УДК 519.65

П.С. МАЛАЧІВСЬКИЙ, Я.В. ПІЗЮР, В.А. АНДРУНИК

ЧЕБИШОВСЬКЕ НАБЛИЖЕННЯ СУМОЮ ПОЛІНОМА ТА ЛОГАРИФМІЧНОГО ВИРАЗУ З ЕРМІТОВИМ ІНТЕРПОЛЮВАННЯМ

Анотація. Встановлено умову існування чебишовського наближення сумою полінома та логарифмічного виразу з найменшою абсолютною похибкою та ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка. Запропоновано метод визначення параметрів такого чебишовського наближення.

Ключові слова: чебишовське наближення, ермітова інтерполяція, метод Ремеза, точки альтернансу.

ВСТУП. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу чебишовського наближення з ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка сумою полінома та логарифмічного виразу

$$L_n(a;x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + A\ln(x+p),\ \ A\neq 0,\ \ p>-\alpha,\ \ n=0,1,2,\dots, \tag{1}$$

на відрізку $[\alpha,\beta]$ з невідомими параметрами a_i $(i=\overline{0,n})$, A і p.

Чебишовське наближення сумою полінома та логарифмічного виразу з ермітовою інтерполяцією в крайніх точках відрізка використовується для побудови неперервного і гладкого мінімаксного сплайн-наближення [1, 2]. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення застосовують, зокрема, для відтворення термометричної характеристики та чутливості термодіодних сенсорів [1, 3].

Властивості чебишовського наближення нелінійним виразом з інтерполюванням досліджено у роботах [4–6]. Властивості чебишовського наближення виразом (1) з інтерполюванням описано в [7]. Наближення сумою полінома та логарифмічного виразу (1) не задовольняє умову Гаара [8] і, відповідно, наближення цим виразом з ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка не завжди існує. Тому потрібно дослідити умови існування такого чебишовського наближення. Крім того, у разі існування чебишовського наближення виразом (1), обчислення значення параметра p, який нелінійно входить у вираз, є досить трудомістким.

ІСНУВАННЯ ТА ХАРАКТЕРИСТИЧНА ВЛАСТИВІСТЬ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ СУМОЮ ПОЛІНОМА ТА ЛОГАРИФМІЧНОГО ВИРАЗУ З ЕРМІТОВИМ ІНТЕРПОЛЮВАННЯМ

Розглянемо неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha,\beta]$ функції $f(x)$, для яких справджуються нерівності:

$$0<W^{(n)}<W_2^{(n)}, \tag{2}$$

де

$$W^{(n)}=\frac{D_{n+1}(f;z_2,z_3,\dots,z_{n+4})}{D_{n+1}(f;z_1,z_2,\dots,z_{n+3})}, \tag{3}$$

$$W_2^{(n)}=\frac{D_{n+1}(s_{n+1};z_2,z_3,\dots,z_{n+4})}{D_{n+1}(s_{n+1};z_1,z_2,\dots,z_{n+3})}, \tag{4}$$

$$s_k(x) = x^k,$$

$$D_k(U; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k+1}) = \frac{D_{k-1}(U; z_{j+1}, z_{j+2}, \ldots, z_{j+k+1})}{D_{k-1}(s_{k-1}; z_{j+1}, z_{j+2}, \ldots, z_{j+k+1})} - \tag{5}$$
$$- \frac{D_{k-1}(U; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k})}{D_{k-1}(s_{k-1}; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k})}, \; k = \overline{3, n+1}, \; j = \overline{1, n-k+3},$$

$$D_2(U; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{D_1(U; z_2, z_4)}{D_1(s_1; z_2, z_4)} - U'(z_1), \text{ якщо } j = 1, \\ \dfrac{D_1(U; z_{j+1}, z_{j+3})}{D_1(s_1; z_{j+1}, z_{j+3})} - \dfrac{D_1(U; z_j, z_{j+2})}{D_1(s_1; z_j, z_{j+2})}, \text{ якщо } 1 < j < n+1, \\ U'(z_{n+4}) - \dfrac{D_1(U; z_{n+1}, z_{n+3})}{D_1(s_1; z_{n+1}, z_{n+3})}, \text{ якщо } j = n+1; \end{cases} \tag{6}$$

$$D_1(U; z_j, z_{j+2}) = \begin{cases} U'(z_1), \text{ якщо } j = 1, \\ U(z_4) + U(z_3) - 2U(z_2), \text{ якщо } j = 2, \\ U(z_{j+2}) - U(z_j), \text{ якщо } 2 < j \le n, \\ 2U(z_{n+3}) - U(z_{n+2}) - U(z_{n+1}), \; j = n+1, \\ U'(z_{n+4}), \text{ якщо } j = n+2, \end{cases} \tag{7}$$

в яких $U'(x)$ — похідна функції $U(x)$, а z_j $(j = \overline{3, n+2})$ — будь-які впорядковані за зростанням числа з інтервалу (α, β), $z_1 = z_2 = \alpha$, $z_{n+3} = z_{n+4} = \beta$.

Для таких функцій $f(x)$ є справедливими теореми 1–3.

Теорема 1. Нехай функція $f(x)$ є неперервно диференційовною на відрізку $[\alpha, \beta]$. Необхідною і достатньою умовою існування чебишовського наближення функції $f(x)$ сумою полінома та логарифмічного виразу (1) для $n \ge 2$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної в обох крайніх точках відрізка α і β є справдження нерівностей (2).

Якщо виконується умова (2), то існує єдине чебишовське наближення функції $f(x)$ виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної в крайніх точках відрізку, а його параметри задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} f(\alpha) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \alpha^i - A \ln(\alpha + p) = 0, \\ f'(\alpha) - \sum\limits_{i=1}^{n} i a_i \alpha^{i-1} - \dfrac{A}{\alpha + p} = 0, \\ f(z_j) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z_j^i - A \ln(z_j + p) = (-1)^j \mu, \; j = \overline{3, n+2}, \\ f(\beta) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \beta^i - A \ln(\beta + p) = 0, \\ f'(\beta) - \sum\limits_{i=1}^{n} i a_i \beta^{i-1} - \dfrac{A}{\beta + p} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

у якій z_j $(j=\overline{3, n+2})$ — впорядковані за зростанням точки чебишовського альтернанту з інтервалу (α, β).

Доведення цієї теореми ґрунтується на характеристичній теоремі існування та єдиності чебишовського наближення функції $f(x)$ нелінійним виразом з відтворенням значення функції та її похідної у зовнішніх точках [1]. Її доведення можна виконати аналогічно доведенню теореми про існування та єдиність чебишовського наближення функції нелінійним виразом з ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка [1, 9].

Достатню умову (2) існування чебишовського наближення сумою полінома та логарифмічного виразу (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідних у крайніх точках відрізка задовольняють, зокрема, неперервно диференційовні функції $f(x)$ $(f(x) \in C^{(n+1)}[\alpha, \beta])$, n-на і $(n+1)$-ша похідні яких є строго монотонними на $[\alpha, \beta]$. При цьому характер їхньої монотонності має бути протилежним: якщо одна з них зростає, то друга повинна спадати, і навпаки.

Подібні властивості має чебишовське наближення функції $f(x)$ сумою полінома та логарифмічного виразу (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної в одній з крайніх точок відрізка α або β.

Теорема 2. Нехай функція $f(x)$ є неперервно диференційовною на відрізку $[\alpha, \beta]$, тоді:

а) достатньою умовою існування чебишовського наближення функції $f(x)$ сумою полінома та логарифмічного виразу (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної у точці α є справдження нерівностей (2), у яких

$$D_2(U;\ z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}) = \begin{cases} \dfrac{D_1(U; z_2, z_4)}{D_1(s_1; z_2, z_4)} - U'(z_1), \text{ якщо } j=1, \\[2ex] \dfrac{D_1(U; z_{j+1}, z_{j+3})}{D_1(s_1; z_{j+1}, z_{j+3})} - \dfrac{D_1(U; z_j, z_{j+2})}{D_1(s_1; z_j, z_{j+2})}, \\ \qquad\qquad \text{якщо } 1 < j \le n+1, \end{cases} \tag{9}$$

$$D_1(U; z_j, z_{j+2}) = \begin{cases} U'(z_1), \text{ якщо } j=1, \\ U(z_4)+U(z_3)-2U(z_2), \text{ якщо } j=2, \\ U(z_{j+2})-U(z_j), \text{ якщо } 2 < j \le n+2, \end{cases} \tag{10}$$

де z_j $(j=\overline{3, n+4})$ — будь-які впорядковані за зростанням числа з $(\alpha, \beta]$, а $z_1 = z_2 = \alpha$.

б) у разі виконання умови пункту а) існує єдине чебишовське наближення функції $f(x)$ сумою полінома та логарифмічного виразу (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної у точці α, а його параметри знаходять із системи рівнянь

$$\begin{cases} f(\alpha) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \alpha^i - A \ln(\alpha + p) = 0, \\ f'(\alpha) - \sum\limits_{i=1}^{n} i a_i \alpha^{i-1} - \dfrac{A}{\alpha + p} = 0, \\ f(z_j) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z_j^i - A \ln(z_j + p) = (-1)^j \mu, \quad j = \overline{3, n+4}, \end{cases} \tag{11}$$

в якій z_j $(j=\overline{3, n+4})$ — впорядковані за зростанням точки чебишовського альтернансу з $(\alpha, \beta]$.

Теорема 3. Нехай функція $f(x)$ є неперервно диференційовною на відрізку $[\alpha, \beta]$, тоді:

а) достатньою умовою існування чебишовського наближення функції $f(x)$ сумою полінома та логарифмічного виразу (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної в точці β є справдження нерівностей (2), в яких

$$D_2(U; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{D_1(U; z_{j+1}, z_{j+3})}{D_1(s_1; z_{j+1}, z_{j+3})} - \dfrac{D_1(U; z_j, z_{j+2})}{D_1(s_1; z_j, z_{j+2})}, & \text{якщо } 1 \le j < n+1, \\ U'(z_{n+4}) - \dfrac{D_1(U; z_{n+1}, z_{n+3})}{D_1(s_1; z_{n+1}, z_{n+3})}, & \text{якщо } j = n+1, \end{cases} \quad (12)$$

$$D_1(U; z_j, z_{j+2}) = \begin{cases} U(z_{j+2}) - U(z_j), & \text{якщо } 1 \le j \le n, \\ 2U(z_{n+3}) - U(z_{n+2}) - U(z_{n+1}), & \text{якщо } j = n+1, \\ U'(z_{n+4}), & \text{якщо } j = n+2, \end{cases} \quad (13)$$

де z_j $(j=\overline{1, n+2})$ — будь-які впорядковані за зростанням числа з $[\alpha, \beta)$, а $z_{n+3} = z_{n+4} = \beta$.

б) у разі виконання умови пункту а) існує єдине чебишовське наближення функції $f(x)$ сумою полінома та логарифмічного виразу (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням значення функціїї та її похідної у точці β, а його параметри знаходять із системи рівнянь

$$\begin{cases} f(z_j) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z_j^i - A\ln(z_j + p) = (-1)^j \mu, \quad j = \overline{1, n+2}, \\ f(\beta) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \beta^i - A\ln(\beta + p) = 0, \\ f'(\beta) - \sum\limits_{i=1}^{n} i a_i \beta^{i-1} - \dfrac{A}{\beta + p} = 0, \end{cases} \quad (14)$$

в якій z_j $(j=\overline{1, n+2})$ — впорядковані за зростанням точки чебишовського альтернансу з $[\alpha, \beta)$.

Доведення теорем 2 і 3 можна виконати аналогічно доведенню теореми про існування та єдиність чебишовського наближення функції нелінійним виразом з ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка [1, 9].

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ СУМОЮ ПОЛІНОМА ТА ЛОГАРИФМІЧНОГО ВИРАЗУ З ЕРМІТОВИМ ІНТЕРПОЛЮВАННЯМ

Відповідно до теореми про існування та єдиність чебишовського наближення нелінійним виразом з відтворенням значення функції та похідної у зовнішніх точках [1], параметри чебишовського наближення сумою полінома та логарифмічного виразу (1) функції $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної в крайніх точках відрізка α і β, якщо воно існує, можна визначити за схемою Ремеза [1, 6]. Чебишовське наближення сумою полінома та логарифмічного виразу (1) функції $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної в обох крайніх точках відрізка α і β має n точок альтернансу, а в разі ермітового інтерполювання лише в одній крайній точці — $(n+2)$ точок альтернансу.

Нехай z_i $(i=\overline{3, n+2})$ — точки альтернансу для чебишовського наближення з ермітовим інтерполюванням в обох крайніх точках відрізка, z_i $(i=\overline{3, n+4})$ — точки альтернансу для наближення з ермітовим інтерполюванням лише у точці α, а z_i $(i=\overline{1, n+2})$ — точки альтернансу для наближення з ермітовим інтерполюванням у точці β. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теорем 1–3 і точки альтернансу відомі, то параметри a_i $(i=\overline{0, n})$ і A чебишовського наближення функції $f(x)$ виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної в обох крайніх точках відрізка α і β, або одній із них обчислюються за формулами

$$A=\frac{D_{n+1}(f;\, z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}{D_{n+1}(\varphi;\, z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}, \tag{15}$$

$$a_k=\frac{D_k(f;\, z_1, z_2, \ldots, z_{k+2})-\sum\limits_{i=k+1}^{n} a_i D_k(s_i;\, z_1, z_2, \ldots, z_{k+2})-AD_k(\varphi;\, z_1, z_2, \ldots, z_{k+2})}{D_k(s_k;\, z_1, z_2, \ldots, z_{k+2})},$$

$$k=\overline{1, n}, \tag{16}$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left(f(z_3)+f(z_4)-\sum_{i=1}^{n} a_i\left(z_3^i+z_4^i\right)-A(\ln(z_3+p)+\ln(z_4+p))\right), \tag{17}$$

де $\varphi(p, x)=\ln(x+p)$, а значення виразів $D_k(U;\, z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+k+1})$ обчислюються за формулою (5), в якій залежно від точок інтерполювання для виразів $D_2(U;\, z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3})$, $i=\overline{1, n+1}$, та $D_1(U;\, z_i, z_{i+2})$, $i=\overline{1, n+2}$, застосовуються відповідно формули (6), (7); (9), (10) або (12), (13).

Значення параметра p є розв'язком трансцендентного рівняння

$$\omega_n(p)=W^{(n)}, \tag{18}$$

де

$$\omega_n(p)=\frac{D_{n+1}(\varphi;\, z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi;\, z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})},$$

а значення $W^{(n)}$ визначається формулою (3) з урахуванням формул (5)-(7).

Розв'язок цього рівняння можна знайти шляхом перебору з пробними значеннями

$$p_i=p_{i-1}+h_p, \quad i=1, 2, \ldots, \tag{19}$$

де $p_0=-\alpha+10^{-4}$. Крок перебору h_p покладається рівним наближеному значенню параметра p

$$h_p=\frac{W^{(n)}(z_{n+2}+z_1)-z_{n+4}-z_3}{2(1-W^{(n)})}. \tag{20}$$

Перебір пробних значень (19) проводиться до досягнення виконання нерівності

$$(\omega_n(p_i)-W^{(n)})(\omega_n(p_{i-1})-W^{(n)})\le 0, \qquad (21)$$

при цьому значення виразів $W^{(n)}$ і $D_k(U; z_i, z_{i+1}, ..., z_{i+k+1})$ обчислюються за формулами (3) і (5), а для обчислення значень $D_2(U; z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3})$ і $D_1(U; z_i, z_{i+2})$ залежно від точок інтерполювання застосовуються формули (6), (7); (9), (10) або (12), (13).

Для уточнення значення p в інтервалі $[p_{i-1}, p_i]$ можна застосувати метод хорд або ділення навпіл. Під час уточнення значень параметра p для тестових прикладів швидко збігався метод Довелла [5].

ВИСНОВКИ

Достатньою умовою існування чебишовського наближення функції $f(x)$ сумою полінома та логарифмічного виразу (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної в крайніх точках відрізку є виконання нерівностей (2), в яких залежно від точок інтерполювання для виразів $D_2(U; z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3})$, $i=\overline{1, n+1}$, та $D_1(U; z_i, z_{i+2})$, $i=\overline{1, n+2}$, застосовуються відповідно формули (6), (7); (9), (10) або (12), (13). Нерівності (2) справджуються, зокрема, для неперервно диференційовних функцій $f(x)$ $(f(x)\in C^{(n+1)}[\alpha, \beta])$, n-на і $(n+1)$-ша похідні яких є строго монотонними на $[\alpha, \beta]$. При цьому характер їхньої монотонності має бути протилежним: якщо одна з них зростає, то друга повинна спадати і навпаки.

Параметри a_i $(i=\overline{0, n})$ і A такого наближення визначаються формулами (15)–(17). Значення параметра p є коренем трансцендентного рівняння (18), розв'язок якого можна знайти шляхом перебору (19) з кроком (20).

Чебишовське наближення виразом (1) з відтворенням значення функції та її похідної в крайніх точках відрізка застосовується для побудови неперервних і гладких мінімаксних сплайн-наближень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Малачівський П.С., Скопецький В.В. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення. Київ: Наук. думка, 2013. 270 с.

2. Skopetskyy V., Malachivskyy P., Pizyur Ya. Approximation by a smooth interpolation spline. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2011. Vol. 47, Iss. 5. P. 724-730.

3. Шварц Ю.М., Иващенко А.Н., Шварц М.М. и др. Метрологическое обеспечение диодной термометрии. *Приборы.* 2007. № 8(86). С. 5–11.

4. Dunham C., Zhu C. Strong uniqueness of nonlinear Chebyshev approximation (with interpolation). *Numerical mathematics and computing:* Proc. 20th Manitoba Conf. Congr. Numerantium 80 (Winnipeg, Can., 1990) Winnipeg, 1991. P. 161–169.

5. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. Киев: Наук. думка, 1980. 352 с.

6. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. Киев: Наук. думка, 1989. 272 с.

7. Малачівський П.С., Пізюр Я.В., Андруник В.А. Чебишовське наближення функцій сумою поліному й логарифмічного виразу з інтерполюванням. *Комп'ютерні технології друкарства.* 2017. № 35. С. 95–104.

8. Малачівський П. Чебишовське наближення сумою многочлена і функції з одним нелінійним параметром. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* 2005. Вип. 1. С. 134–145.

9. Скопецький В.В., Малачівський П.С. Чебишовське наближення сумою многочлена й нелінійного виразу з ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка. *Доповіді НАН України.* 2010. № 4. С. 42–47.

Надійшла до редакції 01.11.2017

П.С. Малачивский, Я.В. Пизюр, В.А. Андрунык

ЧЕБИШЕВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ СУММОЙ ПОЛИНОМА И ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ С ЭРМИТОВЫМ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕМ

Аннотация. Установлено условие существования чебышевского приближения суммой полинома и логарифмического выражения с наименьшей абсолютной погрешностью и эрмитовым интерполированием в крайних точках отрезка. Предложен метод определения параметров такого чебышевского приближения.

Ключевые слова: чебышевское приближение, эрмитова интерполяция, метод Ремеза, точки альтернанса.

P.S. Malachivskyy, Ya.V. Pizyur, V.A. Andrunyk

CHEBYSHEV APPROXIMATION BY THE SUM OF POLYNOMIAL AND LOGARITHMIC EXPRESSION WITH THE HERMITIAN INTERPOLATION

Abstract. The authors establish the condition for the existence of the Chebyshev approximation by the sum of a polynomial and logarithmic expression with the smallest absolute error and Hermitian interpolation at the boundary points of an interval. The method is proposed for determining the parameters of such Chebyshev approximation.

Keywords: Chebyshev approximation, Hermitian interpolation, Remez method, alternance points.

Малачівський Петро Стефанович,
доктор техн. наук, професор, провідний науковий співробітник Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів,
e-mail: Petro.Malachivskyy@gmail.com.

Пізюр Ярополк Володимирович,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри Національного університету «Львівська політехніка»,
e-mail: pizyur@yahoo.com.

Андруник Василь Адамович,
асистент кафедри Національного університету «Львівська політехніка»,
e-mail: vasyl.a.andrunyk@lpnu.ua.