

О ДВУХ ПОДХОДАХ К МОДЕЛИРОВАНИЮ И РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Аннотация. Рассмотрена задача упаковки выпуклых многогранников в параллелепипед минимального объема. Для аналитического описания отношений непересечения многогранников, допускающих непрерывные трансляции и повороты, использованы ϕ -функции или квази- ϕ -функции. Построена математическая модель в виде задачи нелинейного программирования, исследованы ее свойства. На основании общей стратегии решения предложено два подхода, учитывающие особенности ϕ -функций и квази- ϕ -функций. Приведены результаты сравнения эффективности этих подходов по значению функции цели и времени решения.

Ключевые слова: упаковка, выпуклые многогранники, ϕ -функция, квази- ϕ -функция, математическая модель, нелинейная оптимизация.

ВВЕДЕНИЕ

Оптимизационные задачи упаковки 3D-объектов являются частью теории исследования операций и имеют широкий спектр практических применений, например при решении современных задач биологии, минералогии, медицины, материаловедения, нанотехнологий, робототехники, в системах распознавания образов.

Актуальность решения таких задач состоит в том, что они позволяют заменить полномасштабные дорогостоящие эксперименты компьютерным моделированием реальных процессов и структур материалов. Это приводит к значительной экономии временных и финансовых ресурсов.

Например, инновационным применением задач размещения многогранников является трехмерное моделирование микроструктур различных материалов (включая наноматериалы). Последние достижения в этой области связаны с разработкой компьютерной технологии 3D томографического анализа минеральных частиц [1]. В [2] описывается применение задачи упаковки многогранников в порошковой металлургии. Так же данные задачи используются для эффективного решения проблемы утилизации опасных отходов и автоматизации процесса упаковки тиглей в производстве полупроводниковых пластин.

Задачи упаковки 3D-объектов являются NP-сложными и, как правило, для их решения используются различные эвристики.

Известные подходы к решению трехмерных задач упаковки можно разделить на следующие группы:

- эвристические методы (эвристики, основанные на релаксации информации о форме объектов [3], а также алгоритмы, а именно генетические [4], основанные на идее имитационного отжига [5], муравьиные [6] и использующие расширенный поиск по образцу [7]);
- традиционные методы линейной и нелинейной оптимизации [8];
- комбинированные подходы, использующие эвристики и методы математического программирования [9].

В работе [10] сделан вывод о том, что процесс решения задач упаковки сложных трехмерных объектов сводится к циклическому выполнению следующих шагов: формирование последовательности размещаемых объектов; формализация условий непересечения объектов с учетом их трансляции (параллельный перенос) и поворота, расположения на заданном расстоянии; вычисление целевой функции.

В большинстве работ, посвященных трехмерным упаковкам, не допускаются непрерывные вращения объектов. Например, в [11] используется только преобразование трансляции. В [12] предлагается алгоритм НАРЕЗD, который позволяет вращение многогранников вокруг каждой координатной оси дискретно на углы, кратные 45° .

В настоящей работе рассматривается сравнение двух подходов к решению задачи упаковки выпуклых многогранников (с учетом их непрерывных трансляций и вращений) в параллелепипеде минимального объема в зависимости от вида функций (либо *phi*-функции, либо квази-*phi*-функции [13]), используемых для моделирования ограничений непересечения многогранников.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется набор выпуклых многогранников K_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\} = I_n$, и прямой параллелепипед $\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq w, 0 \leq z \leq h\}$ с переменными размерами l, w, h . Каждый многогранник K_i задается координатами его вершин $p_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$, $j=1, \dots, m_i$, в собственной системе координат.

Для многогранника K_i введем следующие обозначения: G_i — множество граней g_{ij} , принадлежащих плоскостям $\{(x, y, z) : A_{ij}x + B_{ij}y + C_{ij}z + D_{ij} = 0\}$, $j \in I_{G_i}$; P_i — множество вершин $p_{ik} = (x_{ik}, y_{ik}, z_{ik})$, $k \in I_{P_i}$; T_i — множество ребер t_{il} , заданных парами вершин (p_{il_1}, p_{il_2}) , $l \in I_{T_i}$. Заметим, что $A_{ij} = A_{ij}(u_i)$, $B_{ij} = B_{ij}(u_i)$, $C_{ij} = C_{ij}(u_i)$, $D_{ij} = D_{ij}(u_i)$, $x_{ik} = x_{ik}(u_i)$, $y_{ik} = y_{ik}(u_i)$, $z_{ik} = z_{ik}(u_i)$.

Пусть $K_i = \{X = (x, y, z) \in R^3 : f_{ij}(X) = A_{ij}x + B_{ij}y + C_{ij}z + D_{ij} \leq 0, j \in I_{G_i}\}$.

Не теряя общности, полагаем, что центр собственной системы координат многогранника K_i совпадает с центром описанной вокруг него сферы S_i радиуса r_i .

Расположение и ориентация многогранника K_i определяются вектором его параметров размещения (v_i, θ_i) , где $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ — вектор трансляции, $\theta_i = (\theta_i^1, \theta_i^2, \theta_i^3)$ — вектор параметров вращения, $\theta_i^1, \theta_i^2, \theta_i^3$ — соответствующие углы вращения от оси OX к OY , от оси OY к OZ и от оси OX к OZ в локальной системе координат многогранника K_i соответственно.

Одновременная трансляция многогранника K_i на вектор v_i и его вращение на вектор θ_i определяется в виде

$$K_i(u_i) = \{p \in R^3 : p = v_i + M(\theta_i) \cdot p^0 \quad \forall p^0 \in K_i^0\},$$

где K_i^0 — нетранслированный и неповернутый многогранник K_i , $M(\theta_i) = M_1(\theta_i^1) \cdot M_2(\theta_i^2) \cdot M_3(\theta_i^3)$ — матрица поворота,

$$M_1(\theta_i^1) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i^1 & -\sin \theta_i^1 & 0 \\ \sin \theta_i^1 & \cos \theta_i^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_2(\theta_i^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_i^2 & -\sin \theta_i^2 \\ 0 & \sin \theta_i^2 & \cos \theta_i^2 \end{pmatrix}, \quad M_3(\theta_i^3) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i^3 & 0 & \sin \theta_i^3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_i^3 & 0 & \cos \theta_i^3 \end{pmatrix}.$$

Задача упаковки выпуклых многогранников состоит в размещении заданного набора непересекающихся выпуклых многогранников $K_i(u_i)$, $i \in I_n$, в параллелепипеде Ω минимального объема $F = l \cdot w \cdot h$.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ РАЗМЕЩЕНИЯ

Для построения математической модели в виде задачи нелинейного программирования необходимо аналитически описать ограничения непересечения многогранников K_1 и K_2 , $\text{int } K_1 \cap \text{int } K_2 = \emptyset$, и принадлежности многогранника K_1 области размещения Ω , $K_1 \subset \Omega \Leftrightarrow \text{int } K_1 \cap \Omega^* = \emptyset$, где $\Omega^* = R^3 \setminus \text{int } \Omega$. Для этого используются два вида непрерывных функций: *phi*-функции и квази-*phi*-функции, определения и свойства которых описаны в [14–18].

Построение *phi*-функций (нормализованных) для 3D-объектов является в общем случае сложной задачей. В настоящее время построены *phi*-функции для некоторых регулярных 3D-объектов [14, 19], включая шары, параллелепипеды, выпуклые многогранники.

Для многогранников $K_1(u_1)$ и $K_2(u_2)$, допускающих непрерывные трансляции и вращения, *phi*-функцию можно определить в следующем виде:

$$\Phi^{K_1 K_2}(u_1, u_2) = \max \{ \psi_i(u_1, u_2), i = 1, 2, 3 \},$$

где функция $\psi_1(u_1, u_2) = \max_{j \in I_{G_1}} \min_{k \in I_{P_2}} (A_{1j}x_{2k} + B_{1j}y_{2k} + C_{1j}z_{2k} + D_{1j})$ описывает

взаимодействие вершин многогранника $K_2(u_2)$ с гранями многогранника $K_1(u_1)$,

функция $\psi_2(u_1, u_2) = \max_{j \in I_{G_2}} \min_{k \in I_{P_1}} (A_{2j}x_{1k} + B_{2j}y_{1k} + C_{2j}z_{1k} + D_{2j})$ — взаимодей-

ствие вершин многогранника $K_1(u_1)$ с гранями многогранника $K_2(u_2)$, функция $\psi_3(u_1, u_2) = \max \{ \Psi^{ab}(u_1, u_2), a \in I_{T_1}, b \in I_{T_2} \}$ — взаимодействие ребер многогранника $K_1(u_1)$ с ребрами многогранника $K_2(u_2)$. Здесь

$$\Psi^{ab}(u_i, u_j) = \min \{ F_{12}^{ab}(p_{1o}(u_1), u_1, u_2), F_{12}^{ab}(p_{1k}(u_1), u_1, u_2),$$

$$F_{21}^{ba}(p_{2s}(u_2), u_1, u_2), F_{21}^{ba}(p_{2v}(u_2), u_1, u_2) \},$$

$$F_{12}^{ab}(x, y, z, u_1, u_2) = (x - x_{1o}(u_1))(x - x_{1k}(u_1))(x - x_{12}^{ab}(u_1, u_2)) +$$

$$+ (y - y_{1o}(u_1))(y - y_{1k}(u_1))(y - y_{12}^{ab}(u_1, u_2)) +$$

$$+ (z - z_{1o}(u_1))(z - z_{1k}(u_1))(z - z_{12}^{ab}(u_1, u_2)),$$

$$F_{21}^{ba}(x, y, z, u_1, u_2) = (x - x_{2s}(u_2))(x - x_{2v}(u_2))(x - x_{12}^{ba}(u_1, u_2)) +$$

$$+ (y - y_{2s}(u_2))(y - y_{2v}(u_2))(y - y_{12}^{ba}(u_1, u_2)) +$$

$$+ (z - z_{2s}(u_2))(z - z_{2v}(u_2))(z - z_{12}^{ba}(u_1, u_2)),$$

$p_{1o}(u_1)$, $p_{1k}(u_1)$ — вершины ребра a многогранника K_1 ; $p_{2s}(u_2)$, $p_{2v}(u_2)$ — вершины ребра b многогранника $K_2(u_2)$; $a_{12}^{ab}(u_1, u_2) = p_{1o}(u_1) - p_{2s}(u_2) + p_{2k}(u_2)$, $a_{12}^{ba}(u_1, u_2) = p_{2s}(u_2) - p_{1o}(u_1) + p_{1k}(u_1)$.

В целях расширения класса 3D-объектов, для которых можно построить математическую модель задачи упаковки в виде задачи нелинейного программирования (например, для эллипсоидов, конусов, цилиндров), в [14] введено понятие квази-*phi*-функции.

Для некоторых типов 3D-объектов (например, выпуклых многогранников) вид квази-*phi*-функций существенно проще, чем вид соответствующих *phi*-функций.

Однако в отличие от *phi*-функции квази-*phi*-функция зависит не только от вектора параметров размещения многогранников, но и от дополнительных переменных.

Квази-*phi*-функцию для многогранников $K_1(u_1)$ и $K_2(u_2)$, допускающих непрерывные трансляции и вращения, можно задать так [18]:

$$\Phi^{K_1K_2}(u_1, u_2, u_P) = \min \{ \Phi^{K_1P}(u_1, u_P), \Phi^{K_2P^*}(u_2, u_P) \},$$

где $u_P = (\theta_{xP}, \theta_{yP}, \mu_P)$ — вектор дополнительных переменных, определяющий параметры полуплоскости вида $P(u_P) = \{(x, y, z) : \psi_P = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \mu_P \leq 0\}$, $\alpha = \sin \theta_{yP}$, $\beta = -\sin \theta_{xP} \cdot \cos \theta_{yP}$, $\gamma = \cos \theta_{xP} \cdot \cos \theta_{yP}$; $\Phi^{K_1P}(u_1, u_P) = \min_{1 \leq i \leq m_1} \psi_P(p_{1i})$ — *phi*-функция для $K_1(u_1)$ и $P(u_P)$; $\Phi^{K_2P^*}(u_2, u_P) = \min_{1 \leq j \leq m_2} (-\psi_P(p_{2j}))$ — *phi*-функция для $K_2(u_2)$ и $P^*(u_P) = R^3 \setminus \text{int } P(u_P)$. Запомним, что $\max_{u_P} \Phi^{K_1K_2}(u_1, u_2, u_P)$ является *phi*-функцией для многогранников $K_1(u_1)$ и $K_2(u_2)$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

В общем случае математическую модель задачи упаковки выпуклых многогранников в кубоид минимального объема можно представить в виде

$$\min_{u \in W \subset R^\sigma} F(u), \quad (1)$$

$$W = \{u \in R^\sigma : f_{ij} \geq 0, f_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n, j > i\}, \quad (2)$$

где $F(u) = l \cdot w \cdot h$, f_{ij} — либо квази-*phi*-функция, либо *phi*-функция для многогранников K_i и K_j (описывающая условия непересечения многогранников K_i и K_j), f_i — *phi*-функция для многогранника K_i и объекта Ω^* (описывающая условия размещения многогранника K_i внутри параллелепипеда Ω).

Размерность вектора $u \in R^\sigma$ переменных задачи (1), (2) зависит от подхода, который используется при построении математической модели. В случае квази-*phi*-функций вектор переменных задачи определяется следующим образом: $u = (l, w, h, u_1, u_2, \dots, u_n, \tau) \in R^\sigma$, где (l, w, h) — переменные размеры (длина, ширина и высота) параллелепипеда Ω ; $u_i = (v_i, \theta_i) = (x_i, y_i, z_i, \theta_i^1, \theta_i^2, \theta_i^3)$ — вектор параметров размещения многогранника K_i , $i \in I_n$; $\tau = (u_P^1, \dots, u_P^m)$ — вектор дополнительных переменных; $u_P^k = (\theta_{xP}^k, \theta_{yP}^k, \mu_P^k)$ — дополнительные переменные для k -й пары многогранников, $k = 1, \dots, m$, $m = 0.5(n-1)n$. Таким образом, число переменных задачи (1), (2) в случае использования квази-*phi*-функций составляет $\sigma = 3 + 6n + 3m$, а в случае использования *phi*-функций — $\sigma = 3 + 6n$.

ОСОБЕННОСТИ ДВУХ РЕАЛИЗАЦИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ (1), (2)

Отметим некоторые отличительные особенности математической модели (1), (2), которые влияют на выбор метода решения задачи с использованием упомянутых средств математического моделирования.

1. Задача (1), (2) является точной математической моделью поставленной задачи оптимальной упаковки выпуклых многогранников и содержит все ее глобальные решения.

2. Область допустимых решений W вида (2) описывается с помощью n неравенств вида $f_i \geq 0$ и $\frac{1}{2}n(n-1)$ неравенств вида $f_{ij} \geq 0$. Функция f_i является мини-

мумом из $6m_i$ дифференцируемых функций, а f_{ij} — максиминной функцией в случае, когда f_{ij} есть *phi*-функция. Каждое неравенство $f_{ij} \geq 0$ можно представить в виде набора систем неравенств с дифференцируемыми функциями, включая g_i систем из m_j неравенств, g_j систем из m_i неравенств и $t_i \cdot t_j$ систем, состоящих из одного неравенства. В случае, если f_{ij} является квази-*phi*-функцией, то $f_{ij} \geq 0$ описывается системой из $m_i + m_j$ неравенств с дифференцируемыми функциями.

3. Использование метода *phi*-функций позволяет представить поставленную задачу в виде задачи негладкой оптимизации. Область допустимых решений описывается системой неравенств с максиминными функциями и имеет следующее свойство: $W = \bigcup_{q=1}^{\zeta} W_q$, где каждая из подобластей W_q определяется системой

неравенств с дифференцируемыми функциями. Таким образом, задачу (1), (2) можно представить в виде

$$F(u^*) = \min \{F(u^{*q}), q = 1, 2, \dots, \zeta\}, \quad (3)$$

где

$$F(u^{*q}) = \min_{u \in W_q} F(u). \quad (4)$$

В модели (3), (4) каждая подзадача вида (4) является многоэкстремальной задачей нелинейного программирования.

4. Область допустимых решений задачи (1), (2), построенная с использованием квази-*phi*-функций, описывается системой неравенств с дифференцируемыми функциями. В этом случае имеем невыпуклую задачу нелинейного программирования, для решения которой можно непосредственно применять современные решатели для глобальной и локальной оптимизации.

Например, для двух трехмерных симплексов, т.е. $m_1 = m_2 = m = 4$, задача (1), (2) в зависимости от вида функций f_{ij} в (2) сводится:

— к задаче размерности $\sigma = 18$ с областью допустимых решений W , которая описывается системой $6m + 6m + 2m = 56$ неравенств при использовании квази-*phi*-функций;

— к последовательности подзадач размерности $\sigma = 15$, в каждой из которых область допустимых решений W_q определяется либо с помощью $6m + 6m + m = 52$, либо $6m + 6m + 5 = 54$ неравенств при использовании *phi*-функций.

СТРАТЕГИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

С учетом свойств математической модели (1), (2) предлагается два метода решения поставленной задачи, в основе которых лежит стратегия мултистарта, состоящая из следующих этапов.

Этап 1. Поиск допустимых стартовых точек задачи (1), (2). Данный этап является общим для обоих подходов. Прежде всего выпуклые многогранники K_i покрываются шарами S_i минимальных радиусов r_i^* , $i \in I$. Для этого решается оптимизационная задача

$$r_i^* = \min_{(v_i, r_i) \in D_i \subset R^4} r_i, \quad (5)$$

где $D_i = \{(v_i, r_i) \in R^4: r_i^2 - (x_{ij} - x_i)^2 - (y_{ij} - y_i)^2 - (z_{ij} - z_i)^2 \geq 0, r_i \geq 0, j = 1, 2, \dots, m_i\}$.

В результате решения задачи (5) формируется вектор $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n$.

Далее выбираются достаточно большие размеры (l^0, w^0, h^0) контейнера Ω таким образом, чтобы заведомо гарантировалось размещение всех непересекающихся шаров $S_i, i \in I$, внутри этого контейнера. Размеры контейнера Ω фиксируются, а радиусы r_i шаров $S_i, i \in I$, принимаются переменными.

На следующем шаге решается задача нелинейного программирования вида

$$\max_{(v, r) \in G} \kappa(v, r) = \max_{(v, r) \in G} \sum_{i=1}^n r_i, \quad (6)$$

где

$$G = \{(v, r) \in R^{4n}, \Phi_{ij}^{SS}(v_i, v_j, r_i, r_j) \geq 0, i < j \in I, \Phi_i^S(v_i, r_i) \geq 0, r_i^* - r_i \geq 0, i \in I\}, \quad (7)$$

$$\Phi_{ij}^{SS}(v_i, v_j, r_i, r_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - (r_i + r_j)^2,$$

$$\Phi_i^S(v_i, r_i) = \min \{x_i - r_i, y_i - r_i, z_i - r_i, l^0 - x_i - r_i, w^0 - y_i - r_i, h^0 - z_i + r_i\}.$$

Задавая случайным образом точку (v^0, r^0) , $v^0 = (v_1^0, \dots, v_n^0)$, $v_i^0 \in \Omega^0 = \Omega(l^0, w^0, h^0)$, $r^0 = (r_1^0, \dots, r_n^0)$, $r_i^0 = 0, i \in I$, находим точку глобального максимума (v^*, r^*) задачи (6), (7). Заметим, что глобальный максимум всегда существует, поскольку размеры области выбираются заведомо достаточно большими.

Этап 2. Поиск локальных минимумов задачи (1), (2). Формируем точку $u^s = (v^s, \theta^s)$, где $v^s = v^*$, а вектор θ^s угловых параметров генерируется случайным образом. Осуществляем поиск локального минимума задачи (1), (2), стартуя из точки u^s .

Если используются квази-*phi*-функции, то для задачи (1), (2) непосредственно применяется процедура Local Optimisation Feasible Region Transformation (LOFRT), описанная в [18]. Предложенная процедура локальной оптимизации позволяет существенно сократить затраты вычислительных ресурсов (время и память) за счет декомпозиции задачи (1), (2) на последовательность подзадач нелинейного программирования с меньшим числом неравенств, а в случае применения квази-*phi*-функций — и меньшей размерности. Переходим к этапу 4.

Если используются *phi*-функции, то для каждой допустимой стартовой точки u^s формируется подобласть $W^s \subset W$, $u^s \in W^s$. Процедура LOFRT применяется для решения подзадач вида (4) на подобласти $W^s = W_q(u^s)$. Переход от одной подобласти к другой осуществляется с помощью алгоритма, описанного в [19].

Этап 3. Поиск приближения к глобальному минимуму задачи (1), (2). Если используются *phi*-функции, то выполняется процедура неполного направленного перебора локальных минимумов с применением алгоритма Jump [19].

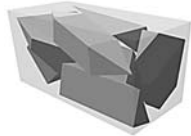
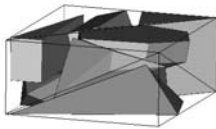

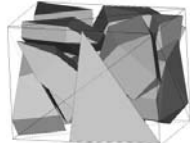

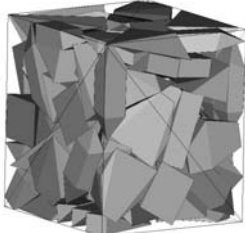
Этап 4. Перебор локальных минимумов. Лучший из полученных на предыдущих этапах локальных минимумов принимается в качестве приближенного решения задачи (1), (2).

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Вычислительные эксперименты выполнялись на компьютере AMD Athlon 64 X2 5200+. Для поиска локальных минимумов в задачах нелинейного программирования использовался решатель IPOPT [20]. Рассмотрим пример.

Пример 1. Имеются наборы многогранников при $n = 7$, $n = 12$ и $n = 98$ (n — количество многогранников) из работы [18, примеры 1, 2 и 4 соответственно]. Результаты решения задачи упаковки многогранников двумя подходами приведены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты решения задачи упаковки многогранников

Подходы к решению	Значение функции цели	Время	Локально оптимальное размещение многогранников
$n = 7$			
ϕ -функция	1837	370 с	
квази- ϕ -функция	1699	323 с	
$n = 12$			
ϕ -функция	3150	450 с	
квази- ϕ -функция	3131	410 с	
$n = 98$			
ϕ -функция	22623	7 ч	
квази- ϕ -функция	23113	41 ч	

Результаты вычислительных экспериментов позволяют сделать следующие выводы.

1. Для $n \leq 50$ полученные результаты незначительно отличаются по значению функции цели и времени решения.

2. Для задач бóльшей размерности ($n > 50$) время решения задачи с помощью подхода, основанного на использовании ϕ -функций, значительно меньше. Этот результат является следствием того, что в математической модели (1), (2), построенной с помощью ϕ -функций, не имеется вектора дополнительных переменных, что понижает размерность задачи на $3m$.

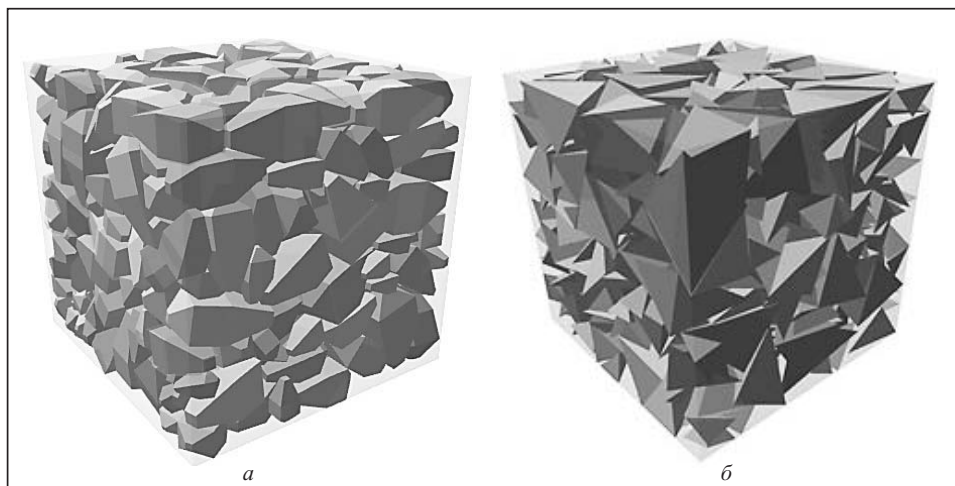


Рис. 1. Локально оптимальные размещения 400 выпуклых многогранников с 16 вершинами (а) и 500 выпуклых многогранников с тремя вершинами (б)

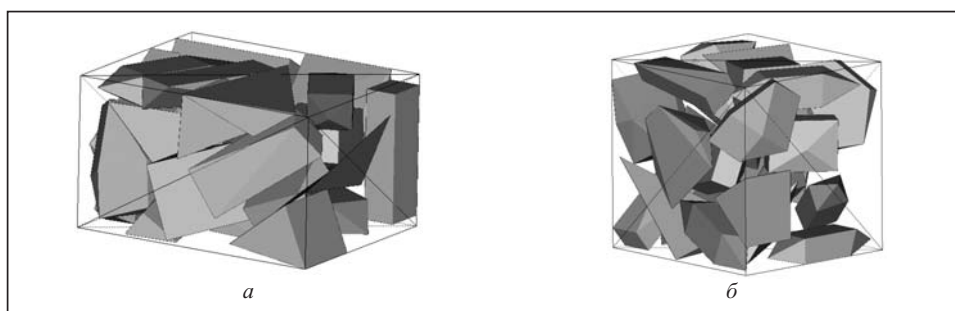


Рис. 2. Локально оптимальные размещения 25 выпуклых многогранников без учета минимально допустимых расстояний (а) и с учетом минимально допустимых расстояний (б)

3. Преимуществом подхода, основанного на использовании *phi*-функций, является возможность решать задачи для большого количества объектов за приемлемое время. На рис. 1, а, б показаны результаты размещения соответственно 400 и 500 выпуклых многогранников. Время решения задачи размещения 400 выпуклых многогранников с использованием *phi*-функций составило 30 ч. При применении подхода, основанного на квази-*phi*-функциях, для решения задачи устанавливалось ограничение 48 ч, в течение которого решение не было получено.

4. Преимуществом подхода, основанного на использовании квази-*phi*-функций, является возможность получить локально оптимальное размещение выпуклых многогранников с учетом заданных минимально допустимых расстояний [18, 21, 22]. На рис. 2 приведен пример размещения 25 многогранников с учетом заданных минимально допустимых расстояний. Кроме того, для решения задач нелинейного программирования можно непосредственно использовать современные NLP-солверы для поиска локальных и глобальных экстремумов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование квази-*phi*-функций вместо *phi*-функций позволяет значительно упростить аналитическое описание условий непересечения выпуклых многогранников и формализовать ограничения на минимально допустимые расстояния. Квази-*phi*-функции можно также применять для моделирования ограничений размещения в задачах упаковки различных трехмерных объектов, допускающих непрерывные вращения, для которых *phi*-функции являются слишком сложными

(например, невыпуклые многогранники) или не построены (например, эллипсоиды, цилиндры, конусы, сфероцилиндры). Однако использование квази- ϕ -функций имеет недостатки, связанные с введением дополнительных переменных, что значительно повышает размерность задачи. Для поиска эффективных решений задач упаковки выпуклых многогранников перспективным направлением является также выделение их комбинаторной структуры [23, 24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wang Y., Lin C.L., Miller J.D. 3D image segmentation for analysis of multisize particles in a packed particle bed. *Powder Technology*. 2016. Vol. 301. P. 160–168.
2. Korte A.C.J., Brouwers H.J.H. Random packing of digitized particles. *Powder Technology*. 2013. Vol. 233. P. 319–324.
3. Li S.X., Zhao J., Lu P., Xie Y. Maximum packing densities of basic 3D objects. *China Science Bulletin*. 2010. Vol. 55(2). P. 114–119.
4. Karabulut K., İnceğlü M. A hybrid genetic algorithm for packing in 3D with deepest bottom left with fill method. *Advances in Information Systems*. 2004. Vol. 3261. P. 441–450.
5. Pei Cao, Zhaoyan Fan, Robert Gao, Jiong Tang. A multi-objective simulated annealing approach towards 3D packing problems with strong constraints. *ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (August 02, 2015)*. 2015. Vol. 2A: 41st Design Automation Conference, V02AT03A052. DOI: 10.1115/DETC2015-47670.
6. Guangqiang L., Fengqiang Z., Rubo Z., Du Jialu Du., Chen G., Yiran Z. A parallel particle bee colony algorithm approach to layout optimization. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*. 2016. Vol. 13, N 7. P. 4151–4157.
7. Torczon V., Trosset M. From evolutionary operation to parallel direct search: Pattern search algorithms for numerical optimization. *Computing Science and Statistics*. 1998. Vol. 29. P. 396–401.
8. Birgin E.G., Lobato R.D., Martinez J.M. Packing ellipsoids by nonlinear optimization. *Journal of Global Optimization*. 2016. Vol. 65, Iss. 4. P. 709–743.
9. Fasano G.A. Global optimization point of view for non-standard packing problems. *Journal of Global Optimization*. 2013. Vol. 55, Iss. 2. P. 279–299.
10. Verkhoturov M., Petunin A., Verkhoturova G., Danilov K., Kurennov D. The 3D object packing problem into a parallelepiped container based on discrete-logical representation. *IFAC-PapersOnLine*. 2016 Vol. 49, N 12. P. 001–005.
11. Egeblad J., Nielsen B.K., Odgaard A. Fast neighborhood search for two- and three-dimensional nesting problems. *European Journal of Operations Research*. 2007. Vol. 183, Iss. 3. P. 1249–1266.
12. Liu X., Liu J., Cao A. HAPE3D — a new constructive algorithm for the 3D irregular packing problem. *Frontiers Inf. Technol. Electronic Eng.* 2015. Vol. 16. P. 380–390.
13. Stoyan Y., Romanova T. Mathematical models of placement optimisation: Two- and three-dimensional problems and applications. *Springer Optimization and Its Applications*. 2013. Vol. 73. P. 363–388.
14. Stoyan Y.G., Romanova T., Pankratov A., Chugay A. Optimized object packings using quasi- ϕ -functions. *Springer Optimization and Its Applications*. 2015. Vol. 105. P. 265–293.
15. Stoyan Y., Chugay A. Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes. *Cybernetics and System Analysis*. 2012. Vol. 48, N 6. P. 837–845.
16. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T. Quasi- ϕ -functions and optimal packing of ellipses. *Journal of Global Optimization*. 2016. Vol. 65, Iss. 2. P. 283–307.
17. Stoyan Y.G., Chugay A.M. Packing different cuboids with rotations and spheres into a cuboid. *Advances in Decision Sciences*. 2014. Vol. 2014. Article ID 571743, 19 p. DOI: [http:// dx.doi.org/10.1155/2014/571743](http://dx.doi.org/10.1155/2014/571743).
18. Romanova T., Bennell J., Stoyan Y., Pankratov A. Packing of concave polyhedra with continuous rotations using nonlinear optimisation. *European Journal of Operational Research*. 2018. Vol. 268, Iss. 1. P. 37–53.
19. Stoyan Y.G., Semkin V.V., Chugay A.M. Modeling close packing of 3D objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 2. P. 296–304.
20. Wächter A., Biegler L.T. On the implementation of an interior-pointfilter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*. 2006. Vol. 106, Iss. 1. P. 25–57.

21. Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A., Kovalenko A., Stetsyuk P. Balance layout problems: mathematical modeling and nonlinear optimization. *Space Engineering. Modeling and Optimization with Case Studies. Springer Optimization and its Applications*. Fasano G., J.Pintér (Eds.). New York: Springer, 2016. Vol. 114, XV. P. 369–400.
22. Pankratov A., Romanova T., Stoian Y., Chugay A. Problem of optimization packing of polytopes within spherical and cylindrical containers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2016. N 1. P. 39–47
23. Yakovlev S.V. The method of artificial dilation in problems of optimal packing of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 5. P. 725–731.
24. Гребенник И.В., Коваленко А.А., Романова Т.Е., Уряева И.А., Шеховцов С.Б. Комбинаторные конфигурации в оптимизационных задачах балансной компоновки. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 2. С. 55–67.

Надійшла до редакції 11.10.2017

Ю.Є. Стоян, А.М. Чугай, О.В. Панкратов, Т.Є. Романова
ПРО ДВА ПІДХОДИ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПАКУВАННЯ
ОПУКЛИХ БАГАТОГРАННИКІВ

Анотація. Розглянуто задачу пакування опуклих багатогранників у паралелепіпеді мінімального об'єму. Для аналітичного опису відношень неперетинання багатогранників, що допускають безперервні трансляції та повороти, використано *phi*-функції або квазі-*phi*-функції. Побудовано математичну модель у вигляді задачі нелінійного програмування та досліджено її властивості. На базі загальної стратегії розв'язання задачі запропоновано два підходи, що враховують особливості *phi*-функцій і квазі-*phi*-функцій. Наведено результати порівняння ефективності цих підходів за значенням функції цілі та часу розв'язання.

Ключові слова: пакування, опуклі багатогранники, *phi*-функція, квазі-*phi*-функція, математична модель, нелінійна оптимізація.

Y.E. Stoian, A.M. Chugay, A.V. Pankratov, T.E. Romanova
ON TWO APPROACHES TO MODEL AND SOLVE THE PACKING PROBLEM
FOR CONVEX POLYTOPES

Abstract. We consider the packing problem for convex polytopes in a cuboid of minimum volume. To describe analytically the non-overlapping constraints for convex polytopes that allow continuous translations and rotations, we use *phi*-functions and quasi-*phi*-functions. We provide an exact mathematical model in the form of an NLP-problem and analyze its characteristics. Based on the general solution strategy, we propose two approaches that take into account peculiarities of *phi*-functions and quasi-*phi*-functions. Computational results to compare the efficiency of our approaches are given with respect to both the value of the objective function and runtime.

Keywords: packing, convex polytopes, *phi*-function, quasi-*phi*-function, mathematical model, nonlinear optimization.

Стоян Юрий Евгеньевич,
аспирант Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков,
e-mail: urikpostg@gmail.com.

Чугай Андрей Михайлович,
кандидат техн. наук, старший научный сотрудник Института проблем машиностроения
им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, e-mail: chugay@ipmach.kharkov.ua.

Панкратов Александр Викторович,
доктор техн. наук, старший научный сотрудник Института проблем машиностроения
им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, e-mail: pankratov2000@yahoo.com.

Романова Татьяна Евгеньевна,
доктор техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института проблем машиностроения
им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, e-mail: sherom@kharkov.ua.