УДК 517.9:519.6

В.М. БУЛАВАЦКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЗАДАЧИ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ НЕКОТОРЫХ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Аннотация. Построены дробно-дифференциальные математические модели для описания динамики геофильтрационных процессов в условиях учета явления релаксации давления. Модели базируются на понятиях обобщенных производных Капуто и Хильфера как производных дробного порядка от функции по другой функции. В рамках указанных моделей получены аналитические решения некоторых фильтрационных краевых задач, включая задачу с нелокальными граничными условиями.

Ключевые слова: математическое моделирование, локально-неравновесные процессы геофильтрации, дробно-дифференциальные математические модели, производные Капуто и Хильфера, краевые задачи, нелокальные граничные условия.

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование динамики геофильтрационных процессов в сложных условиях их протекания — одно из актуальных предметных направлений геоматематики, геоинформатики, геомеханики, развивающееся преимущественно в рамках классических постановок задач на основе общепринятых методов и подходов теории сплошной среды [1–4]. При этом большинство известных математических моделей процессов переноса в геопористых средах базируется на классических законах переноса, неадекватных в условиях существенного отклонения системы от равновесного состояния [1, 5]. Кроме того, в классических моделях переноса постулировано такое весьма жесткое ограничение на процессы, как бесконечная скорость распространения возмущений, что противоречит современным физическим представлениям.

Попытки теоретического учета эффектов неравновесности (в частности, эффектов памяти) при нестационарной фильтрации в пористой среде привели к созданию теории релаксационной фильтрации, первое наиболее полное изложение которой, по-видимому, содержится в известной работе [4].

Эффективный современный подход в описании процессов переноса в системах, для которых важен учет нелокальных пространственно-временных свойств, связан с использованием аппарата интегро-дифференцирования нецелого порядка [6–11]. Так, например, в работе [10] построены математические модели и получены решения некоторых фильтрационных краевых задач по моделированию дробно-дифференциальной динамики релаксационных фильтрационных процессов в пористых и трещиновато-пористых массивах конечной мощности, а в [11] поставлена и решена задача моделирования дробно-дифференциальной динамики релаксационного фильтрационного процесса при наличии нелокальных граничных условий. Отметим также работу [12] по математическому моделированию дробно-дифференциальной динамики релаксационных процессов конвективной диффузии растворимых веществ в подземных фильтрационных потоках.

В настоящей работе рассмотрены новые дробно-дифференциальные математические модели процессов геофильтрации с учетом релаксации давления, базирующиеся на понятиях производных Капуто и Хильфера от функции по другой функции, а также получены замкнутые решения некоторых краевых задач неклассической теории релаксационной фильтрации, включая задачу, имеющую нелокальные граничные условия. В отличие от ранее разработанных моделей характерной особенностью рассматриваемых математических моделей является то, что при их построении учитывалась возможность в известном смысле управления процессом моделирования с помощью надлежащего выбора «пробных» функций, входящих в определение соответствующих дробных производных.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ ГЕОФИЛЬТРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА В УСЛОВИЯХ РЕЛАКСАЦИИ ДАВЛЕНИЯ

Как известно [1–4], процессы релаксационной фильтрации капельно-сжимаемой жидкости в геопористых средах описываются вместо классического закона Дарси соотношением

$$u_x = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \lambda_p \frac{\partial p}{\partial t}\right), \tag{1}$$

где u_x — скорость геофильтрации, p — давление, $k > 0$ — коэффициент проницаемости среды, $\mu > 0$ — вязкость жидкости, λ_p — время релаксации давления.

Соотношение (1) устанавливает факт нарушения «равновесного» соответствия между скоростью фильтрации и градиентом давления, постулируемого классическим законом Дарси, что объясняется влиянием релаксационных эффектов [2–4]. Для моделирования особенностей динамики аномальных фильтрационных процессов в пористых средах (в частности, фрактальной структуры) вместо соотношения (1) используют различные обобщенные соотношения основного закона фильтрации, например [9]

$$u_x = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}(p + \lambda_p D_t^{(\beta)} p), \tag{2}$$

где $D_t^{(\beta)}$ — оператор дробной производной Капуто–Герасимова [7, 13] по переменной t порядка β $(0 < \beta < 1)$. (Заметим, что из (2) при $\beta \to 1$ следует соотношение (1).)

С учетом соотношения (1) из уравнения неразрывности фильтрационного потока [2, 3]

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \beta^* \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

(β^* — коэффициент упругоемкости пласта) получаем известное уравнение релаксационной фильтрации (аналогичное уравнению фильтрации в трещиновато-пористой среде) следующего вида [2–4]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(p + \lambda_p \frac{\partial p}{\partial t}\right), \tag{4}$$

где $\kappa = k / (\mu\beta^*)$ — коэффициент пьезопроводности [2, 3].

Используя вместо (3) обобщенное уравнение неразрывности потока в виде [14]

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \beta^* D_t^{(\alpha)} p(x, t) = 0 \tag{5}$$

($D_t^{(\alpha)}$ — оператор дробной производной Капуто–Герасимова по переменной t порядка α $(0 < \alpha < 1)$), получаем из (2), (5) уравнение фильтрации

$$D_t^{(\alpha)} p = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}(p + \lambda_p D_t^{(\beta)} p) \quad (0 < \alpha, \beta < 1). \tag{6}$$

Отсюда, в частности при $\alpha, \beta \to 1$, получаем уравнение (4). Отметим, что уравнением вида (6) также моделируется дробно-дифференциальная динамика фильтрационных процессов в трещиновато-пористых средах [15].

При моделировании аномальных фильтрационных процессов большей степени общности можно достичь заменой в уравнении (6) производной Капуто–Герасимова обобщенной производной Капуто–Герасимова — так называемой g-Капуто дробной производной [16, 17]. Тогда приходим к уравнению

$$D_{t,g}^{(\alpha)} p(x,t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} (p + \lambda_p D_{t,g}^{(\beta)} p) \ (0 < \alpha, \beta < 1), \tag{7}$$

где $g = g(t)$ — некоторая «пробная» функция (в частности, при $g(t) \equiv t$ уравнение (7) переходит в (6)).

Фильтрационная математическая модель, основанная на уравнении вида (7), позволяет в некотором смысле управлять процессом моделирования изучаемого явления с помощью надлежащего выбора «пробной» функции $g(t)$.

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНЕЧНОГО ПРОМЕЖУТКА ФИЛЬТРАЦИИ

В рамках модели, основанной на уравнении (7), рассмотрим задачу математического моделирования дробно-дифференциальной динамики релаксационного фильтрационного процесса в геомассиве конечной мощности l с проницаемыми гранями. В математической постановке данная задача сводится к отысканию в области $(0, l) \times (0, +\infty)$ решения следующей краевой задачи:

$$D_{t,g}^{(\alpha)} p(x,t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} (p + \lambda_p D_{t,g}^{(\beta)} p) \ (0 < \alpha, \ \beta < 1), \tag{8}$$

$$p(0,t) = 0, \ \ p(l,t) = 0, \tag{9}$$

$$p(x,0) = p_0(x). \tag{10}$$

Здесь $D_{t,g}^{(\alpha)} p(x,t)$ — обобщенная дробная производная Капуто–Герасимова по переменной t порядка α от функции p по функции g, определяемая соотношением [16, 17]

$$D_{t,g}^{(\alpha)} p(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{p'_\tau(x,\tau) d\tau}{[g(t) - g(\tau)]^\alpha}, \tag{11}$$

где $g(t) \in C^1[0, +\infty)$, $g'(t) > 0$ $(t \geq 0)$, $g(0) = 0$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, $p_0(x)$ — заданная функция начального распределения давлений в массиве. (Отметим, что в частном случае $g(t) \equiv t$ из (11) получаем соотношение, на котором базируется определение общепринятой дробной производной Капуто–Герасимова [6, 7, 13].)

Выполняя в (8)–(10) замену $\theta = g(t)$ $(t = g^{-1}(\theta),\ g(g^{-1}(\theta)) = \theta,\ g^{-1}(0) = 0)$, сводим рассматриваемую задачу к краевой задаче для уравнения с традиционными дробными производными

$$D_\theta^{(\alpha)} U(x,\theta) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} (U(x,\theta) + \lambda_p D_\theta^{(\beta)} U(x,\theta)) \ (0 < \alpha, \beta < 1), \tag{12}$$

$$U(0,\theta) = 0, \ U(l,\theta) = 0, \tag{13}$$

$$U(x,0) = p_0(x) \tag{14}$$

($D_\theta^{(\alpha)} f$ — оператор стандартной дробной производной Капуто–Герасимова порядка α от функции $f(\theta)$ по переменной θ [7, 13], $U(x,\theta) \equiv p(x, g^{-1}(\theta))$). Применим к задаче (12)–(14) конечное интегральное преобразование Фурье вида

$$\overline{U}_n(\theta) = \int_0^l U(x,\theta) \sin(\lambda_n x) dx \ \left(\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \ n \in N \right). \tag{15}$$

В результате получаем задачу

$$D_{\theta}^{(\alpha)}\overline{U}_n(\theta)+\kappa\lambda_n^2\lambda_p D_{\theta}^{(\beta)}\overline{U}_n(\theta)+\kappa\lambda_n^2\overline{U}_n(\theta)=0, \qquad (16)$$

$$\overline{U}_n(0)=\nu_n\equiv\int_0^l p_0(x)\sin(\lambda_n x)dx \quad (n\in N). \qquad (17)$$

Далее, применяя к (16), (17) преобразование Лапласа, по переменной θ находим

$$\hat{\overline{U}}_n(s)=\nu_n\frac{s^{\alpha-1}+\mu_n\lambda_p s^{\beta-1}}{s^{\alpha}+\mu_n\lambda_p s^{\beta}+\mu_n} \quad (\mu_n=\kappa\lambda_n^2,\ n\in N), \qquad (18)$$

где $\hat{\overline{U}}_n(s)$ — образ функции $\overline{U}_n(\theta)$ в пространстве изображений по Лапласу, s — параметр преобразования Лапласа. Из соотношения (18) с учетом результатов работ [7, 13, 18] имеем

$$\overline{U}_n(\theta)=\nu_n\sum_{r=0}^{\infty}(-\mu_n\lambda_p)^r\theta^{(\alpha-\beta)r}[E_{\alpha,(\alpha-\beta)r+1}^{r+1}(-\mu_n\theta^{\alpha})+$$
$$+\mu_n\lambda_p\theta^{\alpha-\beta}E_{\alpha,(\alpha-\beta)(r+1)+1}^{r+1}(-\mu_n\theta^{\alpha})] \quad (n\in N), \qquad (19)$$

где $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$ — трехпараметрическая функция Миттаг-Леффлера [19].

Возвращаясь в соотношении (19) в область оригиналов по геометрической переменной, получаем решение рассматриваемой задачи в виде

$$p(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}(-\mu_n\lambda_p)^r(g(t))^{(\alpha-\beta)r}[E_{\alpha,(\alpha-\beta)r+1}^{r+1}(-\mu_n g^{\alpha}(t))+$$
$$+\mu_n\lambda_p(g(t))^{\alpha-\beta}E_{\alpha,(\alpha-\beta)(r+1)+1}^{r+1}(-\mu_n g^{\alpha}(t))]\nu_n\sin(\lambda_n x). \qquad (20)$$

Отметим, что, положив в (20) $g(t)\equiv t$, получим решение соответствующей фильтрационной краевой задачи в рамках модели, содержащей традиционные [7, 13] дробные производные Капуто–Герасимова.

Если в соотношении (20) положить $g(t)=t^{\rho}$ $(\rho>0)$, то получим решение рассматриваемой задачи в рамках модели, содержащей производные Капуто–Катугампола [20].

Отдельно рассмотрим случай $\lambda_p=0$. Здесь вместо (8) имеем уравнение фильтрации вида

$$D_{t,g}^{(\alpha)}p(x,t)=\kappa\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \qquad (21)$$

Из (20) получаем решение краевой задачи (21), (9), (10) в виде

$$p(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n E_{\alpha}(-\mu_n g^{\alpha}(t))\sin(\lambda_n x), \qquad (22)$$

где $E_{\alpha}(z)$ — классическая функция Миттаг-Леффлера [19]. При этом приведенные в работе [16] результаты вычислений согласно (22) показывают, что в зависимости от вида функции $g(t)$ решение (22) позволяет описывать как «сверхмедленные», так и «сверхбыстрые» диффузионные режимы.

Отметим также, что из соотношения (22) при $\alpha\to 1$, $g(t)=t$ получаем решение соответствующей фильтрационной краевой задачи для классического уравнения упругого режима фильтрации

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

в виде

$$p(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\mu_n t}\int_0^l p_0(\xi)\sin(\lambda_n\xi)d\xi\sin(\lambda_n x),$$

что совпадает с решением, приведенным, например, в [21].

ДАЛЬНЕЙШЕЕ ОБОБЩЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГЕОФИЛЬТРАЦИИ

Увеличение степени общности рассмотренной геофильтрационной математической модели может быть достигнуто, в частности, использованием в уравнениях модели вместо обобщенной производной Капуто–Герасимова от функции по функции соответственно обобщенной производной Хильфера от функции по другой функции, определяемой следующим соотношением [16]:

$$D_{t,g}^{\alpha,\mu}f(t)=I_{t,g}^{\mu(1-\alpha)}\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}I_{t,g}^{(1-\mu)(1-\alpha)}f(t)\ \ (0<\alpha<1,\ 0\le\mu\le1,\ g'(t)>0).\quad(23)$$

Здесь $I_{t,g}^{\nu}f(t)$ — дробный интеграл порядка ν от функции f по другой функции g, определяемый таким образом [13]:

$$I_{t,g}^{\nu}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t\frac{f(\tau)g'(\tau)d\tau}{[g(t)-g(\tau)]^{1-\nu}}.\quad(24)$$

Отсюда, в частности при $g(t)\equiv t$, получаем общепринятую производную Хильфера порядка α типа μ от функции $f(t)$, обозначаемую $D_t^{\alpha,\mu}f(t)$ [22].

Поскольку, как известно [22, 23], производная Хильфера обобщает понятия дробных производных Капуто и Римана–Лиувилля, использование данной производной при моделировании дробно-дифференциальной динамики фильтрационных процессов в пористых средах позволяет изучать фильтрационные модели большей общности, чем обычно применяемые в настоящее время. При этом, в рамках подхода, основанного на использовании обобщенной производной Хильфера вида (23), дополнительно открывается возможность некоторым образом управлять процессом моделирования с помощью надлежащего подбора функций $g(t)$ из некоторого допустимого класса функций.

Рассмотрим задачу моделирования дробно-дифференциальной динамики геофильтрационного процесса (с учетом релаксации давления) в рамках математической модели, основанной на обобщении фильтрационного закона Дарси вида

$$u_x=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}(p+\lambda_p D_{t,g}^{\alpha,\mu}p),\quad(25)$$

где $D_{t,g}^{\alpha,\mu}$ — оператор обобщенной производной Хильфера, определяемый согласно (23), (24). (Заметим, что из (25) при $\mu=1$, $\alpha\equiv\beta$ получаем соотношение (2).)

Постулируя для рассматриваемых аномальных геомиграционных процессов выполнение (вместо соотношения (3)) обобщенного уравнения неразрывности фильтрационного потока

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\beta^* D_{t,g}^{\alpha,\mu}p(x,t)=0,\quad(26)$$

получаем из (25), (26) основное уравнение математической модели фильтрации в виде

$$D_{t,g}^{\alpha,\mu}p(x,t)=\kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}(p+\lambda_p D_{t,g}^{\alpha,\mu}p)\ \ (0<\alpha<1).\quad(27)$$

Уравнение (27), очевидно, является обобщением уравнения (7), поскольку при $\mu=1$ из (27) следует (7). Можно показать, что уравнением вида (27) описывается также динамика процессов фильтрации в трещиновато-пористых средах.

В рамках математической модели фильтрации, базирующейся на уравнении (27), задача моделирования дробно-дифференциальной динамики релаксационного фильтрационного процесса в геомассиве конечной мощности l, например, с проницаемыми гранями, в математической постановке сводится к решению в области $(0, l) \times (0, +\infty)$ краевой задачи для (27) с краевыми условиями

$$p(0, t) = 0, \ \ p(l, t) = 0, \tag{28}$$

$$I_{t,g}^{(1-\mu)(1-\alpha)} p(x, 0+) = p_0(x), \tag{29}$$

где $p_0(x)$ — заданная функция, определяющая начальные условия процесса, $I_{t,g}^{(1-\mu)(1-\alpha)} f(t)$ — дробный интеграл порядка $(1-\mu)(1-\alpha)$ от функции f по другой функции g, определяемый согласно соотношению (24).

Выполнив, как и выше при решении задачи (8)–(10), замену $\theta = g(t)$, перепишем рассматриваемую краевую задачу (27)–(29) в виде

$$D_{\theta}^{\alpha,\mu} U(x, \theta) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} (U(x, \theta) + \lambda_p D_{\theta}^{\alpha,\mu} U(x, \theta)) \ \ (0 < \alpha < 1), \tag{30}$$

$$U(0, \theta) = 0, \ \ U(l, \theta) = 0, \tag{31}$$

$$I_{\theta}^{(1-\mu)(1-\alpha)} U(x, 0+) = p_0(x) \tag{32}$$

($D_{\theta}^{\alpha,\mu} f$ — оператор стандартной дробной производной Хильфера от $f(\theta)$ по переменной θ [22, 23]).

Применяя к задаче (30)–(32) конечное интегральное синус-преобразование Фурье вида (15), получаем в области изображений задачу

$$D_{\theta}^{\alpha,\mu} \overline{U}_n(\theta) + \rho_n \overline{U}_n(\theta) = 0, \tag{33}$$

$$I_{\theta}^{(1-\mu)(1-\alpha)} \overline{U}_n(0+) = \nu_n \ \ (n \in N), \tag{34}$$

где

$$\rho_n = \frac{\kappa \lambda_n^2}{1 + \kappa \lambda_n^2 \lambda_p}, \ \ \nu_n = \int_0^l p_0(x) \sin(\lambda_n x) dx \ \ (n \in N).$$

В пространстве изображений по Лапласу относительно временно́й переменной t из соотношений (33), (34) находим

$$\hat{\overline{U}}_n(s) = \nu_n \frac{s^{\mu(\alpha-1)}}{s^{\alpha} + \rho_n} \ \ \ (n \in N),$$

где $\hat{\overline{U}}_n(s)$ — образ функции $\overline{U}_n(\theta)$ в пространстве изображений по Лапласу, s — параметр преобразования Лапласа. Отсюда с учетом [7, 13, 19] имеем

$$\overline{U}_n(\theta) = \nu_n \theta^{(1-\alpha)(\mu-1)} E_{\alpha, \alpha+\mu(1-\alpha)}(-\rho_n \theta^{\alpha}) \ \ (n \in N), \tag{35}$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ — двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера [13, 19].

Возвращаясь в соотношениях (35) в область оригиналов по геометрической переменной, получаем решение рассматриваемой задачи в виде

$$p(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n (g(t))^{(1-\alpha)(\mu-1)} E_{\alpha, \alpha+\mu(1-\alpha)}(-\rho_n g^{\alpha}(t)) \sin(\lambda_n x).$$

Из последнего соотношения при $g(t)=t^{\sigma}$ $(\sigma>0)$ получаем решение соответствующей фильтрационной краевой задачи для модели с производной Хильфера–Катугампола [24] в виде

$$p(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n t^{\sigma(1-\alpha)(\mu-1)}E_{\alpha,\alpha+\mu(1-\alpha)}(-\rho_n t^{\sigma\alpha})\sin(\lambda_n x).$$

ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ДИНАМИКА РЕЛАКСАЦИОННОГО ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ПРИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Приведем пример построения замкнутого решения фильтрационной краевой задачи с нелокальными граничными условиями для математической модели релаксационного фильтрационного процесса, определяемого уравнением вида (27). В рамках указанной дробно-дифференциальной математической модели фильтрации моделирование неравновесной динамики фильтрационного процесса в геомассиве единичной мощности с проницаемой нижней гранью в предположении, например, равенства расходов жидкости через грани массива сводится к решению в области $\Omega=\{(x,t):0<x<1,\ 0<t<T\}$ следующей задачи:

$$D_{t,g}^{\alpha,\mu}p(x,t)=\kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}(p+\lambda_p D_{t,g}^{\alpha,\mu}p), \qquad (36)$$

$$p(1,t)=0,\ \ p_x(0,t)=p_x(1,t)\ \ (0\le t\le T), \qquad (37)$$

$$I_{t,g}^{(1-\mu)(1-\alpha)}p(x,0+)=h(x)\ \ (0\le x\le 1), \qquad (38)$$

где $h(x)$ — заданная функция начального распределения давлений, $D_{t,g}^{\alpha,\mu}$ — оператор обобщенной производной Хильфера, определяемый соотношениями (23), (24). Отметим, что рассматриваемая задача является аналогом задачи Самарского–Ионкина [25] применительно к диффузионным уравнениям с дробными производными вида (36). Для ее решения используем подход, разработанный в [25, 26] для классического уравнения теплопроводности.

Соответствующая спектральная задача в рассматриваемом случае имеет вид

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0\ \ (0<x<1),$$
$$X(1)=0,\ \ X'(0)=X'(1),$$

где λ^2 — спектральный параметр. Собственные значения данной спектральной задачи, как известно [25, 26], равны $\lambda_n=2\pi n$ $(n\in N)$. Соответствующие указанным собственным значениям собственные и присоединенные функции имеют вид

$$\varphi_0(x)=2(1-x),\ \ \varphi_{1n}(x)=4(1-x)\cos(\lambda_n x),\ \ \varphi_{2n}(x)=4\sin(\lambda_n x)\ \ (n\in N). \qquad (39)$$

Система функций (39), как показано в [26, 27], замкнута, минимальна и образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. В работе [27] для нее выписана система собственных и присоединенных функций сопряженной задачи, имеющая вид

$$\psi_0(x)=1,\ \ \psi_{1n}(x)=\cos(\lambda_n x),\ \ \psi_{2n}(x)=x\sin(\lambda_n x)\ \ (n\in N). \qquad (40)$$

Системы (39), (40) образуют биортогональную на интервале $(0,1)$ систему функций, любую функцию из $L_2(0,1)$ можно разложить в биортогональный ряд.

Представим решение задачи (36)–(38) в виде биортогонального разложения

$$p(x,t)=p_0(t)\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}p_{kn}(t)\varphi_{kn}(x). \qquad (41)$$

Разложив в биортогональный ряд функцию начальних условий задачи $h(x)$:

$$h(x) = h_0\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty} h_{kn}\varphi_{kn}(x),$$

$$h_0 = (h(x), \psi_0(x)),\ h_{kn} = (h(x), \psi_{kn}(x))\ \ (k = 1,2,\ n \in N),$$

получим на основании (36)–(38) такие последовательности задач Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка:

$$D_{t,g}^{\alpha,\mu} p_0(t) = 0,\ I_{t,g}^{(1-\mu)(1-\alpha)} p_0(0+) = h_0, \tag{42}$$

$$D_{t,g}^{\alpha,\mu} p_{1n}(t) + \omega_n p_{1n}(t) = 0,\ I_{t,g}^{(1-\mu)(1-\alpha)} p_{1n}(0+) = h_{1n}, \tag{43}$$

$$D_{t,g}^{\alpha,\mu} p_{2n}(t) + \omega_n p_{2n}(t) = F_n(t),\ I_{t,g}^{(1-\mu)(1-\alpha)} p_{2n}(0+) = h_{2n}, \tag{44}$$

где

$$\omega_n = \frac{\kappa\lambda_n^2}{1+\lambda_p\kappa\lambda_n^2},\ F_n(t) = \frac{2\kappa\lambda_n(1-\lambda_p\omega_n)}{1+\lambda_p\kappa\lambda_n^2} p_{1n}(t)\ \ (n \in N).$$

Решения задач (42)–(44) получаем аналогично изложенному выше с использованием операционного метода [7, 13]. В результате находим

$$p_0(t) = \frac{h_0}{\Gamma(\alpha+\mu(1-\alpha))}(g(t))^{(\alpha-1)(1-\mu)},$$

$$p_{1n}(t) = h_{1n}(g(t))^{(\alpha-1)(1-\mu)} E_{\alpha,\alpha+\mu(1-\alpha)}(-\omega_n g^{\alpha}(t)), \tag{45}$$

$$p_{2n}(t) = h_{2n}(g(t))^{(\alpha-1)(1-\mu)} E_{\alpha,\alpha+\mu(1-\alpha)}(-\omega_n g^{\alpha}(t)) +$$

$$+\frac{2\kappa\lambda_n(1-\lambda_p\omega_n)h_{1n}}{1+\kappa\lambda_p\lambda_n^2}(g(t))^{\alpha+(\alpha-1)(1-\mu)} E_{\alpha,2\alpha+\mu(1-\alpha)}^2(-\omega_n g^{\alpha}(t)). \tag{46}$$

Относительно условий сходимости рядов из соотношения (41) отметим следующее. Пусть $h(x) \in C^2[0,1]$. Тогда, как известно [28], имеют место соотношения $|h_{kn}| \le \dfrac{C}{\lambda_n^2}$ $(k = 1, 2,\ C > 0,\ n \in N)$. Учитывая асимптотические оценки функции $E_{\alpha,\beta}(z)$ для больших значений $|z|$ [7, 13], имеем из (45) для любого $t \ge t_0 > 0$ оценку

$$|p_{1n}(t)| \le \frac{C_1}{\lambda_n^2\omega_n} = \frac{C_1}{\lambda_n^2}\frac{1+\lambda_p\kappa\lambda_n^2}{\kappa\lambda_n^2} \le \frac{M_1}{\lambda_n^2}\ \ (C_1, M_1 > 0, n \in N). \tag{47}$$

Далее, из (46) получаем для любого $t \ge t_0 > 0$ аналогичную оценку

$$|p_{2n}(t)| \le \frac{C_2}{\lambda_n^2\omega_n} + \frac{C_3}{\lambda_n^2\omega_n^2}\frac{|\lambda_n(1-\lambda_p\omega_n)|}{1+\lambda_p\kappa\lambda_n^2} \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda_n^2}\left(C_2 + \frac{C_4}{\lambda_n^3}\right) \le \frac{M_2}{\lambda_n^2}\ \ (M_2 > 0,\ n \in N). \tag{48}$$

С учетом оценок (47), (48) заключаем, что ряды из (41) (в силу мажорантного признака Вейерштрасса) сходятся абсолютно и равномерно в области $\Omega_{\varepsilon} = [0,1]\times[\varepsilon, T]$ для любого $\varepsilon > 0$. Таким образом, функция $p(x, t)$ непрерывна в $\Omega_T = [0,1]\times(0,T]$. Аналогично устанавливается и непрерывность в Ω_T функций p_x, p_{xx}, $D_{t,g}^{\alpha,\mu} p$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для математического моделирования динамики локально-неравновесных геофильтрационных процессов в сложных условиях протекания, с учетом явления релаксации давления, вводятся в рассмотрение новые дробно-дифференциальные математические модели, базирующиеся на понятиях дробных производных Капуто и Хильфера от функции по другой функции.

Отличительной особенностью этих математических моделей является то, что при их построении учитывалась возможность в определенном смысле управления процессом моделирования с помощью надлежащего выбора «пробных» функций, вводимых в определения соответствующих производных дробного порядка.

В рамках указанных моделей получены замкнутые решения некоторых краевых задач неклассической теории релаксационной фильтрации, включая задачу с нелокальными граничными условиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 288 с.
2. Баренблатт Г.И., Ентов В.Н., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. Москва: Недра, 1984. 303 с.
3. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. Москва: Недра, 1970. 339 с.
4. Молокович Ю.М., Непримеров Н.И., Пикуза В.И., Штанин А.В. Релаксационная фильтрация. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. 136 с.
5. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса. *Успехи физических наук*. 1997. Т. 167, № 10. С. 1095–1106.
6. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2010. 368 p.
7. Podlubny I. Fractional differential equations. New York: Academic Press, 1999. 341 p.
8. Caputo M. Models of flux in porous media with memory. *Water Resources Research*. 2000. Vol. 36. P. 693–705.
9. Deseri L., Zingales M. A mechanical picture of fractional-order Darcy equation. *Communication in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 2015. Vol. 20. P. 940–949.
10. Булавацкий В.М. Некоторые математические модели геоинформатики для описания процессов переноса в условиях временной нелокальности. *Проблемы управления и информатики*. 2011. № 3. С. 128–137.
11. Булавацкий В.М., Кривонос Ю.Г. О моделировании дробно-дифференциальной динамики некоторых процессов релаксационной фильтрации. *Проблемы управления и информатики*. 2015. № 4. С. 60–69.
12. Bulavatsky V.M., Bogaenko V.A. Mathematical modelling of the fractional differential dynamics of the relaxation process of convective diffusion under conditions of planed filtration. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 6. P. 886–895.
13. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
14. Compte A., Metzler R. The generalized Cattaneo equation for the description of anomalous transport processes. *Journal of Phusics A*. 1997. Vol. 30. P. 7277–7289.
15. Bulavatsky V.M. Mathematical modelling of fractional differential filtration dynamics based on models with Hilfer–Prabhakar derivative. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 2. P. 204–216.
16. Булавацкий В.М., Кривонос Ю.Г. Математические модели с функцией контроля для исследования дробно-дифференциальной динамики геомиграционных процессов. *Проблемы управления и информатики*. 2014. № 3. С. 138–147.
17. Almeida R. A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function. arXiv:1609.04775v1[math. CA]. 2016.
18. Saxena R.K., Mathai F.M., Haubold H.J. Solutions of fractional reaction diffusion equations in terms of the Mittag-Leffler functions. *Intern. Journ. Scient. Research*. 2006. Vol. 15. P. 1–17.

19. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer Verlag, 2014. 454 p.
20. Almeida R., Malinowska A.B., Odzijewicz T. Fractional differential equations with dependence on the Caputo–Katugampola derivative. arXiv:1607.06913v1[math. CA]. 2016.
21. Гусейнзаде М.А., Колоссовская А.К. Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах. Москва: Недра, 1972. 456 с.
22. Hilfer R. Fractional time evolution. *Applications of fractional calculus in Physics*. Hilfer R. (Ed). Singapore: World scientific, 2000. P. 87–130.
23. Sandev T., Metzler R., Tomovski Z. Fractional diffusion equation with a generalized Riemann–Liouville time fractional derivative. *Journal of Physics A*. 2011. Vol. 44. P. 5–52.
24. Oliveira D.S., Capelas de Oliveira E. Hilfer–Katugampola fractional derivative. arXiv:1705.07733v1 [math. CA]. 2017.
25. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. *Дифференциальные уравнения*. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
26. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями. *Дифференциальные уравнения*. 1979. Т. 15, № 7. С. 1284–1295.
27. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи. *Дифференциальные уравнения*. 1999. Т. 35, № 8. С. 1094–1100.
28. Furati K.M., Iyiola O.S., Kirane M. An inverse problem for a generalized fractional diffusion. *Applied Mathematics and Computation*. 2014. Vol. 249. P. 24–31.

Надійшла до редакції 26.10.2017

В.М. Булавацький

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ ДЕЯКИХ РЕЛАКСАЦІЙНИХ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Анотація. Побудовано дробово-диференційні математичні моделі для опису динаміки геофільтраційних процесів за умов урахування явища релаксації тиску. Моделі базуються на поняттях узагальнених похідних Капуто та Хільфера як похідних дробового порядку від функції по іншій функції. У рамках вказаних моделей одержано аналітичні розв'язки деяких фільтраційних крайових задач включно з задачею з нелокальними граничними умовами.

Ключові слова: математичне моделювання, локально-нерівноважні процеси геофільтрації, дробово-диференційні математичні моделі, похідні Капуто та Хільфера, крайові задачі, нелокальні граничні умови.

V.M. Bulavatsky

MATHEMATICAL MODELS AND PROBLEMS OF FRACTIONAL-DIFFERENTIAL DYNAMICS OF SOME RELAXATIONAL FILTRATIONAL PROCESSES

Abstract. Fractional-differential mathematical models for describing the dynamics of geofiltration processes under pressure relaxation are constructed. The models are based on the concepts of the generalized Caputo and Hilfer derivatives, as derivatives of fractional order of a function with respect to another function. Within the framework of these models, analytical solutions of some filtration boundary-value problems inclusive with a problem with nonlocal boundary conditions are obtained.

Keywords: mathematical modelling, locally non-equilibrium processes of geofiltration, fractional-differential mathematical models, Caputo and Hilfer's derivatives, boundary-value problems, nonlocal boundary conditions.

Булавацкий Владимир Михайлович,
доктор техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: v_bulav@ukr.net.