УДК 519.17

М.Ф. СЕМЕНЮТА, С.М. НЕДІЛЬКО, В.М. НЕДІЛЬКО

БІМАГІЧНІ ВЕРШИННІ РОЗМІТКИ

Анотація. Введено поняття еквівалентності вершинних розміток на заданому графі. Доведено еквівалентність трьох бімагічних розміток для регулярних графів. Одержано частинний розв'язок задачі існування 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки мультичасткових графів, а саме для графів, ізоморфних $K_{n,\,n,\,m}$. Доведено, що послідовність бірегулярних графів $K_{n(ij)} = ((K_{n-1} - M) + K_1) - (u_n u_i) - (u_n u_j)$ допускає 1-вершинну бімагічну вершинну розмітку, де u_i, u_j — будь-яка пара несуміжних вершин у графі $K_{n-1} - M$, u_n — вершина K_1, M — досконале паросполучення повного графа K_{n-1}. Встановлено, якщо r-регулярний граф G порядку n є дистанційним магічним, то граф $G + G$ має 1-вершинну бімагічну вершинну розмітку з магічними сталими $(n+1)(n+r)/2 + n^2$ і $(n+1)(n+r)/2 + nr$. Визначено два нові типи графів, які не допускають 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки.

Ключові слова: дистанційна магічна розмітка, 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка, непарна 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка, парна 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка.

ВСТУП

Задача оптимальної розмітки елементів графа є однією з класичних задач дискретної оптимізації. З оглядом публікацій щодо різних типів розміток можна ознайомитися в електронному журналі Д. Галліана [1], який щороку оновлюється.

Поняття розмітки графа є більш широким ніж розфарбування і має дві важливі відмінності. По-перше, під час розмітки використовується ін'єктивна (або бієктивна) функція, яка ставить у відповідність різним елементам графа різні числа, а звичайні обмеження кольору замінюють співвідношеннями між мітками. Це зумовлює другу відмінність, яка полягає в тому, що обмеження включають арифметичні обчислення з числовими значеннями міток.

Математичні моделі з використанням розмічених графів широко застосовуються в теорії кодування, зокрема для побудови кодів синхронізації та згорткових кодів з оптимальними властивостями автокореляції, кодів для радіолокації, на базі послідовності Сколема [2], для розв'язання проблеми невизначеності у рентгенівській кристалографії, під час проектування комунікаційних мереж [3–5]. Наприклад, в алгоритмах маршрутизації в MPLS-мережі застосовано граціозну розмітку дерев [6]. Математичний апарат теорії розміток часто виявляється корисним для надання додаткової інформації про граф. Наприклад, у роботі [7] розглянуто можливість обчислення відстані між будь-якими парами вершин графа за умови наявності вершинної розмітки і без залучення іншої додаткової інформації про граф. Дистанційну магічну розмітку та її різновиди застосовують як математичні моделі для розв'язання задач оптимального планування, зокрема під час планування неповних турнірів з різними властивостями [8, 9].

У цій роботі розглянуто вершинні розмітки, які є комбінацією магічної і дистанційної розміток. Досліджено питання еквівалентності трьох видів бімагічних розміток, запропонованих у [10]. Продовжено розв'язання задач існування 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки для регулярних та бірегулярних графів, розпочате в роботах [10, 11]. Знайдено нові класи графів, які не є 1-вершинними бімагічними вершинними.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Будемо розглядати неорієнтовані скінченні графи, які не містять петель та кратних ребер. Під вершинною розміткою f графа $G=(V, E)$ розуміють відображення, що ставить у відповідність вершинам графа числа із заданої множини за певним правилом. Позначимо $N(u)$ множину суміжності вершини $u \in V(G)$, а deg (u) — степінь вершини u. Граф вважають регулярним, якщо всі його вершини мають однаковий степінь. Граф $G=(V_1 \cup V_2, E)$ називають бірегулярним, якщо вершини множини V_i мають однаковий степінь r_i, де $i=1,2$ і $r_1 \neq r_2$. Вагу $w(u)$ (або $w_f(u)$) вершини u для розмітки f визначимо як суму міток вершин суміжних з u, тобто $w(u)=\sum_{v \in N(u)} f(v)$, де кожна вершина $v \in V(G)$. Якщо всі ваги вершин однакові, одержують магічний тип розмітки.

Означення 1 [12]. Дистанційною магічною розміткою (або 1-вершинною магічною вершинною розміткою або сигма-розміткою) графа $G=(V, E)$ порядку n називається бієкція $f: V(G) \to \{1, 2, \ldots, n\}$, для якої існує таке натуральне число k — магічна стала, що для кожної вершини $u \in V(G)$ виконується рівність $\sum_{v \in N(u)} f(v)=k$. Граф G, що допускає таку розмітку, називають дистанційним магічним графом.

Автори роботи [10] запропонували три види вершинних розміток графа, що включають поняття бімагічності.

Означення 2 [10]. Бієктивна розмітка $f: V(G) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ графа $G=(V, E)$ порядку n називається 1-вершинною бімагічною вершинною, якщо існують дві такі сталі k_1, k_2, що для кожної вершини $u \in V(G)$ $\sum_{v \in N(u)} f(v)=k_1$ або $\sum_{v \in N(u)} f(v)=k_2$, де $k_1 \neq k_2$. Граф G, що допускає таку розмітку, називають 1-вершинним бімагічним вершинним графом.

Означення 3 [10]. Бієктивна розмітка $f: V(G) \to \{1, 3, \ldots, 2n-1\}$ графа $G=(V, E)$ порядку n називається непарною 1-вершинною бімагічною вершинною, якщо існують дві такі сталі k_1, k_2, що для кожної вершини $u \in V(G)$ $\sum_{v \in N(u)} f(v)=k_1$ або $\sum_{v \in N(u)} f(v)=k_2$, де $k_1 \neq k_2$. Граф G, що допускає таку розмітку, називають непарним 1-вершинним бімагічним вершинним графом.

Означення 4 [10]. Бієктивна розмітка $f: V(G) \to \{0, 2, \ldots, 2(n-1)\}\}$ графа $G=(V, E)$ порядку n називається парною 1-вершинною бімагічною вершинною, якщо існують дві такі сталі k_1, k_2, що для кожної вершини $u \in V(G)$ $\sum_{v \in N(u)} f(v)=k_1$ або $\sum_{v \in N(u)} f(v)=k_2$, де $k_1 \neq k_2$. Граф G, що допускає таку розмітку, називають парним 1-вершинним бімагічним вершинним графом.

Числа k_1 і k_2 називають магічними сталими розмітки f. Будемо вважати, що умова бімагічності порушується, якщо $k_1=k_2$.

У цій роботі досліджено бімагічний тип вершинної розмітки і частково розв’язано задачі, які в загальному вигляді можна сформулювати таким чином.

Задача 1. Під час розгляду розміток f і g двох видів на заданому графі G виникає питання, чи може одна розмітка породжувати іншу за певних умов. У разі позитивної відповіді на це питання зазначені розмітки назвемо еквівалентними. Для вершинних розміток це поняття введено у такому означенні.

Означення 5. Дві вершинні розмітки f і g графа $G=(V, E)$ називаються еквівалентними на G, якщо одна з них породжує іншу таким чином, що для кожної вершини $x \in V(G)$ виконуються такі взаємно однозначні відповідності: $f(x) \leftrightarrow g(x)$ і $w_f(x) \leftrightarrow w_g(x)$.

Припустимо, що граф G має вершинні бімагічні розмітки f і g двох видів. Потрібно з'ясувати, чи є f і g еквівалентними розмітками на G.

Задача 2 [10, 11]. Задано регулярний або бірегулярний граф. За яких умов існує 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка цього графа?

Задача 3. Нехай граф $G=(V, E)$ допускає 1-вершинну бімагічну вершинну розмітку. Визначити функцію, яка породжує цю розмітку.

Задача 4. Встановити види графів, які не допускають 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки.

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ БІМАГІЧНИХ РОЗМІТОК РЕГУЛЯРНИХ ГРАФІВ

У роботі [10] доведено, що регулярний або бірегулярний граф має 1-вершинну бімагічну вершинну розмітку тоді й тільки тоді, коли він є непарним або парним 1-вершинним бімагічним вершинним графом. Зауважимо, що ці твердження виконуються не для кожного бірегулярного графа. Приклад бірегулярного графа та його 1-вершиної бімагічної вершинної розмітки наведено на рис. 1. Але для цього графа не існує непарна 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка. Тому потрібно з'ясувати, за яких умов наведені твердження є істинними для бірегулярних графів.

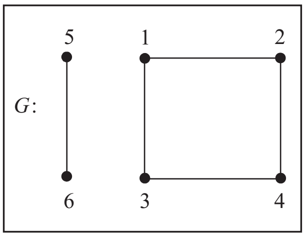

Рис. 1. 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка бірегулярного графа G

Розв'яжемо задачу 1 і знайдемо залежність між бімагічними розмітками регулярних графів, довівши таку теорему.

Теорема 1. Для r-регулярного графа G порядку n є еквівалентними такі твердження:

1) G — 1-вершинний бімагічний вершинний граф;
2) G — непарний 1-вершинний бімагічний вершинний граф;
3) G — парний 1-вершинний бімагічний вершинний граф.

Доведення. Покажемо еквівалентність тверджень 2) і 3). Для тверджень 1) і 2) та 1) і 3) доведення проводиться аналогічно.

Нехай G — r-регулярний граф порядку n. Припустимо, що f — непарна 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка G, а k_1, k_2 — її магічні сталі. Розіб'ємо $V(G)$ на дві попарно неперетинні множини V_1 і V_2, де $V(G)=V_1 \cup V_2$, таким чином, що вага кожної вершини з V_1 дорівнює k_1, а з V_2 — k_2. Розглянемо довільні вершини $u \in V_1$ та $v \in V_2$, для яких

$$w_f(u)=k_1=2s_1-1+2s_2-1+2s_3-1+\ldots+2s_r-1,$$
$$w_f(v)=k_2=2t_1-1+2t_2-1+2t_3-1+\ldots+2t_r-1,$$

де $2s_i-1$, $2t_i-1$ — мітки вершин, суміжних відповідно u та v, $i=1,2,\ldots,r$. Для регулярного графа серед чисел s_i і t_i хоча б одна пара не збігається. Покажемо, що G є парним 1-вершинним бімагічним вершинним графом. Задамо нову вершинну розмітку φ графа G таким чином, що $\varphi(x)=2(l-1)$, якщо $f(x)=2l-1$, для кожної вершини $x \in V(G)$, де $l=1,2,\ldots,n$. Для міток виконується співвідношення:

$$f(x) \leftrightarrow \varphi(x), \text{ тобто } 1 \leftrightarrow 0,\ 3 \leftrightarrow 2,\ 5 \leftrightarrow 4,\ 7 \leftrightarrow 6,\ \ldots,\ 2n-1 \leftrightarrow 2(n-1). \qquad (1)$$

Для ваг вершин $u \in V_1$ та $v \in V_2$ одержимо такі відповідності:

$$w_f(u)=k_1 \leftrightarrow w_\varphi(u)=k_1^*=2(s_1-1)+2(s_2-1)+2(s_3-1)+\ldots+2(s_r-1)=k_1-r,$$

$$w_f(v)=k_2 \leftrightarrow w_\varphi(v)=k_2^*=2(t_1-1)+2(t_2-1)+2(t_3-1)+\ldots+2(t_r-1)=k_2-r.$$

Отже, функція φ задовольняє вимоги означення 4 і є парною 1-вершинною бімагічною вершинною розміткою G. Обернене твердження «з 3) випливає 2)» неважко встановити, користуючись взаємно однозначною відповідністю між мітками (1) розміток f і φ.

Теорему доведено.

Наслідок 1. Для регулярного графа G його 1-вершинна бімагічна вершинна, непарна і парна 1-вершинні бімагічні вершинні розмітки є попарно еквівалентними.

Доведення наслідку випливає з існування взаємно однозначних відповідностей, встановлених між мітками вершин і ваг у доведенні теореми 1.

1-ВЕРШИННА БІМАГІЧНА ВЕРШИННА РОЗМІТКА ОКРЕМИХ ВИДІВ БІРЕГУЛЯРНИХ І РЕГУЛЯРНИХ ГРАФІВ

У роботі [10] доведено існування 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки для повного двочасткового графа, а також знайдено умови, за яких повний симетричний мультичастковий граф є 1-вершинним бімагічним вершинним. Розв'яжемо задачу існування бімагічної розмітки для інших класів мультичасткових графів. Розглянемо трьохчасткові графи виду: $K_{n,n,m}$, $K_{n,m,n}$, $K_{m,n,n}$ для $m \neq n$. Вони є представниками класу бірегулярних графів.

Теорема 2. Якщо для кожного з графів $K_{n,n,m}$, $K_{n,m,n}$, $K_{m,n,n}$ існує 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка з магічними сталими k_1 і k_2, то $2k_1 + k_2 = (m+2n)(m+2n+1)$ і k_2 — парне (або $2k_2 + k_1 = (m+2n)(m+2n+1)$ і k_1 — парне).

Доведення. Припустимо, що f — 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка $K_{n,n,m} = (V, E)$ з магічними сталими k_1 і k_2. Нехай $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, де $V_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, $V_3 = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ і кожна з множин V_1, V_2, V_3 належить різним часткам тричасткового графа $K_{n,n,m}$. Обчислимо ваги вершин:

$$w(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i) + \sum_{s=1}^{m} f(z_s), \quad w(y_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \sum_{s=1}^{m} f(z_s),$$
$$w(z_s) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} f(y_i).$$

Виконання умови бімагічності є можливим у трьох ситуаціях. Не порушуючи загальності, будемо вважати: 1) $w(x_i) = w(y_i) = k_1$, $w(z_s) = k_2$ або 2) $w(x_i) = w(z_s) = k_1$, $w(y_i) = k_2$, або 3) $w(y_i) = w(z_s) = k_1$, $w(x_i) = k_2$.

У кожному випадку одержимо, що k_2 — парне число і $2k_1 + k_2 = (m+2n)(m+2n+1)$.

Для графів $K_{n,m,n}$ і $K_{m,n,n}$ одержимо аналогічні результати.

Теорему доведено.

Безпосередньо з доведення теореми 2 випливає наведений нижче наслідок.

Наслідок 1. Якщо кожний з графів $K_{n,n,m}$, $K_{n,m,n}$, $K_{m,n,n}$ є дистанційним магічним, то $(m+2n) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,3)$ або $(m+2n) \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\,3)$.

Теорема 3. Кожний граф $K_{n,n,m}$, $K_{n,m,n}$, $K_{m,n,n}$ є 1-вершинним бімагічним вершинним для парного n.

Доведення. Якщо n — парне і $m = n$, то отримуємо 1-вершинний бімагічний вершинний граф $K_{n,n,n}$ [10].

Розглянемо граф $K_{n,n,m} = (V, E)$, для якого $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, і кожна множина $V_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, $V_3 = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ складається з попарно несуміжних вершин. Нехай $n = 2k$ і $m \neq n$. Задамо вершинну розмітку f графа $K_{n,n,m}$ таким чином:

$$f(x_i)=2i-1,\ f(y_i)=2i,\ \text{якщо}\ 1\le i\le k,$$

$$f(x_{k+1+j})=4k-2j,\ \text{якщо}\ 0\le j\le k-1,$$

$$f(y_{k+1+j})=4k-(2j+1),\ \text{якщо}\ 0\le j\le k-1,$$

$$f(z_s)\in\{4k+1, 4k+2, \dots, 4k+m\},\ \text{де}\ 1\le s\le m.$$

Функція f є бієкцією з множини V у множину чисел $\{1, 2, \dots, 2n+m\}$.

Враховуючи результати теореми 2, для ваг вершин одержимо такі значення:

$$w(x_i)=w(y_i)=k_1=4k^2+k(4m+1)+\frac{m(m+1)}{2},\ w(z_s)=k_2=8k^2+2k.$$

Для $k_1=k_2$ умова бімагічності порушується. Але тоді має виконуватися рівність $3n(2n+1)=(m+2n)(m+2n+1)$. Це можливо лише для $m=1$, $n=2$. Отже, вершинна розмітка f є 1-вершинною бімагічною вершинною для графа $K_{n,n,m}$, якщо $m\ne1$ і $n\ne2$. Задамо іншу вершинну розмітку g на $K_{2,2,1}$ таким чином: $g(x_1)=1$, $g(x_2)=5$, $g(y_1)=2$, $g(y_2)=4$, $g(z)=3$, g задовольняє умову бімагічності.

Отже, граф $K_{n,n,m}$ є 1-вершинним бімагічним вершинним для парного n. На основі подібних міркувань робимо аналогічний висновок для графів $K_{n,m,n}$, $K_{m,n,n}$.

Теорему доведено.

Операцію видалення ребра (uv) у графі G позначимо $G-(uv)$. Нехай n — непарне число, $n\ge5$. Розглянемо графи виду: $((K_{n-1}-M)+K_1)-(u_nu_i)-(u_nu_j)$, де u_i, u_j — будь-яка пара несуміжних вершин у графі $K_{n-1}-M$, M — досконале паросполучення повного графа K_{n-1}, u_n — вершина K_1. Будь-який граф із цієї послідовності позначимо $K_{n(ij)}$. Приклад графа $K_{7(56)}$ наведено на рис. 2.

Теорема 4. Для кожного графа $K_{n(ij)}$ існує 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка з магічними сталими $n(n-3)/2$ і $n(n-1)/2$, де n — непарне число, $n\ge5$.

Доведення. Розглянемо граф $K_{n(ij)}=((K_{n-1}-M)+K_1)-(u_nu_i)-(u_nu_j)$, де n — непарне число, $n\ge5$. Позначимо $V(K_{n(ij)})=\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n\}$, де $V(K_{n-1})=\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}\}$, $V(K_1)=\{u_n\}$. Поставимо у відповідність вершинам графа $K_{n-1}-M$ натуральні числа $1, 2, \dots, n-1$ таким чином, що кожна пара несуміжних вершин одержить мітки s і $n-s$, де s одне з чисел $1, 2, \dots, n-1$. Тоді мітка вершини u_n дорівнює n.

Це призводить до того, що граф $K_{n-1}-M$ буде дистанційним магічним, оскільки вага кожної вершини дорівнює $n(n-3)/2$. Знайдемо ваги вершин графа $K_{n(ij)}$:

$$w(u_n)=n(n-3)/2,\ w(u_i)=n(n-3)/2,$$

$$w(u_j)=n(n-3)/2,\ w(u_k)=n(n-1)/2$$

для будь-якого $k\in\{1, 2, \dots, n-1\}$, $k\ne i$, $k\ne j$.

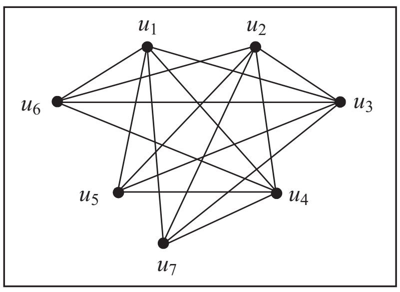

Рис. 2. Граф $K_{7(56)}$

Отже, кожний граф виду $K_{n(ij)}$ є 1-вершинним бімагічним вершинним графом з магічними сталими $n(n-3)/2$ і $n(n-1)/2$.

Теорему доведено.

Проілюструємо результати теореми 4 на прикладі графа $K_{7(56)}$ порядку $n=7$ (рис. 2).

Задамо вершинну розмітку f графа $K_{7(56)}$, як запропоновано в теоремі 4:

$$f(u_1)=1,\ f(u_2)=6,\ f(u_3)=2,\ f(u_4)=5,$$

$$f(u_5)=3,\ f(u_6)=4,\ f(u_7)=7.$$

Знайдемо ваги вершин

$$w(u_1)=28-7=21,\ w(u_2)=28-7=21,\ w(u_3)=28-7=21,\ w(u_4)=28-7=21,$$
$$w(u_5)=28-7-7=14,\ w(u_6)=28-7-7=14,\ w(u_7)=28-7-7=14.$$

Функція f є 1-вершинною бімагічною вершинною розміткою графа $K_{7(56)}$, а $n(n-3)/2=14$, $n(n-1)/2=21$ — її магічні сталі.

Наслідок 1. Кожний граф виду $K_{n(ij)}$ є непарним і парним 1-вершинним бімагічним вершинним, де n — непарне число, $n\ge 5$.

Доведення. Розглянемо 1-вершинну бімагічну вершинну розмітку f графа $K_{n(ij)}$, запропоновану в теоремі 4. Задамо нові бімагічні вершинні розмітки φ і g графа $K_{n(ij)}$ таким чином, що $\varphi(u_l)=2f(u_l)-1$, $g(u_l)=2(f(u_l)-1)$ для кожної вершини $u_l\in V(K_{n(ij)})$, де $l=1,2,\dots,n$. У цьому випадку кожна пара несуміжних вершин в $K_{n-1}-M$ одержує мітки s і $2n-1-s$ для $s=1,3,5,\dots,2n-3$ при розмітці φ та s і $2(n-1)-s$ для $s=0,2,4,\dots,2n-4$ при розмітці g. Для вершини u_n залишаються такі значення: $\varphi(u_n)=2n-1$, $g(u_n)=2(n-1)$. Для ваг вершин $K_{n(ij)}$ одержимо:

$$w_\varphi(u_n)=n^2-4n+2,\ w_\varphi(u_i)=w_\varphi(u_j)=n^2-4n+2,\ w_\varphi(u_k)=n^2-2n+1,$$
$$w_g(u_n)=n^2-5n+4,\ w_g(u_i)=w_g(u_j)=n^2-5n+4,\ w_g(u_k)=n^2-3n+2$$

для будь-якого $k\in\{1,2,\dots,n-1\}$, $k\ne i$, $k\ne j$.

Отже, кожний граф виду $K_{n(ij)}$ є непарним і парним 1-вершинним бімагічним вершинним з магічними сталими n^2-4n+2, n^2-2n+1 та n^2-5n+4, n^2-3n+2 відповідно.

Наслідок доведено.

Зауважимо, що 1-вершинна бімагічна вершинна, непарна і парна 1-вершинні бімагічні вершинні розмітки попарно еквівалентні на $K_{n(ij)}$.

Під з'єднанням двох графів $G_1=(V_1,E_1)$ і $G_2=(V_2,E_2)$ таких, що $V_1\cap V_2=\varnothing$, будемо розуміти граф $G_1+G_2=(V_1\cup V_2, E_1\cup E_2\cup E)$, де E містить всі ребра виду (uv) і $u\in V_1$, $v\in V_2$.

Теорема 5. Якщо r-регулярний граф G є дистанційним магічним, то граф $G+G$ має 1-вершинну бімагічну вершинну розмітку з магічними сталими $\frac{(n+1)(n+r)}{2}+n^2$ і $\frac{(n+1)(n+r)}{2}+nr$.

Доведення. Нехай f — дистанційна магічна розмітка r-регулярного графа G порядку n і кожна його вершина має вагу k. Позначимо $V(G+G)=\{u_1,u_2,\dots,u_n,v_1,v_2,\dots,v_n\}$, де u_i та v_i є образами вершини x_i графа G, $i=1,2,\dots,n$. Задамо вершинну розмітку φ графа $G+G=(V,E)$ таким чином: $\varphi(u_i)=f(x_i)$, $\varphi(v_i)=f(x_i)+n$.

Функція φ є бієкцією з множини $V(G+G)$ на множину $\{1,2,\dots,2n\}$.

Вершини графа $G+G$ одержать ваги:

$$w_\varphi(u_i)=w_f(x_i)+\frac{n(n+1)}{2}+n^2=k+\frac{n(n+1)}{2}+n^2=k_1,$$
$$w_\varphi(v_i)=w_f(x_i)+nr+\frac{n(n+1)}{2}=k+\frac{n(n+1)}{2}+nr=k_2.$$

Для регулярного дистанційного магічного графа G маємо $k=\dfrac{r(n+1)}{2}$. Отже, розмітка φ графа $G+G$ є 1-вершинною бімагічною вершинною з магічними сталими $k_1=\dfrac{(n+1)(n+r)}{2}+n^2$ і $k_2=\dfrac{(n+1)(n+r)}{2}+nr$.

Теорему доведено.

У цьому розділі розв'язано задачу 3 під час доведення теорем 3 і 5 для графів $K_{n,n,m}$, $K_{n,m,n}$, $K_{m,n,n}$ та $G+G$, а також запропоновано частинний розв'язок задачі 2 у теоремах 3–5.

ГРАФИ, ЩО НЕ ДОПУСКАЮТЬ 1-ВЕРШИННОЇ БІМАГІЧНОЇ ВЕРШИННОЇ РОЗМІТКИ

Одна із задач, що розглядаються в цій роботі, стосується розширення множини графів, які не допускають 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки.

Теорема 6. Якщо граф $G=(V,E)$ містить такі три вершини a, b і c, що $|N(a)\cap N(b)\cap N(c)|=\deg(a)-1=\deg(b)-1=\deg(c)-1$, то G не є 1-вершинним бімагічним вершинним графом.

Доведення. Припустимо, що G має 1-вершинну бімагічну вершинну розмітку f з магічними сталими k_1 і k_2.

Нехай $N(a)\cap N(b)\cap N(c)=\{u_i : u_i\in N(a), u_i\in N(b), u_i\in N(c)\}$, $N(a)=\{u_i\}\cup\{x\}$, $N(b)=\{u_i\}\cup\{y\}$, $N(c)=\{u_i\}\cup\{z\}$. Знайдемо ваги вершин a, b і c:

$$w(a)=\sum_{u_i\in N(a)} f(u_i)+f(x),\quad w(b)=\sum_{u_i\in N(b)} f(u_i)+f(y),$$

$$w(c)=\sum_{u_i\in N(c)} f(u_i)+f(z).$$

Одержимо один з двох випадків:

1) якщо $w(a)=w(b)=w(c)=k_i$, де $i=1$ або $i=2$, то $f(x)=f(y)=f(z)$;

2) не порушуючи загальності, будемо вважати, що $w(a)=w(b)=k_1$, $w(c)=k_2$, тоді $f(x)=f(y)$.

Це є неможливим, оскільки функція f бієктивна.

Теорему доведено.

Теорема 7. Будь-який граф G порядку n з трьома вершинами степеня $n-1$ не допускає 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки.

Доведення. Нехай u_1, u_2, u_3 — різні вершини графа G і $\deg(u_1)=\deg(u_2)=\deg(u_3)=n-1$. Припустимо, що G має 1-вершинну бімагічну вершинну розмітку f. Одержимо

$$w(u_1)=\sum_{i=1}^{n} f(u_i)-f(u_1),\quad w(u_2)=\sum_{i=1}^{n} f(u_i)-f(u_2),\quad w(u_3)=\sum_{i=1}^{n} f(u_i)-f(u_3),$$

де $V(G)=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$. Це призводить до того, що серед міток є однакові. Це неможливо, оскільки функція f є бієктивною. Тому припущення є хибним.

Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

У статті запропоновано поняття еквівалентності двох вершинних розміток на заданому графі G. Якщо розмітки еквівалентні, то кожна з них може породжувати іншу. Доведено еквівалентність трьох типів бімагічних розміток для регулярних графів. Розв'язано задачу існування 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки для бірегулярних графів $K_{n,n,m}$, $K_{n,m,n}$, $K_{m,n,n}$ і $K_{n(ij)}$. Доведено, що коли регулярний граф G є дистанційним магічним, то граф $G+G$ має 1-вершинну бімагічну вершинну розмітку. Знайдено магічні сталі цієї розмітки. Запропоновано спосіб побудови 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки для кожного з графів ізоморфних $K_{n,n,m}$ для парного n та графів виду $K_{n(ij)}$. Розширено клас графів, що не допускають 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки. Виділено клас задач з досліджуваної тематики, і частково розв'язано їх в цій роботі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gallian J.A. A dynamic survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*. 2016. DS6: Dec 23. 408 p.
2. Morgan D., Rees R. Using Skolem and hooked-Skolem sequences to generate graceful trees. *J. Comb. Math. Comb. Comput.* 2003. Vol. 44. P. 47–63.
3. Bloom G.S., Golomb S.W. Applications of numbered undirected graphs. *Proc. of the IEEE.* 1977. Vol. 65, N 4. P. 562–570.
4. Bloom G.S., Golomb S.W. Numbered complete graphs, unusual rulers and assorted applications. *Theory and Applications of Graphs*. *Lecture Notes in Math.* New York: Springer-Verlag, 1978. Vol. 642. P. 53–65.
5. Sutton M. Sumable graphs labellings and their applications. Ph.D. Thesis. Dept. Computer Science, The University of Newcastle. 2001.
6. Arkut I., Arkut R., Ghani N. Graceful label numbering in optical MPLS networks. *OptiComm 2000: Optical Networking and Communications* (Dallas, 22–24 Oct. 2000). Proc. SPIE. 2000. Vol. 4233. P. 1–8.
7. Gavoille C., Peleg D., Perennes S., Raz R. Distance labeling in graphs. *Journal of Algorithms*. 2004. Vol. 53. P. 85–112.
8. Froncek D., Kovar P., Kovarova T. Fair incomplete tournaments. *Bulletin of ICA.* 2006. Vol. 48. P. 31–33.
9. Froncek D. Handicap distance antimagic graphs and incomplete tournaments. *AKCE Int. J. Graphs Comb.* 2013. Vol. 10, N 2. P. 119–127.
10. Baskar Babujee J., Babitha S. On 1-vertex bimagic {upsilon} ertex labeling. *Tamkang Journal of Mathematics.* 2014. Vol. 45, N 3. P. 259–273.
11. Семенюта М.Ф. Про (a, d)-дистанційну антимагічну та 1-вершинну бімагічну вершинну розмітки певних типів графів. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 2. С. 134–141.
12. Miller M., Rodger C., Simanjuntak R. Distance magic labelings of graphs. *Australian Journal of Combinatorics.* 2003. Vol. 28. P. 305–315.

Надійшла до редакції 03.01.2018

М.Ф. Семенюта, С.Н. Неделько, В.Н. Неделько

БИМАГИЧЕСКИЕ ВЕРШИННЫЕ РАЗМЕТКИ

Аннотация. Введено понятие эквивалентности вершинных разметок на заданном графе. Доказана эквивалентность трех бимагических разметок для регулярных графов. Получено частное решение задачи существования 1-вершинной бимагической вершинной разметки мультидольных графов, а именно для графов изоморфных $K_{n,n,m}$. Доказано, что последовательность бирегулярных графов $K_{n(ij)} = ((K_{n-1} - M) + K_1) - (u_n u_i) - (u_n u_j)$ допускает 1-вершинную бимагическую вершинную разметку, где u_i, u_j — любая пара несмежных вершин в графе $K_{n-1} - M$, u_n — вершина K_1, M — совершенное паросочетание полного графа K_{n-1}. Установлено, что если r-регулярный граф G порядка n является дистанционным магическим, то граф $G + G$ имеет 1-вершинную бимагическую вершинную разметку с магическими постоянными $(n+1)(n+r)/2 + n^2$ и $(n+1)(n+r)/2 + nr$. Определены два новых типа графов, не допускающих 1-вершинную бимагическую вершинную разметку.

Ключевые слова: дистанционная магическая разметка, 1-вершинная бимагическая вершинная разметка, нечетная 1-вершинная бимагическая вершинная разметка, четная 1-вершинная бимагическая вершинная разметка.

M.F. Semeniuta, S.N. Nedilko, V.N. Nedilko

BIMAGIC VERTEX LABELINGS

Abstract. The notion of the equivalence of vertex labelings on a given graph is introduced. The equivalence of three bimagic labelings for regular graphs is proved. A particular solution is obtained for the problem of the existence of a 1-vertex bimagic vertex labeling of multipartite graphs, namely, for graphs of isomorphic $K_{n,n,m}$. It is proved that the sequence of bi-regular graphs $K_{n(ij)} = ((K_{n-1} - M) + K_1) - (u_n u_i) - (u_n u_j)$ admits 1-vertex bimagic vertex labeling, where u_i, u_j is any pair of non-adjacent vertices in the graph $K_{n-1} - M$, u_n is the vertex of K_1, M is the perfect matching of the complete graph K_{n-1}. It is established that if the r-regular graph G of order n is distance magic one, then the graph $G + G$ has a 1-vertex bimagic vertex labeling with magic constants $(n+1)(n+r)/2 + n^2$ and $(n+1)(n+r)/2 + nr$. Two new types of graphs that do not admit 1-vertex bimagic vertex labelings are defined.

Keywords: distance magic labeling, 1-vertex bimagic vertex labeling, odd 1-vertex bimagic vertex labeling, even 1-vertex bimagic vertex labeling.

Семенюта Марина Фролівна,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Льотної академії Національного авіаційного університету, Кропивницький, e-mail: marina_semenyuta@ukr.net.

Неділько Сергій Миколайович,
доктор техн. наук, професор, начальник Льотної академії Національного авіаційного університету, Кропивницький, e-mail: nvn60@ukr.net.

Неділько Віталій Миколайович,
кандидат техн. наук, доцент, завідувач кафедри Льотної академії Національного авіаційного університету, Кропивницький, e-mail: nvn60@ukr.net.