A. A tight bound on the performance of Fisher's linear discriminant in randomly projected data spaces. *Pattern Recognition Letters*. 2012. Vol. 33, N 7. P. 911–919.
29. Durrant R., Kaban A. Random projections as regularizers: Learning a linear discriminant from fewer observations than dimensions. *Machine Learning*. 2015. Vol. 99, N 2. P. 257–286.
30. Woodruff D. Sketching as a tool for numerical linear algebra. *Found. Trends Theor. Comput. Sci.* 2014. Vol. 10, N 1–2. P. 1–157.
31. Tucci G.H., Vega M.V. A note on averages over Gaussian random matrix ensembles. *Journal of Probability and Statistics*. 2013. Vol. 2013. Article ID 941058. P. 1–6.
32. Hansen P.C. Regularization tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems. *Numer. Algorithms*. 1994. Vol. 6, N 1. P. 1–35.

Надійшла до редакції 27.12.2017

### **О.Г. Ревунова**

#### **ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ДИСКРЕТНИХ НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ, ОТРИМАНОГО МЕТОДОМ ВИПАДКОВОГО ПРОЕЦІЮВАННЯ**

**Анотація.** Для розв'язування дискретних некоректних задач методом випадкового проєціювання досліджено зміщення і дисперсію похибки, які виникають внаслідок усереднення за реалізаціями випадкової матриці. Отримано оцінку вектора входу, що дозволяє значно підвищити точність розв'язку таких задач за допомогою методу випадкового проєціювання.

**Ключові слова:** дискретна некоректна задача, випадкове проєціювання, усереднення за випадковими матрицями.

### **E.G. Revunova**

#### **IMPROVING THE ACCURACY OF THE SOLUTION OF ILL-POSED DISCRETE PROBLEM BY RANDOM PROJECTION**

**Abstract.** To solve ill-posed discrete problems by the method of random projection, the bias and variance of the error arising from averaging over the realizations of the random matrix are investigated. An estimate of the input vector is obtained, which makes it possible to significantly improve the accuracy of the solution such problems by the method of random projection.

**Keywords:** discrete ill-posed problem, random projection, averaging over random matrices.

### **Ревунова Елена Георгиевна,**

кандидат техн. наук, старший научный сотрудник Международного научно-учебного центра информационных технологий и систем НАН Украины и МОН Украины, Киев,  
e-mail: egrvunova@gmail.com.