

**МЕТОД РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ  
УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ**

**Аннотация.** Исследован метод разрешающих функций относительно игровых задач управления с интегральными ограничениями. Предложена схема метода, которая обеспечивает окончание игры за определенное гарантированное время в классе стробоскопических стратегий. Показаны результаты сравнения гарантированных времен этой схемы метода разрешающих функций с первым прямым методом Понтрягина для интегральных ограничений.

**Ключевые слова:** линейная дифференциальная игра, интегральные ограничения, многозначное отображение, измеримый селектор, стробоскопическая стратегия.

**ВВЕДЕНИЕ**

Исследован подход к решению игровых задач управления динамическими процессами с интегральными ограничениями [1–4] применительно к общей схеме метода разрешающих функций [5, 6]. Согласно методике [7, 8] введены понятия верхней и нижней разрешающих функций двух типов и получены достаточные условия гарантированного результата в линейной дифференциальной игре с интегральными ограничениями в случае, когда условие М.С. Никольского [1] не имеет места. Предложены две схемы метода разрешающих функций, построены соответствующие стратегии управления и дано сравнение гарантированных времен.

Важной особенностью общей схемы метода разрешающих функций является использование при построении управляющего воздействия информации о поведении противника в прошлом. Причем эта информация необходима лишь для определения некоторого момента переключения, разделяющего активный и пассивный интервалы развития игры. На самих интервалах преследователь применяет контруправление, определяемое стробоскопической стратегией Хайека [9]. Условия, при которых информация о предыстории противника не используется, найдены в [6, 10].

Одним из основных результатов настоящей работы является то, что для реализации гарантированного времени окончания линейной дифференциальной игры с интегральными ограничениями можно ограничиться лишь контруправлением без дополнительных условий.

В данной работе развиты идеи [1–11] и исследований [12–23], а также приведены новые возможности применения метода разрешающих функций к решению игровых задач управления.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, СХЕМА МЕТОДА**

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv. \quad (1)$$

Здесь  $z \in R^n$ ,  $u \in R^m$ ,  $v \in R^k$ ,  $n \geq 1$ ,  $m \geq 1$ ,  $k \geq 1$ ;  $A, B, C$  — постоянные прямоугольные матрицы порядка  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $n \times k$  соответственно;  $u$  — управляющий параметр первого игрока;  $v$  — управляющий параметр второго игрока. Пара-

метры  $u$  и  $v$  выбираются в виде измеримых функций  $u = u(\cdot)$  и  $v = v(\cdot)$  из класса  $L_p[0, +\infty)$ ,  $p > 1$ , и удовлетворяют ограничениям

$$\int_0^{\infty} \|u(\tau)\|^p d\tau \leq \mu^p, \quad \mu > 0, \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} \|v(\tau)\|^p d\tau \leq \nu^p, \quad \nu > 0. \quad (3)$$

Такие управления будем называть допустимыми.

Кроме процесса (1), задано терминальное множество  $M^*$ , имеющее цилиндрический вид

$$M^* = M_0 + M, \quad (4)$$

где  $M_0$  — линейное подпространство из  $R^n$ , а  $M$  — компакт из ортогонального дополнения  $L$  к подпространству  $M_0$  в  $R^n$ .

Траекторию процесса (1)–(3) из начального положения  $z_0 \in R^n$  можно привести на терминальное множество (4) в момент  $T = T(z_0)$ , если по любой допустимой функции  $v(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , построить допустимую функцию

$$u(t) = u(t, z_0, v_t(\cdot)), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

где  $v_t(\cdot) = \{v(\tau), \tau \in [0, t]\}$ , или допустимое контруправление

$$u(t) = u(t, z_0, v(\cdot)), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

такие, что абсолютно непрерывное решение  $z(t)$  задачи Коши  $\dot{z} = Az + Bu(t) - Cv(t)$ ,  $z(0) = z_0$ , попадает на терминальное множество  $M^*$  в момент  $T = T(z_0)$ .

Пусть  $\pi$  — оператор ортогонального проектирования из  $R^n$  на подпространство  $L$ . Рассмотрим линейные отображения  $\pi e^{tA} B_1 R^m \rightarrow L$ ,  $\pi e^{tA} C R^k \rightarrow L$ ,  $t \geq 0$ , где  $B_1$  — постоянная прямоугольная матрица порядка  $n \times m$ .

**Условие 1.** Пусть существует непрерывная неособая матрица  $D(\cdot): R^k \rightarrow R^m$ , которая является решением матричного уравнения  $\pi e^{tA} B_1 X = \pi e^{tA} C$ , где  $X$  — искомая матрица,  $B_1$  — постоянная прямоугольная матрица порядка  $n \times m$ .

Рассмотрим функцию [1]

$$\chi^p(t) = \sup_{\int_0^t \|\omega(\tau)\|^p d\tau \leq 1} \int_0^t \|D(t-\tau)\omega(\tau)\|^p d\tau,$$

где  $\omega(\cdot)$  — произвольная функция из пространства  $L_p^k[0, \infty)$  с указанным ограничением, а  $D(\cdot): R^k \rightarrow R^m$  — некоторая непрерывная неособая матрица, удовлетворяющая условию 1.

С помощью функции  $\chi^p(t)$  определим величину [1]  $X^p = \sup_{0 \leq t < \infty} \chi^p(t)$ .

**Условие 2.** Справедливо неравенство  $\hat{\gamma} = \mu^p - \nu^p X^p > 0$ .

Пусть справедливы условия 1, 2 и  $\gamma(\tau)$  — измеримая функция из класса  $L_p^m[0, +\infty)$ ,  $p > 1$ , которая удовлетворяет ограничению  $\int_0^{\infty} \|\gamma(\tau)\|^p d\tau \leq \hat{\gamma}$ . Следуя [7, 8], будем ее называть функцией сдвига. Зафиксируем некоторую функцию

сдвига  $\gamma(\tau)$  и положим

$$\xi(t) = \xi(t, z_0, \gamma(\cdot)) = \pi e^{tA} z_0 + \int_0^t \pi e^{(t-\tau)A} B \gamma(\tau) d\tau.$$

Обозначим

$$U(t, \tau, v, \alpha) = \left\{ u \in R^m : \|u\| \leq (\|D(t-\tau)v\|^p + \alpha \hat{\gamma})^{\frac{1}{p}} \right\},$$

где  $(t, \tau) \in \Delta = \{(t, \tau) : 0 \leq \tau \leq t < \infty\}$ ,  $v \in R^k$ ,  $\alpha \geq 0$ . Отображение  $U(t, \tau, v, \alpha)$  является выпуклозначным компактнозначным многозначным отображением [24].

Рассмотрим для  $(t, \tau) \in \Delta$ ,  $v \in R^k$ ,  $z_0 \in R^n$  многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t, \tau, v, z_0) = \{\alpha \geq 0 : [\pi e^{(t-\tau)A} B[U(t, \tau, v, \alpha) - \gamma(\tau)] - \pi e^{(t-\tau)A} C v] \cap \alpha[M - \xi(t)] \neq \emptyset\}. \quad (7)$$

**Условие 3.** Для некоторого начального положения  $z_0 \in R^n$  и функции сдвига  $\gamma(\cdot)$  многозначное отображение  $\mathfrak{A}(t, \tau, v, z_0)$  принимает непустые значения на множестве  $\Delta \times R^k$ .

Если это условие выполнено, то по аналогии с [7, 8] введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции

$$\alpha^*(t, \tau, v, z_0) = \sup \{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v, z_0)\}, \quad \alpha_*(t, \tau, v, z_0) = \inf \{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v, z_0)\},$$

где  $\tau \in [0, t]$ ,  $v \in R^k$ ,  $z_0 \in R^n$ . Можно показать [6], что многозначное отображение  $\mathfrak{A}(t, \tau, v, z_0)$  замкнутозначное,  $L \otimes B$ -измеримое по совокупности  $(\tau, v)$ ,  $\tau \in [0, t]$ ,  $v \in R^k$ , а верхняя и нижняя разрешающие функции  $L \otimes B$ -измеримые по совокупности  $(\tau, v)$ ,  $\tau \in [0, t]$ ,  $v \in R^k$ . Поэтому они суперпозиционно измеримы [6], т.е.  $\alpha^*(t, \tau, v(\tau), z_0)$  и  $\alpha_*(t, \tau, v(\tau), z_0)$  измеримы по  $\tau$ ,  $\tau \in [0, t]$ , при любой допустимой функции  $v(\cdot)$ , для которой выполняется ограничение (3). Отметим также, что верхняя разрешающая функция полунепрерывна сверху, а нижняя — полунепрерывна снизу по переменной  $v$ .

Рассмотрим множество

$$T(z_0, \gamma(\cdot)) = \left\{ t \geq 0 : \begin{array}{l} \inf_{\int_0^t \|v(\tau)\|^p d\tau \leq \nu^p} \int_0^t \alpha^*(t, \tau, v(\tau), z_0) d\tau \geq 1, \\ \sup_{\int_0^t \|v(\tau)\|^p d\tau \leq \nu^p} \int_0^t \alpha_*(t, \tau, v(\tau), z_0) d\tau < 1 \end{array} \right\}. \quad (8)$$

Если при некотором  $t > 0$  верхняя разрешающая функция  $\alpha^*(t, \tau, v, z_0) \equiv +\infty$  для  $\tau \in [0, t]$ ,  $v \in R^k$ , то значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (8) естественно положить равным  $+\infty$  и  $t \in T(z_0, \gamma(\cdot))$ , если для этого  $t$  справедливо другое неравенство в фигурных скобках соотношения (8). В случае, когда неравенства в соотношении (8) не выполняются при всех  $t > 0$ , положим  $T(z_0, \gamma(\cdot)) = \emptyset$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия 1–3 и для соответствующей функции сдвига  $\gamma(\cdot)$  множество  $T(z_0, \gamma(\cdot))$  не пусто, а  $T \in T(z_0, \gamma(\cdot))$ . Тогда траекторию процесса (1)–(3) из начального положения  $z_0 \in R^n$  можно привести на терминальное множество (4) в момент  $T$  с использованием допустимого управления вида (5).

**Доказательство.** Пусть  $v(\cdot)$  — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3).

Рассмотрим вначале случай  $\xi(T, z_0, \gamma(\cdot)) \notin M$  и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau - \int_t^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Функции  $\alpha^*(T, \tau, v, z_0)$  и  $\alpha_*(T, \tau, v, z_0)$   $L \otimes B$ -измеримы по совокупности  $(\tau, v)$ ,  $\tau \in [0, T]$ ,  $v \in R^k$ , и поэтому они суперпозиционно измеримы, т.е. функции  $\alpha^*(T, \tau, v(\tau), z_0)$  и  $\alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0)$  измеримы по  $\tau$ ,  $\tau \in [0, T]$ .

По определению  $T$  имеем

$$h(0) = 1 - \int_0^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau \geq 1 - \sup_{\int_0^T \|v(\tau)\|^p d\tau \leq \nu^p} \int_0^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau > 0,$$

$$h(T) = 1 - \int_0^T \alpha^*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau \leq 1 - \inf_{\int_0^T \|v(\tau)\|^p d\tau \leq \nu^p} \int_0^T \alpha^*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau \leq 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции  $h(t)$  существует такой момент времени  $t_*$ ,  $t_* \in (0, T]$ , что  $h(t_*) = 0$ . Отметим, что момент переключения  $t_*$  зависит от предыстории управления второго игрока  $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$ .

Рассмотрим многозначное отображение при  $v \in R^k$ ,  $\tau \in [0, T]$

$$U(\tau, v) = \{u \in U(T, \tau, v, \alpha(T, \tau, v, z_0)) : \pi e^{(T-\tau)A} B[u - \gamma(\tau)] - \pi e^{(T-\tau)A} C v \in \alpha(T, \tau, v, z_0)[M - \xi(T)]\}, \quad (9)$$

где

$$\alpha(T, \tau, v, z_0) = \begin{cases} \alpha^*(T, \tau, v, z_0), & 0 \leq \tau \leq t_*, \\ \alpha_*(T, \tau, v, z_0), & t_* < \tau \leq T. \end{cases}$$

В силу свойств параметров процесса (1), верхней  $\alpha^*(T, \tau, v, z_0)$  и нижней  $\alpha_*(T, \tau, v, z_0)$  разрешающих функций отображение  $U(\tau, v)$   $L \otimes B$ -измеримо [6] и компактнозначно при  $v \in R^k$ ,  $\tau \in [0, T]$ .

В работе [25] А.Ф. Филиппов впервые ввел понятие лексикографического максимума по ортогональному базису  $e_1, \dots, e_n$  от компакта  $A \in K(R^n)$  по следующей формуле:

$$\text{lex max}_{e_1, \dots, e_n} A = \bigcap_{k=0}^n A_k,$$

где  $A_0 = A$ ,  $A_k = \{x \in A_{k-1} : (x, e_k) = c(A_{k-1}, \psi)\}$ ,  $c(A_{k-1}, \psi)$  — опорная функция множества  $A_{k-1}$  [24],  $k = 1, \dots, n$ . Множество  $\text{lex max}_{e_1, \dots, e_n} A$  состоит из одной точки,

принадлежащей множеству крайних точек выпуклой оболочки множества  $A$ .

При этом если выбрать многозначное отображение  $U(\tau, v)$  и ортогональный базис, такой что  $e_1 = \psi$ ,  $\psi \in R^m$ ,  $\psi \neq 0$ , то выполняется равенство  $(\text{lex max}_{e_1, \dots, e_m} U(\tau, v), \psi) = c(U(\tau, v), \psi)$  [26]. Поэтому в силу теоремы об опорной

функции [27] многозначное отображение  $U(\tau, v)$  содержит  $L \otimes B$ -измеримый селектор  $u(\tau, v) = \text{lex max}_{e_1, \dots, e_m} U(\tau, v)$ , который является суперпозиционно измеримой

функцией [6] и  $\|u(\tau, v)\| = (\|D(T-\tau)v\|^p + \alpha(T, \tau, v, z_0)\hat{\gamma})^{\frac{1}{p}}$ ,  $\tau \in [0, T]$ ,  $v \in R^k$ . Положим управление первого игрока  $u(\tau) = u(\tau, v(\tau))$ ,  $\tau \in [0, T]$ .

Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях имеем

$$\pi z(T) = \xi(T, z_0, \gamma(\cdot)) + \int_0^T \pi e^{(T-\tau)A} [B[u(\tau) - \gamma(\tau)] - Cv(\tau)] d\tau.$$

Тогда с учетом соотношения (9) получим

$$\begin{aligned} \pi z(T) &\in \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, v(\tau), z_0)[M - \xi(T)] d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0)[M - \xi(T)] d\tau = \\ &= \xi(T) \left[ 1 - \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau - \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau \right] + \\ &\quad + \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, v(\tau), z_0) M d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0) M d\tau = \\ &= \left[ \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau \right] M = M. \end{aligned}$$

Таким образом,  $z(T) \in M^*$  и осталось показать допустимость управления  $u(\tau) = u(\tau, v(\tau))$ ,  $\tau \in [0, T]$ . По построению справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u(\tau)\|^p d\tau &= \int_0^T \|D(T-\tau)v(\tau)\|^p d\tau + \hat{\gamma} \left[ \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau \right] \leq v^p X^p + \hat{\gamma} = \mu^p. \end{aligned}$$

Для случая  $\xi(T, z_0, \gamma(\cdot)) \in M$  управление первого игрока на всем промежутке  $[0, T]$  выберем в виде измеримой функции  $u(\tau) = u_*(\tau, v(\tau))$ ,  $\tau \in [0, T]$ , где  $u_*(\tau, v) = \text{lex max}_{e_1, \dots, e_m} U(\tau, v)$  является  $L \otimes B$ -измеримым селектором отображения

$U(\tau, v)$  соотношения (9) с разрешающей функцией  $\alpha(T, \tau, v, z_0) = \alpha_*(T, \tau, v, z_0)$  на всем промежутке  $[0, T]$ . Тогда с учетом аппарата опорных функций [24] соотношения (9) дают

$$\pi z(T) \in \xi(T) + \int_0^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0)[M - \xi(T)] d\tau \subset M,$$

поскольку по предположению  $c(M - \xi(T)) \geq 0$ , а

$$\int_0^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau \leq \sup_{\int_0^T \|v(\tau)\|^p d\tau \leq \nu^p} \int_0^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau < 1.$$

Поэтому  $\pi z(T) \in M$  и, следовательно,  $z(T) \in M^*$ .

Покажем допустимость соответствующего управления преследователя. Принимая во внимание соотношения (8) и (9), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u(\tau)\|^p d\tau &= \int_0^T \|D(T-\tau)v(\tau)\|^p d\tau + \hat{\gamma} \int_0^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau \leq \\ &\leq \nu^p X^p + \hat{\gamma} \sup_{\int_0^T \|v(\tau)\|^p d\tau \leq \nu^p} \int_0^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau < \nu^p X^p + \hat{\gamma} = \mu^p. \end{aligned}$$

Теорема полностью доказана.

#### СХЕМА МЕТОДА ДЛЯ КЛАССА СТРОБОСКОПИЧЕСКИХ СТРАТЕГИЙ

Из доказательства теоремы 1 видно, что преследователь в момент  $t$  использует информацию о  $v_t(\cdot)$ , причем она необходима лишь для определения момента переключения  $t_*$ , который разделяет активный и пассивный интервалы. На самих интервалах преследователь применяет контруправление, которое определяется стробоскопической стратегией. В приведенной далее теореме 2 показано, что для реализации гарантированного времени теоремы 1 можно ограничиться контруправлением.

Положим  $\alpha^*(t, \tau, z_0) = \inf_{v \in R^k} \alpha^*(t, \tau, v, z_0)$ ,  $\alpha_*(t, \tau, z_0) = \sup_{v \in R^k} \alpha_*(t, \tau, v, z_0)$ ,

$\tau \in [0, t]$ ,  $z_0 \in R^n$ .

**Лемма 1.** Функции  $\alpha^*(t, \tau, z_0)$  и  $\alpha_*(t, \tau, z_0)$  являются измеримыми по  $\tau$ ,  $\tau \in [0, t]$ .

**Доказательство.** Рассмотрим для каждого  $\varepsilon \in R^1$  и  $\tau \in [0, t]$  многозначное отображение  $G_\varepsilon^*(\tau) = \{v \in R^k : \alpha^*(t, \tau, v, z_0) < \varepsilon\}$ , которое имеет открытые значения в силу полунепрерывности сверху по  $v \in R^k$  функции  $\alpha^*(t, \tau, v, z_0)$  при любом  $\tau \in [0, t]$ . График этого отображения  $\text{gr } G_\varepsilon^*(\tau) = \{(\tau, v) : v \in G_\varepsilon^*(\tau), \tau \in [0, t]\}$  будет  $L \otimes B$ -измеримым по совокупности  $(\tau, v)$ ,  $v \in R^k$ ,  $\tau \in [0, t]$ , для любого  $t$ , поскольку функция  $\alpha^*(t, \tau, v, z_0)$   $L \otimes B$ -измерима по совокупности  $(\tau, v)$  [6]. Тогда по теореме об измеримости проекции [27] множество  $\{\tau \in [0, t] : (\tau, v) \in \text{gr } G_\varepsilon^*(\tau) \text{ для некоторого } v \in G_\varepsilon^*(\tau)\}$  будет  $L$ -измеримо.

Пусть  $\mathcal{Q}$  — счетное плотное множество в  $R^k$  [28]. Для любого  $\varepsilon \in R^1$  имеем

$$\begin{aligned} \{\tau \in [0, t] : \alpha^*(t, \tau, z_0) < \varepsilon\} &= \{\tau \in [0, t] : G_\varepsilon^*(\tau) \neq \emptyset\} = \\ &= \{\tau \in [0, t] : (\tau, v) \in \text{gr } G_\varepsilon^*(\tau) \text{ для некоторого } v \in G_\varepsilon^*(\tau)\} = \\ &= \{\tau \in [0, t] : (\tau, q) \in \text{gr } G_\varepsilon^*(\tau) \text{ для некоторого } q \in G_\varepsilon^*(\tau) \cap \mathcal{Q}\} = \\ &= \bigcup_{q \in G_\varepsilon^*(\tau) \cap \mathcal{Q}} \{\tau \in [0, t] : (\tau, q) \in \text{gr } G_\varepsilon^*(\tau)\}. \end{aligned}$$

Однако, как отмечалось ранее, множество  $\{\tau \in [0, t]: (\tau, q) \in \text{gr } G_\varepsilon^*(\tau) \text{ для некоторого } q \in G_\varepsilon^*(\tau) \cap Q\}$  измеримо и поэтому функция  $\alpha^*(t, \tau, z_0) = \inf_{v \in R^k} \alpha^*(t, \tau, v, z_0)$  является измеримой по  $\tau$  функцией. Аналогично можно доказать измеримость функции  $\alpha_*(t, \tau, z_0) = \sup_{v \in R^k} \alpha_*(t, \tau, v, z_0)$ .

Рассмотрим множество

$$\widehat{T}(z_0, \gamma(\cdot)) = \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \alpha^*(t, \tau, z_0) d\tau \geq 1, \int_0^t \alpha_*(t, \tau, z_0) d\tau < 1 \right\}. \quad (10)$$

В силу леммы 1 функции  $\alpha^*(t, \tau, z_0)$  и  $\alpha_*(t, \tau, z_0)$  являются измеримыми по  $\tau$ ,  $\tau \in [0, t]$ . Если при некотором  $t > 0$  функция  $\alpha^*(t, \tau, z_0) \equiv +\infty$  для  $\tau \in [0, t]$ , то значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (10) естественно положить равным  $+\infty$  и  $t \in \widehat{T}(z_0, \gamma(\cdot))$ , если для этого  $t$  справедливо другое неравенство в фигурных скобках соотношения (10). В случае, когда неравенства в соотношении (10) не выполняются при всех  $t > 0$ , положим  $\widehat{T}(z_0, \gamma(\cdot)) = \emptyset$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия 1–3 и для соответствующей функции сдвига  $\gamma(\cdot)$  множество  $\widehat{T}(z_0, \gamma(\cdot))$  не пусто, а  $\widehat{T} \in \widehat{T}(z_0, \gamma(\cdot))$ . Тогда траекторию процесса (1)–(3) из начального положения  $z_0 \in R^n$  можно привести на терминальное множество (4) в момент  $\widehat{T}$  с использованием допустимого управления вида (6).

**Доказательство.** Пусть  $v(\cdot)$  — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3).

Положим  $\alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0) = \inf_{v \in R^k} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, v, z_0)$ ,  $\alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) = \sup_{v \in R^k} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, v, z_0)$ ,

$\tau \in [0, \widehat{T}]$ ,  $z_0 \in R^n$ , и рассмотрим вначале случай  $\xi(\widehat{T}, z_0, \gamma(\cdot)) \notin M$ .

Введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau - \int_t^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau, \quad t \in [0, \widehat{T}].$$

По определению  $\widehat{T}$  имеем

$$h(0) = 1 - \int_0^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau > 0, \quad h(\widehat{T}) = 1 - \int_0^{\widehat{T}} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau \leq 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции  $h(t)$  существует такой момент времени  $t_*$ ,  $t_* \in (0, \widehat{T}]$ , что  $h(t_*) = 0$ . Отметим, что момент переключения  $t_*$  не зависит от предыстории управления второго игрока  $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s): s \in [0, t_*]\}$ .

Рассмотрим многозначное отображение при  $v \in R^k$ ,  $\tau \in [0, \widehat{T}]$

$$\begin{aligned} \widehat{U}(\tau, v) &= \{u \in U(\widehat{T}, \tau, v, \alpha(\widehat{T}, \tau, z_0))\}: \\ \pi e^{(\widehat{T}-\tau)A} B[u - \gamma(\tau)] - \pi e^{(\widehat{T}-\tau)A} C v &\in \alpha(\widehat{T}, \tau, z_0) [M - \xi(\widehat{T})], \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\alpha(\widehat{T}, \tau, z_0) = \begin{cases} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0), & 0 \leq \tau \leq t_*, \\ \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0), & t_* < \tau \leq \widehat{T}. \end{cases}$$

В силу свойств параметров процесса (1), верхней  $\alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0)$  и нижней  $\alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0)$  разрешающих функций отображение  $\widehat{U}(\tau, v) : L \otimes B$ -измеримо [6] при  $v \in R^k, \tau \in [0, \widehat{T}]$ . В силу теоремы об опорной функции [27] многозначное отображение  $\widehat{U}(\tau, v)$  содержит  $L \otimes B$ -измеримый селектор  $\widehat{u}(\tau, v) = \text{lex max}_{e_1, \dots, e_m} \widehat{U}(\tau, v)$ , который является суперпозиционно измеримой функцией [6] и  $\|\widehat{u}(\tau, v)\| = \left( \|D(\widehat{T} - \tau)v\|^p + \alpha(\widehat{T}, \tau, v, z_0)\widehat{\gamma} \right)^{\frac{1}{p}}, \tau \in [0, \widehat{T}], v \in R^k$ . Положим управление первого игрока  $\widehat{u}(\tau) = \widehat{u}(\tau, v(\tau)), \tau \in [0, \widehat{T}]$ .

Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях имеем

$$\pi z(\widehat{T}) = \xi(\widehat{T}, z_0, \gamma(\cdot)) + \int_0^{\widehat{T}} \pi e^{(\widehat{T}-\tau)A} [B[\widehat{u}(\tau) - \gamma(\tau)] - Cv(\tau)] d\tau.$$

Тогда с учетом соотношения (11) получим

$$\begin{aligned} \pi z(\widehat{T}) &\in \xi(\widehat{T}) + \int_0^{t_*} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0)[M - \xi(\widehat{T})] d\tau + \int_{t_*}^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0)[M - \xi(\widehat{T})] d\tau = \\ &= \xi(\widehat{T}) \left[ 1 - \int_0^{t_*} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau - \int_{t_*}^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau \right] + \int_0^{t_*} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0) M d\tau + \\ &+ \int_{t_*}^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) M d\tau = \left[ \int_0^{t_*} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau + \int_{t_*}^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau \right] M = M. \end{aligned}$$

Таким образом,  $z(\widehat{T}) \in M^*$  и осталось показать допустимость управления  $\widehat{u}(\tau) = \widehat{u}(\tau, v(\tau)), \tau \in [0, \widehat{T}]$ . По построению справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^{\widehat{T}} \|\widehat{u}(\tau)\|^p d\tau &= \int_0^{\widehat{T}} \|D(\widehat{T} - \tau)v(\tau)\|^p d\tau + \\ &+ \widehat{\gamma} \left[ \int_0^{t_*} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau + \int_{t_*}^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau \right] \leq \nu^p X^p + \widehat{\gamma} = \mu^p. \end{aligned}$$

Для случая  $\xi(\widehat{T}, z_0, \gamma(\cdot)) \in M$  управление первого игрока на всем промежутке  $[0, \widehat{T}]$  выберем в виде измеримой функции  $\widehat{u}(\tau) = \widehat{u}_*(\tau, v(\tau)), \tau \in [0, \widehat{T}]$ , где  $\widehat{u}_*(\tau, v) = \text{lex max}_{e_1, \dots, e_n} \widehat{U}(\tau, v)$  является  $L \otimes B$ -измеримым селектором отображения  $\widehat{U}(\tau, v)$  соотношения (11) с разрешающей функцией  $\alpha(\widehat{T}, \tau, z_0) = \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0)$  на всем промежутке  $[0, \widehat{T}]$ . Тогда соотношения (11) дают

$$\pi z(\widehat{T}) \in \xi(\widehat{T}) + \int_0^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0)[M - \xi(\widehat{T})] d\tau.$$



Поскольку по предположению  $c(M - \xi(\widehat{T}), \psi) \geq 0$ , а по определению момента  $\widehat{T} \int_0^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau < 1$ , применив аппарат опорных функций, получим  $\xi(\widehat{T}) + \int_0^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) [M - \xi(\widehat{T})] d\tau \subset M$ . Поэтому  $\pi z(\widehat{T}) \in M$  и, следовательно,  $z(\widehat{T}) \in M^*$ .

Покажем допустимость соответствующего управления преследователя. Принимая во внимание соотношения (10) и (11), имеем

$$\int_0^{\widehat{T}} \|u(\tau)\|^p d\tau = \int_0^{\widehat{T}} \|D(\widehat{T} - \tau)v(\tau)\|^p d\tau + \widehat{\gamma} \int_0^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau < \nu^p X^p + \widehat{\gamma} = \mu^p,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{X}(t, \tau, z_0) = \bigcap_{v \in R^k} \mathfrak{X}(t, \tau, v, z_0), \quad (t, \tau) \in \Delta, \quad z_0 \in R^n.$$

**Условие 4.** Для некоторого начального положения  $z_0 \in R^n$  и функции сдвига  $\gamma(\cdot)$  многозначное отображение  $\mathfrak{X}(t, \tau, z_0)$  принимает непустые значения на множестве  $\Delta$ .

Если это условие выполнено, то, следуя [7, 8], введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции второго типа

$$\beta^*(t, \tau, z_0) = \sup\{\beta : \beta \in \mathfrak{X}(t, \tau, z_0)\},$$

$$\beta_*(t, \tau, z_0) = \inf\{\beta : \beta \in \mathfrak{X}(t, \tau, z_0)\}, \quad (t, \tau) \in \Delta, \quad z_0 \in R^n.$$

Можно показать [6], что многозначное отображение  $\mathfrak{X}(t, \tau, z_0)$  является замкнутозначным, измеримым по  $\tau$ , а верхняя и нижняя разрешающие функции измеримы по переменной  $\tau$  при фиксированном  $t$ .

Рассмотрим множество

$$\Theta(z_0, \gamma(\cdot)) = \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \beta^*(t, \tau, z_0) d\tau \geq 1, \int_0^t \beta_*(t, \tau, z_0) d\tau < 1 \right\}.$$

Если при некотором  $t > 0$  верхняя разрешающая функция  $\beta^*(t, \tau, z_0) \equiv +\infty$  для  $\tau \in [0, t]$ , то значение соответствующего интеграла в фигурных скобках естественно положить равным  $+\infty$  и  $t \in \Theta(z_0, \gamma(\cdot))$ , если для этого  $t$  справедливо другое неравенство в фигурных скобках. В случае, когда неравенства в фигурных скобках не выполняются при всех  $t > 0$ , положим  $\Theta(z_0, \gamma(\cdot)) = \emptyset$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия 1, 2, 4 и для соответствующей функции сдвига  $\gamma(\cdot)$  множество  $\Theta(z_0, \gamma(\cdot))$  не пусто, а  $\Theta \in \Theta(z_0, \gamma(\cdot))$ . Тогда траекторию процесса (1)–(3) из начального положения  $z_0 \in R^n$  можно привести на терминальное множество (4) в момент  $\Theta$  с использованием допустимого управления вида (6).

**Доказательство.** Пусть  $v(\cdot)$  — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3).

Положим  $\beta(\Theta, \tau, z_0) = \frac{1}{\int_0^\Theta \beta^*(\Theta, \tau, z_0) d\tau} \beta^*(\Theta, \tau, z_0)$ ,  $\tau \in [0, \Theta]$ ,  $z_0 \in R^n$ , и рас-

смотрим вначале случай  $\xi(\Theta, z_0, \gamma(\cdot)) \notin M$ .

Поскольку  $\int_0^\Theta \beta^*(\Theta, \tau, z_0) d\tau \geq 1$ , то  $\beta(\Theta, \tau, z_0) \leq \beta^*(\Theta, \tau, z_0)$ ,  $\tau \in [0, \Theta]$ ,  $z_0 \in R^n$ .

В силу условия  $\int_0^\Theta \beta_*(\Theta, \tau, z_0) d\tau < 1$  получим  $\beta(\Theta, \tau, z_0) > \beta_*(\Theta, \tau, z_0)$ ,

$\tau \in [0, \Theta]$ ,  $z_0 \in R^n$ . Действительно, предположим, что  $\beta(\Theta, \tau, z_0) \leq \beta_*(\Theta, \tau, z_0)$ .

Тогда имеем  $1 = \int_0^\Theta \beta(\Theta, \tau, z_0) d\tau \leq \int_0^\Theta \beta_*(\Theta, \tau, z_0) d\tau$ , что противоречит определению момента времени  $\Theta$ .

Таким образом,  $\beta(\Theta, \tau, z_0) \in \mathfrak{X}(\Theta, \tau, z_0)$ ,  $\tau \in [0, \Theta]$ ,  $z_0 \in R^n$ .

Рассмотрим многозначное отображение  $v \in R^k$ ,  $\tau \in [0, \Theta]$

$$\underline{U}(\tau, v) = \{u \in U(\Theta, \tau, v, \beta(\Theta, \tau, z_0))\}:$$

$$\pi e^{(\Theta-\tau)A} B[u - \gamma(\tau)] - \pi e^{(\Theta-\tau)A} C v \in \beta(\Theta, \tau, z_0) [M - \xi(\hat{T})]. \quad (12)$$

Как и ранее, отображение  $\underline{U}(\tau, v)$  компактнозначно и  $L \otimes B$ -измеримо [6] при  $v \in R^k$ ,  $\tau \in [0, \Theta]$ . В силу теоремы об опорной функции [27] многозначное отображение  $\underline{U}(\tau, v)$  содержит  $L \otimes B$ -измеримый селектор  $\underline{u}(\tau, v) = \text{lex max}_{e_1, \dots, e_m} \underline{U}(\tau, v)$ , который является суперпозиционно измеримой функцией [6] и

$$\|\underline{u}(\tau, v)\| = \left( \|D(\Theta - \tau)v\|^p + \beta(\Theta, \tau, v, z_0) \hat{\gamma} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \tau \in [0, \Theta], \quad v \in R^k.$$

Положим управление первого игрока равным  $\underline{u}(\tau) = \underline{u}(\tau, v(\tau))$ ,  $\tau \in [0, \Theta]$ . Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях имеем

$$\pi z(\Theta) = \xi(\Theta, z_0, \gamma(\cdot)) + \int_0^\Theta \pi e^{(\Theta-\tau)A} [B[\underline{u}(\tau) - \gamma(\tau)] - C v(\tau)] d\tau.$$

Тогда с учетом соотношения (12) получим

$$\pi z(\Theta) \in \xi(\Theta, z_0, \gamma(\cdot)) \left[ 1 - \int_0^\Theta \beta(\Theta, \tau, z_0) d\tau \right] + \int_0^\Theta \beta(\Theta, \tau, z_0) M d\tau.$$

Так как  $M$  — выпуклый компакт, а  $\beta(\Theta, \tau, z_0) \geq 0$ ,  $\tau \in [0, \Theta]$ , и  $\int_0^\Theta \beta(\Theta, \tau, z_0) d\tau = 1$ , то  $\int_0^\Theta \beta(\Theta, \tau, z_0) M d\tau = M$ . Поэтому  $\pi z(\Theta) \in M$ ,  $z(\Theta) \in M^*$  и осталось показать допустимость управления  $\underline{u}(\tau) = \underline{u}(\tau, v(\tau))$ ,  $\tau \in [0, \Theta]$ .

По построению справедливы соотношения

$$\int_0^{\Theta} \|\underline{u}(\tau)\|^p d\tau = \int_0^{\Theta} \|D(\Theta-\tau)v(\tau)\|^p d\tau + \hat{\gamma} \int_0^{\Theta} \beta(\Theta, \tau, z_0) d\tau \leq \nu^p X^p + \hat{\gamma} = \mu^p.$$

Для случая  $\xi(\Theta, z_0, \gamma(\cdot)) \in M$  управление первого игрока на всем промежутке  $[0, \Theta]$  выберем в виде измеримой функции  $\underline{u}(\tau) = \underline{u}_*(\tau, v(\tau))$ ,  $\tau \in [0, \Theta]$ , где  $\underline{u}_*(\tau, v) = \text{lex max}_{e_1, \dots, e_m} \underline{U}(\tau, v)$  является  $L \otimes B$ -измеримым селектором отображения

$\underline{U}(\tau, v)$  соотношения (12) с разрешающей функцией  $\beta(\Theta, \tau, z_0) = \beta_*(\Theta, \tau, z_0)$  на всем промежутке  $[0, \Theta]$ . Тогда соотношения (12) дают

$$\pi z(\Theta) \in \xi(\Theta, z_0, \gamma(\cdot)) + \int_0^{\Theta} \beta_*(\Theta, \tau, z_0) [M - \xi(\Theta, z_0, \gamma(\cdot))] d\tau.$$

Поскольку по предположению  $c(M - \xi(\Theta), \psi) \geq 0$ , а по определению момента  $\Theta \int_0^{\Theta} \beta_*(\Theta, \tau, z_0) d\tau < 1$ , применив аппарат опорных функций, получим  $\xi(\Theta) + \int_0^{\Theta} \beta_*(\Theta, \tau, z_0) [M - \xi(\Theta)] d\tau \subset M$ . Поэтому  $\pi z(\Theta) \in M$  и, следовательно,  $z(\Theta) \in M^*$ .

Покажем допустимость соответствующего управления преследователя. Имеем

$$\int_0^{\Theta} \|u(\tau)\|^p d\tau = \int_0^{\Theta} \|D(\Theta-\tau)v(\tau)\|^p d\tau + \hat{\gamma} \int_0^{\Theta} \beta_*(\Theta, \tau, z_0) d\tau < \nu^p X^p + \hat{\gamma} = \mu^p,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Заметим, что если выполнены условия 1, 2, 4, то для некоторого начального положения  $z_0 \in R^n$  многозначное отображение  $\mathfrak{A}(t, \tau, z_0)$  принимает непустые выпуклые значения на множестве  $\Delta$  и  $\alpha_*(t, \tau, z_0) = \beta_*(t, \tau, z_0)$ . Если к тому же при некотором  $t > 0$   $\xi(\Theta, z_0, \gamma(\cdot)) \notin M$ , то  $\alpha^*(t, \tau, z_0) = \beta^*(t, \tau, z_0)$ . Поэтому, если множество  $\widehat{T}(z_0, \gamma(\cdot))$  не пусто, множество  $\Theta(z_0, \gamma(\cdot))$  не пусто и они совпадают.

#### РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Обозначим  $\text{epi } \alpha^*(t, \tau, v, z_0) = \{(\tau, \mu) \in [0, t] \times R^1 : \alpha^*(t, \tau, v, z_0) \leq \mu\}$  надграфик функции  $\alpha^*(t, \tau, v, z_0)$  [28]. Функция  $\overline{\text{co}} \alpha^*(t, \tau, v, z_0)$  называется замыканием овыпукления функции  $\alpha^*(t, \tau, v, z_0)$ , если  $\text{epi } \overline{\text{co}} \alpha^*(t, \tau, v, z_0) = \overline{\text{co}} \text{epi } \alpha^*(t, \tau, v, z_0)$  [24, 27, 28]. При этом справедливо неравенство  $\alpha^*(t, \tau, v, z_0) \geq \overline{\text{co}} \alpha^*(t, \tau, v, z_0)$  при всех  $t \geq \tau \geq 0$ ,  $v \in V$ . Заметим, что поскольку функция  $\alpha^*(t, \tau, v, z_0)$  является при каждом  $\tau \in [0, t]$  по  $v \in R^k$  полунепрерывной сверху [5], такой же будет и функция  $\overline{\text{co}} \alpha^*(t, \tau, v, z_0)$ . По определению функция  $\overline{\text{co}} \alpha^*(t, \tau, v, z_0)$  при каждом  $\tau \in [0, t]$  по  $v \in R^k$  является полунепрерывной снизу [28] и поэтому функция  $\overline{\text{co}} \alpha^*(t, \tau, v, z_0)$  по  $v \in R^k$  будет непрерывной. Такие функции называют функциями Каратеодори [27] и они

имеют ряд полезных свойств. Таким образом, с каждой разрешающей функцией можно связать некоторую функцию Каратеодори и провести с ней соответствующие выкладки метода разрешающих функций. При этом, как показывает следующая лемма, гарантированное время окончания игры не изменится.

Банахово пространство измеримых по Лебегу отображений  $v(\cdot)$  отрезка  $[0, t]$  в  $R^k$ , для которых интеграл  $\int_0^t \|v(\tau)\|^p dt$  конечен, при  $1 \leq p < \infty$  обозначается  $L_p^k[0, t]$ . Положим  $\delta = \inf_{v(\cdot) \in L_p^k[0, t]} \int_0^t \alpha^*(t, \tau, v(\tau), z_0) dt$ .

**Лемма 2.** Если  $\int_0^t \alpha^*(t, \tau, v_1(\tau), z_0) dt < +\infty$  по крайней мере для одной функции  $v_1(\cdot) \in L_p^k[0, t]$ , то справедливо равенство

$$\delta = \inf_{v(\cdot) \in L_p^k[0, t]} \int_0^t \overline{\text{co}} \alpha^*(t, \tau, v(\tau), z_0) dt. \quad (13)$$

**Доказательство.** Ясно, что имеет место неравенство

$$\delta \geq \inf_{v(\cdot) \in L_p^k[0, t]} \int_0^t \overline{\text{co}} \alpha^*(t, \tau, v(\tau), z_0) dt. \quad (14)$$

Пусть в соотношении (14) имеет место строгое неравенство. Тогда существует суммируемая функция  $\delta_0(\tau)$  такая, что

$$\delta > \int_0^t \delta_0(\tau) dt, \quad (15)$$

и для некоторой функции  $v_0(\cdot)$ ,  $v_0(\cdot) \in L_p^k[0, t]$ , при почти всех  $\tau \in [0, t]$  имеем

$$\delta_0(\tau) > \overline{\text{co}} \alpha^*(t, \tau, v_0(\tau), z_0). \quad (16)$$

Заметим, что

$$\overline{\text{co}} \alpha^*(t, \tau, v_0(\tau), z_0) \geq \inf_{v \in R^k} \overline{\text{co}} \alpha^*(t, \tau, v, z_0) = \inf_{v \in R^k} \alpha^*(t, \tau, v, z_0). \quad (17)$$

Поэтому соотношения (16), (17) при почти всех  $\tau \in [0, t]$  дают

$$\delta_0(\tau) > \inf_{v \in R^k} \alpha^*(t, \tau, v, z_0). \quad (18)$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$G_{\delta_0(\tau)}^*(t, \tau) = \{v \in R^k : \alpha^*(t, \tau, v, z_0) < \delta_0(\tau)\}.$$

Соотношение (18) гарантирует, что  $G_{\delta_0(\tau)}^*(t, \tau) \neq \emptyset$ . Многозначное отображение  $G_{\delta_0(\tau)}^*(t, \tau) = \{v \in R^k : \alpha^*(t, \tau, v, z_0) < \varepsilon\}$ ,  $\tau \in [0, t]$ , имеет открытые значения в силу полунепрерывности сверху по  $v \in R^k$  функции  $\alpha^*(t, \tau, v, z_0)$  при

любом  $\tau \in [0, t]$ . График этого отображения  $\text{gr } G_{\delta_0(\tau)}^*(t, \tau)$  будет  $L \otimes B$ -измеримым по совокупности  $(\tau, v)$ ,  $v \in R^k$ ,  $\tau \in [0, t]$ , для любого  $t$ , поскольку функция  $\alpha^*(t, \tau, v, z_0)$   $L \otimes B$ -измерима по совокупности  $(\tau, v)$  [6]. Тогда по теореме об измеримости проекции [27] для каждого  $v \in R^k$  множество  $\{\tau \in [0, t]: (\tau, v) \in \text{gr } G_{\delta_0(\tau)}^*(t, \tau)\}$  будет  $L$ -измеримо. В силу предложения 4 [28, § 8.1] многозначное отображение  $G_{\delta_0(\tau)}^*(t, \tau)$  измеримо и по теореме измеримого выбора [28, § 8.1] имеет измеримый селектор. Пусть  $v_2(\tau)$  — произвольный измеримый селектор многозначного отображения  $G_{\delta_0(\tau)}^*(t, \tau)$ . Тогда получим

$$\alpha^*(t, \tau, v_2(\tau), z_0) < \delta_0(\tau), \quad \tau \in [0, t]. \quad (19)$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  можно выбрать число  $N > 0$  столь большим, что мера множества  $T_N = \{\tau \in [0, t]: |v_2(\tau)| > N\}$  меньше  $\varepsilon$ . Положим

$$\rho(\tau) = \begin{cases} \delta_0(\tau), & \text{если } \tau \in [0, t], \tau \notin T_N, \\ \max\{\delta_0(\tau), \alpha^*(t, \tau, v_1(\tau), z_0)\}, & \text{если } \tau \in T_N. \end{cases}$$

Суммируемая функция  $\rho(\tau)$  в силу (15) удовлетворяет неравенству

$$\delta > \int_0^t \rho(\tau) d\tau. \quad (20)$$

Полагая

$$v(\tau) = \begin{cases} v_2(\tau), & \text{если } \tau \in [0, t], \tau \notin T_N, \\ v_1(\tau), & \text{если } \tau \in T_N, \end{cases}$$

имеем  $v(\cdot) \in L_p^k[0, t]$ , и согласно (19)

$$\int_0^t \alpha^*(t, \tau, v(\tau), z_0) d\tau < \int_0^t \rho(\tau) d\tau. \quad (21)$$

Неравенства (20) и (21) дают

$$\delta > \int_0^t \rho(\tau) d\tau > \int_0^t \alpha^*(t, \tau, v(\tau), z_0) d\tau \geq \delta.$$

Полученное противоречие показывает, что в соотношении (14) имеет место равенство.

**Следствие 1.** Если  $\int_0^t \alpha^*(t, \tau, v_1(\tau), z_0) d\tau < +\infty$  по крайней мере для одной функции  $v_1(\cdot) \in L_p^k[0, t]$ , то имеет место равенство

$$\delta = \int_0^t \inf_{v \in R^k} \alpha^*(t, \tau, v, z_0) d\tau.$$

**Доказательство.** Поскольку  $\overline{\alpha^*(t, \tau, v, z_0)}$  является функцией Каратеодори, ее надграфик  $\overline{\alpha^*(t, \tau, v, z_0)}$  является измеримым замкнутозначным многозначным отображением и поэтому в силу предложения 2 [28, § 8.3] справедли-

во равенство

$$\int_0^t \inf_{v \in R^k} \overline{\text{co}} \alpha^*(t, \tau, v, z_0) d\tau = \inf_{v(\cdot) \in L_p^k[0, t]} \int_0^t \overline{\text{co}} \alpha^*(t, \tau, v(\tau), z_0) d\tau.$$

Теперь с учетом соотношения  $\inf_{v \in R^k} \overline{\text{co}} \alpha^*(t, \tau, v, z_0) = \inf_{v \in R^k} \alpha^*(t, \tau, v, z_0)$  равенство (13) дает требуемый результат.

Следствие 1 леммы 2 показывает, что множества  $T(z_0, \gamma(\cdot))$  и  $\widehat{T}(z_0, \gamma(\cdot))$  совпадают. Поэтому в силу теоремы 2 можно усилить теорему 1 и вместо квази-стратегии (5) применить стробоскопическую стратегию (6).

#### СРАВНЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННЫХ ВРЕМЕН

Рассмотрим линейные отображения  $\pi e^{tA} B R^m \rightarrow L$ ,  $\pi e^{tA} C R^k \rightarrow L$ ,  $t \geq 0$ .

**Условие 5.** Пусть существует непрерывная неособая матрица  $\Phi(\cdot): R^k \rightarrow R^m$ , являющаяся решением матричного уравнения  $\pi e^{tA} B X = \pi e^{tA} C$ , где  $X$  — искомая матрица.

Как и ранее, рассмотрим функцию [1]

$$\chi^p(t) = \sup_{\int_0^t \|\omega(\tau)\|^p d\tau \leq 1} \int_0^t \|\Phi(t-\tau)\omega(\tau)\|^p d\tau,$$

где  $\omega(\cdot)$  — произвольная функция из пространства  $L_p^k[0, t]$  с указанным ограничением, и определим величину  $X^p = \sup_{0 \leq t < \infty} \chi^p(t)$ .

**Условие 6.** Справедливо неравенство  $\hat{\gamma} = \mu^p - \nu^p X^p \geq 0$ .

Пусть справедливы условия 5, 6. Рассмотрим многозначное отображение  $W(t) = \left\{ u \in R^m : \|u\| \leq \left( \frac{1}{t} \hat{\gamma} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$ ,  $t > 0$ . Обозначим  $\Gamma_t = \{\gamma(\cdot) : \gamma(t) \in W(t)\}$  совокуп-

ность измеримых селекторов отображения  $W(t)$ . Если  $\gamma(\cdot) \in \Gamma_t$ , то  $\gamma(\cdot)$  — измеримая функция из класса  $L_p^m[0, t]$ ,  $p > 1$ , которая удовлетворяет ограничению

$$\int_0^t \|\gamma(\tau)\|^p d\tau \leq \hat{\gamma}, \quad t > 0.$$

Легко проверить, что для  $\gamma(\cdot) \in \Gamma_t$  справедливо включение

$$0 \in \pi e^{(t-\tau)A} B U\left(t, \tau, v, \frac{1}{t}\right) - \pi e^{(t-\tau)A} C v - \pi e^{(t-\tau)A} B \gamma(\tau), \quad (22)$$

где  $U\left(t, \tau, v, \frac{1}{t}\right) = \left\{ u \in R^m : \|u\| \leq \left( \|\Phi(t-\tau)v\|^p + \frac{1}{t} \hat{\gamma} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$ ,  $(t, \tau) \in \Delta = \{(t, \tau) : 0 \leq$

$\tau \leq t < \infty\}$ ,  $v \in R^k$ .

Рассмотрим множество

$$P(z_0) = \left\{ t \geq 0 : e^{tA} z_0 \in M - \int_0^t \pi e^{(t-\tau)A} B W(\tau) d\tau \right\}. \quad (23)$$

Если включение в фигурных скобках не выполняется ни для каких  $t \geq 0$ , то положим  $P(z_0) = \emptyset$ .

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия 5, 6, множество  $P(z_0)$  не пусто и  $P \in P(z_0)$ . Тогда траекторию процесса (1)–(3) из начального положения  $z_0 \in R^n$  можно привести на терминальное множество (4) в момент  $P$  с использованием допустимого управления вида (6).

**Доказательство.** Пусть  $v(\cdot)$  — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3). Из условия теоремы и соотношения (23) следует, что  $e^{PA} z_0 \in M - \int_0^P \pi e^{(P-\tau)A} B W(\tau) d\tau$ . Тогда существует такая точка  $m \in M$  и измеримый селектор  $\gamma(\cdot) \in \Gamma_P$ , что

$$e^{PA} z_0 = m - \int_0^P \pi e^{(P-\tau)A} B \gamma(\tau) d\tau. \quad (24)$$

С учетом включения (22) рассмотрим многозначное отображение

$$U_0(\tau, v) = \left\{ u \in U \left( P, \tau, v, \frac{1}{P} \right) : \pi e^{(P-\tau)A} B u - \pi e^{(P-\tau)A} C v - \right. \\ \left. - \pi e^{(P-\tau)A} B \gamma(\tau) = 0 \right\}, \quad \tau \in [0, P], \quad v \in R^k.$$

В силу теоремы об опорной функции [27] многозначное отображение  $U_0(\tau, v)$  содержит  $L \otimes B$ -измеримый селектор  $u_0(\tau, v) = \text{lex max}_{e_1, \dots, e_m} U_0(\tau, v)$ , который является суперпозиционно измеримой функцией [6] и  $\|u_0(\tau, v)\| = \left( \|\Phi(P-\tau)v\|^P + \frac{1}{P} \hat{\gamma} \right)^{\frac{1}{P}}$ ,  $\tau \in [0, P]$ ,  $v \in R^k$ . Положим управление первого игрока  $u_0(\tau) = u_0(\tau, v(\tau))$ ,  $\tau \in [0, P]$ . Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях с учетом (24) имеем

$$\pi z(P) = e^{PA} z_0 + \int_0^P \pi e^{(P-\tau)A} [B u_0(\tau) - C v(\tau)] d\tau = m \in M$$

и, следовательно,  $z(P) \in M^*$ .

Покажем допустимость соответствующего управления преследователя. Имеем

$$\int_0^P \|u_0(\tau)\|^P d\tau = \int_0^P \|\Phi(P-\tau)v(\tau)\|^P d\tau + \frac{1}{P} \hat{\gamma} \int_0^P d\tau \leq v^P X^P + \hat{\gamma} = \mu^P,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Приведенную схему можно рассматривать как аналог первого прямого метода Л.С. Понтрягина [13, 14] для линейных дифференциальных игр с интегральными ограничениями. Доказательство теоремы 4 использует условия М.С. Никольского [1] и является обобщением его результатов.

Рассмотрим множества

$$P_*(z_0, \gamma(\cdot)) = \left\{ t \geq 0 : \xi(t, z_0, \gamma(\cdot)) \in M, \quad \sup_{\int_0^t \|v(\tau)\|^P d\tau \leq v^P} \int_0^t \alpha_*(t, \tau, v(\tau), z_0) d\tau < 1 \right\}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \widehat{P}_*(z_0, \gamma(\cdot)) &= \left\{ t \geq 0: \xi(t, z_0, \gamma(\cdot)) \in M, \int_0^t \alpha_*(t, \tau, z_0) d\tau < 1 \right\}, \\ \underline{P}_*(z_0, \gamma(\cdot)) &= \left\{ t \geq 0: \xi(t, z_0, \gamma(\cdot)) \in M, \int_0^t \beta_*(t, \tau, z_0) d\tau < 1 \right\}. \end{aligned}$$

Если соотношения в фигурных скобках не выполняются ни для каких  $t \geq 0$ , то положим  $P_*(z_0, \gamma(\cdot)) = \emptyset$ ,  $\widehat{P}_*(z_0, \gamma(\cdot)) = \emptyset$ ,  $\underline{P}_*(z_0, \gamma(\cdot)) = \emptyset$  соответственно.

**Теорема 5.** Пусть выполнены условия 1–3, множество  $P_*(z_0, \gamma(\cdot))$  не пусто и  $P_* \in P_*(z_0, \gamma(\cdot))$ . Тогда  $P_*(z_0, \gamma(\cdot)) = \widehat{P}_*(z_0, \gamma(\cdot)) = \underline{P}_*(z_0, \gamma(\cdot))$  и траекторию процесса (1)–(3) из начального положения  $z_0 \in R^n$  можно привести на терминальное множество (4) в момент  $P_*$  с использованием допустимого управления вида (6).

**Доказательство.** Нетрудно показать, что если выполнены условия 1–3, то справедливо условие 4. При этом имеют место соотношения для  $(t, \tau) \in \Delta$ ,  $z_0 \in R^n$ ,

$$\sup_{\int_0^t \|v(\tau)\|^p d\tau \leq \nu^p} \int_0^t \alpha_*(t, \tau, v(\tau), z_0) d\tau = \int_0^t \alpha_*(t, \tau, z_0) d\tau, \quad \alpha_*(t, \tau, z_0) = \beta_*(t, \tau, z_0).$$

Поэтому справедливы равенства  $P_*(z_0, \gamma(\cdot)) = \widehat{P}_*(z_0, \gamma(\cdot)) = \underline{P}_*(z_0, \gamma(\cdot))$ .

Пусть  $v(\cdot)$  — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3).

Рассмотрим многозначное отображение при  $v \in R^k$ ,  $\tau \in [0, P_*]$

$$\begin{aligned} U_*(\tau, v) &= \{u \in U(P_*, \tau, v, \alpha_*(P_*, \tau, v, z_0))\}: \\ \pi e^{(P_* - \tau)A} B[u - \gamma(\tau)] - \pi e^{(P_* - \tau)A} C v &\in \alpha_*(P_*, \tau, v, z_0) [M - \xi(P_*, z_0, \gamma(\cdot))]. \end{aligned} \quad (26)$$

В силу теоремы об опорной функции [27] многозначное отображение  $U_*(\tau, v)$  содержит  $L \otimes B$ -измеримый селектор  $u_*(\tau, v) = \text{lex max}_{e_1, \dots, e_n} U_*(\tau, v)$ , который является суперпозиционно измеримой функцией [6] и  $\|u_*(\tau, v)\| = \left( \|\Phi(P_* - \tau)v\|^p + \alpha_*(P_*, \tau, v, z_0) \hat{\gamma} \right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $\tau \in [0, P_*]$ ,  $v \in R^k$ . Положим управление первого игрока  $u_*(\tau) = u_*(\tau, v(\tau))$ ,  $\tau \in [0, P_*]$ . Тогда с учетом аппарата опорных функций [24] соотношения (25), (26) дают

$$\pi z(P_*) \in \xi(P_*) + \int_0^{P_*} \alpha_*(P_*, \tau, v(\tau), z_0) [M - \xi(P_*)] d\tau \subset M,$$

поскольку по условию  $c(M - \xi(P_*), \psi) \geq 0$ , а

$$\int_0^{P_*} \alpha_*(P_*, \tau, v(\tau), z_0) d\tau \leq \sup_{\int_0^{P_*} \|v(\tau)\|^p d\tau \leq \nu^p} \int_0^{P_*} \alpha_*(P_*, \tau, v(\tau), z_0) d\tau < 1.$$



Поэтому  $\pi z(P_*) \in M$  и, следовательно,  $z(P_*) \in M^*$ . Покажем допустимость соответствующего управления преследователя. Принимая во внимание соотношения (25) и (26), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{P_*} \|u(\tau)\|^p d\tau &= \int_0^{P_*} \|\Phi(P_* - \tau)v(\tau)\|^p d\tau + \hat{\gamma} \int_0^{P_*} \alpha_*(P_*, \tau, v(\tau), z_0) d\tau \leq \\ &\leq \nu^p X^p + \hat{\gamma} \sup_{\substack{P_* \\ \int_0^{P_*} \|v(\tau)\|^p d\tau \leq \nu^p}} \int_0^{P_*} \alpha_*(P_*, \tau, v(\tau), z_0) d\tau < \nu^p X^p + \hat{\gamma} = \mu^p. \end{aligned}$$

**Следствие 1.** Пусть выполнены условия 5, 6, множество  $P(z_0)$  не пусто и  $P \in P(z_0)$ . Тогда  $P_*(z_0, \gamma(\cdot)) = \widehat{P}_*(z_0, \gamma(\cdot)) = \underline{P}_*(z_0, \gamma(\cdot)) = P(z_0)$  и траекторию процесса (1)–(3) из начального положения  $z_0 \in R^n$  можно привести на терминальное множество (4) в момент  $P$  с использованием допустимого управления вида (6).

**Доказательство.** Если выполнены условия 5, 6, то с учетом соотношения (22) получим  $0 \in \mathfrak{A}(P, \tau, v, z_0)$ ,  $\tau \in [0, P]$ ,  $v \in R^k$ . Поэтому  $0 \in \mathfrak{A}(P, \tau, z_0)$ , справедливы условия 3 и 4, причем для  $\tau \in [0, P]$ ,  $v \in R^k$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_*(P, \tau, v, z_0) &= \inf \{ \alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(P, \tau, v, z_0) \} = 0, \\ \sup_{\substack{P \\ \int_0^{P_*} \|v(\tau)\|^p d\tau \leq \nu^p}} \int_0^P \alpha_*(P, \tau, v(\tau), z_0) d\tau &= \int_0^P \alpha_*(P, \tau, z_0) d\tau = \int_0^P \beta_*(P, \tau, z_0) d\tau = 0. \end{aligned}$$

**Теорема 6.** Пусть выполнены условия 5, 6, множество  $T(z_0, \gamma(\cdot))$  не пусто и  $T \in T(z_0, \gamma(\cdot))$ . Тогда  $T(z_0, \gamma(\cdot)) = \widehat{T}(z_0, \gamma(\cdot)) = \Theta(z_0, \gamma(\cdot))$  и траекторию процесса (1)–(3) из начального положения  $z_0 \in R^n$  можно привести на терминальное множество (4) в момент  $T$  с использованием допустимого управления вида (6).

**Доказательство** непосредственно следует из конструкций соответствующих определений и теорем.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматриваются линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями. Сформулированы достаточные условия окончания игры за конечное гарантированное время в случае, когда условие М.С. Никольского [1] не выполняется. Предложены две схемы метода разрешающих функций, обеспечивающих завершение игры за конечное гарантированное время в классе стробоскопических стратегий Хайека [9]. Показано, что без дополнительных предположений это время совпадает с гарантированным временем в классе квазистратегий. Предложена схема регуляризации разрешающих функций, которая превращает их в функции Каратеодори [27] и существенно упрощает общую схему метода разрешающих функций без изменения гарантированного времени завершения игры. Дано сравнение гарантированных времен.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский М.С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Управляемые системы*. 1969. Вып. 2. С. 49–59.
2. Чикрий А.А., Безмагорычный В.В. Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Автоматика*. 1993. № 4. С. 26–36.
3. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями сближения. *Труды ИММ УрО РАН*. 2009. Т. 15, № 4. С. 290–301.
4. Саматов Б.Т. О задачах группового преследования при интегральных ограничениях на управления игроков. I. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. № 5. С. 132–145.
5. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
6. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 4. С. 40–64.
7. Чикрий А.А., Чикрий В.К. Структура образов многозначных отображений в игровых задачах управления движением. *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 3. С. 65–78.
8. Раппопорт И.С. Достаточные условия гарантированного результата в дифференциальной игре с терминальной функцией платы. *Проблемы управления и информатики*. 2018. № 1. С. 72–84.
9. Najek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. Vol. 12. 266 p.
10. Раппопорт И.С. О стробоскопической стратегии в методе разрешающих функций для игровых задач управления с терминальной функцией платы. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 4. С. 90–102.
11. Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов с терминальной функцией платы. *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 2. С. 1–10.
12. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 455 с.
13. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Москва: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
14. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
15. Pittsyk M.V., Chikrii A.A. On a droup pursuit problem. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1982. Vol. 46, N 5. P. 584–589.
16. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные кофликтно-управляемые процессы. *Прикл. математика и механика*. 1993. Т. 57, № 3. С. 3–14.
17. Chikrii A.A. Multivalued mappings and their selections in game control problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1995. Vol. 27, N 1. P. 27–38.
18. Chikrii A.A. Quasilinear controlled processes under conflict. *Journal of Mathematical sciences*. 1996. Vol. 80, N 3. P. 1489–1518.
19. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Обобщенные матричные функции Минтаг-Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка. *Кибернетика и системный анализ*. 2000. № 3. С. 3–32.
20. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лнувилля. *Кибернетика и системный анализ*. 2001. № 6. С. 66–99.
21. Chikrii A.A. Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems. *Optimization Methods and Software*. 2008. Vol. 23, N 1. P. 39–72.
22. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics*. 2010. Vol. 271. P. 69–85.
23. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. *Springer Optimization and its Applications*. 2008. Vol. 17. P. 349–387.
24. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.
25. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. *Вестн. МГУ. Сер. математика, механика, астрономия, физика, химия*. 1959. № 2. С. 25–32.

26. Половинкин Е.С. Элементы теории многозначных отображений. Москва: Из-во МФТИ, 1982. 127 с.
27. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
28. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 480 с.

*Надійшла до редакції 28.01.2018*

### **Й.С. Раппопорт**

#### **МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ІГРОВИХ ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ**

**Анотація.** Досліджено метод розв'язувальних функцій стосовно ігрових задач керування з інтегральними обмеженнями. Запропоновано схему методу, що забезпечує закінчення гри за певний гарантований час в класі стробоскопічних стратегій. Показано результати порівняння гарантованих часів цієї схеми методу розв'язувальних функцій з першим прямим методом Понтрягіна для інтегральних обмежень.

**Ключові слова:** лінійна диференціальна гра, інтегральні обмеження, багатозначне відображення, вимірний селектор, стробоскопічна стратегія.

### **J.S. Rappoport**

#### **RESOLVING-FUNCTIONS METHOD FOR GAME THEORY CONTROL PROBLEMS WITH INTEGRAL CONSTRAINTS**

**Abstract.** The author analyzed the method of resolving functions with regard to game theory control problems with integral constraint. A scheme of the method is proposed. This scheme ensures the end of the game within a guaranteed time in the class of stroboscopic strategies. The guaranteed times for this scheme of the resolving-functions method are compared with the results of the first Pontryagin method for integral constraints.

**Keywords:** linear differential game, integral constraint, multi-valued mapping, measurable selector, stroboscopic strategy.

#### **Раппопорт Иосиф Симович,**

кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: jeffrappoport@gmail.com.