УДК 517.9

С. М. Чуйко

Нетерова краевая задача в особом критическом случае

(Представлено академиком НАН Украины А. М. Самойленко)

We study the problem of finding the existence conditions and the construction of solutions of weakly nonlinear Noetherian boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. We consider the particular critical case where the equation for generating amplitudes is satisfied identically. We give a new classification of the critical cases and an iterative algorithm for the construction of the solutions of Noetherian weakly nonlinear boundary-value problems in a particular critical case.

Исследуем задачу о построении решения

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}(z_1(t,\varepsilon),\dots,z_n(t,\varepsilon)),$$

$$z_i(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \qquad z_i(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \qquad i = 1,2,\dots,n,$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 2]

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \tag{1}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{2}$$

Решение нетеровой ($m \neq n$) задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$\frac{dz_0}{dt} = A(t)z_0 + f(t), \tag{3}$$

$$\ell z_0(\cdot) = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{4}$$

Здесь $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица и $f(t)$ — n-мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a,b]$ действительные функции, $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал вида $\ell z(\cdot) = \mathrm{col}(\ell_1 z(\cdot),\dots,\ell_m z(\cdot))$, где $\ell_1 z(\cdot),\dots,\ell_m z(\cdot)\colon C[a,b] \to \mathbb{R}^1$ — линейные ограниченные функционалы. Нелинейности $Z(z,t,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ задачи (1), (2) предполагаем дважды непрерывно дифференцируемыми по неизвестной z в малой окрестности порождающего решения и по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля. Кроме того, считаем вектор-функцию $Z(z,t,\varepsilon)$ непрерывной по независимой переменной t на отрезке $[a,b]$. Исследован критический случай ($P_{Q^*} \neq 0$), причем предполагается выполненным условие

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} = 0; \tag{5}$$

в этом случае порождающая задача (3), (4) имеет $(r = n - n_1)$-параметрическое семейство решений $z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s);\alpha](t)$, $c_r \in \mathbb{R}^r$. Здесь $X(t)$ — нормальная ($X(0) = I_n$)

фундаментальная матрица однородной части системы (3), $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1$, $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r} — $(n \times r)$-матрица, составленная из r линейно независимых столбцов $(n \times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q\colon \mathbb{R}^n \to N(Q)$, $P_{Q_r^*}$ — $(r \times n)$-матрица, составленная из r линейно независимых строк $(n \times n)$-матрицы-ортопроектора $P_{Q^*}\colon \mathbb{R}^n \to \to N(Q^*)$, $G[f(s);\alpha](t) = K[f(s)](t) - X(t)Q^+\ell K[f(s)](\cdot)$ — обобщенный оператор Грина краевой задачи (3), (4),

$$K[f(s)](t) = X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(s)f(s)\,ds\text{ —}$$

оператор Грина задачи Коши для системы (3), Q^+ — псевдообратная матрица по Муру–Пенроузу [1]. Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (3), (4) имеет вид

$$P_{Q_d^*}\{J(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K[Z(z_0(s,c_r) + x(s,\varepsilon), s, \varepsilon)](\cdot)\} = 0. \tag{6}$$

Искомое решение задачи (1), (2) $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon)$ ищем в окрестности решения порождающей задачи (3), (4), известного с точностью до вектора $c_r \in \mathbb{R}^r$, для нахождения которого переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$ в равенстве (6)

$$F_0(c_r) = P_{Q_d^*}\{J(z_0(\cdot,c_r),0) - \ell K[Z(z_0(s,c_r),s,0)](\cdot)\} = 0. \tag{7}$$

Традиционно это условие используют для нахождения параметра $c_r^* \in \mathbb{R}^r$, отвечающего за амплитуду порождающего решения, однако это не всегда возможно, поскольку в ряде случаев [3, 4] последнее равенство выполняется тождественно:

$$F_0(c_r) = P_{Q_d^*}\{J(z_0(\cdot,c_r),0) - \ell K[Z(z_0(s,c_r),s,0)](\cdot)\} \equiv 0. \tag{8}$$

Краевые задачи (1), (2) при условии (8) по классификации И. Г. Малкина [3, с. 139] представляют особый критический случай, поскольку традиционная схема анализа и построения решения [1, 2] для таких задач не применима в силу невозможности нахождения параметра c_r^*, отвечающего за амплитуду порождающего решения, непосредственно из уравнения (7). Для нахождения возмущения

$$x(t,\varepsilon) = \operatorname{col}(x_1(t,\varepsilon),\ldots,x_n(t,\varepsilon)),$$

$$x_j(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \qquad x_j(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \qquad x(t,0) \equiv 0, \qquad j = 1,2,\ldots,n,$$

порождающего решения $z_0(t,c_r)$ получаем задачу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \tag{9}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{10}$$

Формально, решение задачи (9), (10) представимо в виде

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{11}$$

где

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(z_0(s,c_r) + x(s,\varepsilon), s, \varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)](t).$$

Произвольный вектор

$$c_r(\varepsilon) = \mathrm{col}(c_r^{(1)}(\varepsilon), \ldots, c_r^{(r)}(\varepsilon)),$$
$$c_r^{(j)}(\cdot) \in C^1[0, \varepsilon_0], \qquad c_r(0) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, r.$$

В окрестности порождающего решения имеет место разложение

$$Z(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \\ = Z(z_0(t, c_r), t, 0) + dZ(z_0(t, c_r), t, 0) + \varepsilon R_3(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon). \tag{12}$$

Дифференциал вектор-функции $dZ(z_0(t, c_r), t, 0) = A_1(t)x + \varepsilon A_3(t)$ выражается через производные

$$A_1(t) = \frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r)\\ \varepsilon=0}}, \qquad A_3(t) = \frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r)\\ \varepsilon=0}}.$$

Аналогично выделяем первый дифференциал этого функционала и член $J(z_0(\cdot, c_r), 0) = = J(z(\cdot, 0), 0)$ нулевого порядка по ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$J(z_0(\cdot, c) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r), 0) + dJ(z_0(\cdot, c_r), 0) + \varepsilon J_3(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \tag{13}$$

Дифференциал векторного функционала $dJ(z_0(\cdot, c_r), 0) = \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r), 0)$ выражается через производные (по Фреше)

$$\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) = \frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r)\\ \varepsilon=0}} \qquad \text{и} \qquad \ell_3(z_0(\cdot, c_r), 0) = \frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r)\\ \varepsilon=0}}.$$

С учетом представления (11) и разложений (12), (13) в особом критическом случае необходимое и достаточное условие (6) разрешимости задачи (1), (2) принимает вид

$$P_{Q_d^*}\{\ell_1[X_r(\cdot)c_r + x^{(1)}(\cdot, \varepsilon)] + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r), 0) + \varepsilon J_3(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ - \ell K[A_1(s)[X_r(s)c_r + x^{(1)}(s, \varepsilon)] + \varepsilon A_3(s) + \varepsilon R_3(z_0(s, c_r) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)](\cdot)\} = 0. \tag{14}$$

Поскольку в особом критическом случае равенство (8) удовлетворяется тождественно, постольку ключевая в традиционной схеме анализа и построения решений матрица

$$B_0 = \frac{\partial F_0(c_r)}{\partial c_r} = P_{Q_d^*}\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K[A_1(s)X_r(s)](\cdot)\} \equiv 0.$$

Полученное равенство упрощает условие (14)

$$P_{Q_d^*}\big\{\ell_1 G[Z(z_0, s, 0) + dZ(z_0, s, 0) + \varepsilon R_3(z_0 + x, s, \varepsilon); J(z_0(\cdot, c_r), 0) + dJ(z_0, 0) + \\ + \varepsilon J_3(z_0 + x, \varepsilon)](\cdot) + \ell_3(z_0(\cdot, c_r), 0) + J_3(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ - \ell K[A_1(s)G[Z(z_0, \tau, 0) + dZ(z_0, \tau, 0) + \varepsilon R_3(z_0 + x, \tau, \varepsilon); J(z_0(\cdot, c_r), 0) + \\ + dJ(z_0(\cdot, c_r), 0) + \varepsilon J_3(z_0 + x, \varepsilon)](s) + A_3(s) + R_3(z_0(s, c_r) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)](\cdot)\big\} = 0.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, приходим к необходимому условию существования искомого решения

$$F_1(c_r) = P_{Q_d^*}\{\ell_1 G[Z(z_0(s,c_r),s,0); J(z_0(\cdot,c_r),0)](\cdot) + \ell_3(z_0(\cdot,c_r),0) -$$
$$- \ell K[A_1(s)G[Z(z_0(\tau,c_r),\tau,0); J(z_0(\cdot,c_r),0)](s) + A_3(s)](\cdot)\} = 0. \qquad (15)$$

В особом критическом случае данное требование представляет уравнение относительно вектор-столбца $c_r \in \mathbb{R}^r$, таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма. *Пусть выполнено условие* (5) *разрешимости порождающей задачи* (3), (4) *и краевая задача* (1), (2) *представляет особый критический случай*

$$P_{Q^*} \neq 0, \qquad F_0(c_r) \equiv 0.$$

Предположим также, что задача (1), (2) *имеет решение*

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}(z_1(t,\varepsilon),\ldots,z_n(t,\varepsilon)), \qquad z_i(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b],$$
$$z_i(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t,0) = z_0(t,c_r^*)$. *Тогда вектор* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ *удовлетворяет уравнению* (15).

Корни уравнения (15) определяют амплитуду порождающего решения, в малой окрестности которого в особом критическом случае могут существовать искомые решения исходной задачи (1), (2). Если же уравнение (15) не имеет действительных корней, то исходная задача (1), (2) в особом критическом случае не имеет искомых решений. Предположим, что уравнение (15) не вырождается в тождество и имеет действительный корень $c_r^* \in \mathbb{R}^r$. Искомое решение исходной задачи (1), (2) ищем в окрестности порождающего решения $z_0(t,c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G[f(s);\alpha](t)$.

Достаточным условием существования искомого решения в особом критическом случае является простота корней ($P_{\Xi_0^*} = 0$) уравнения для порождающих амплитуд (15), где

$$\Xi_0 = \frac{\partial F_1(c_r^*)}{\partial c_r} = P_{Q_d^*}\{\ell_1 G[A_1(s)X_r(s); \ell_1 X_r(\cdot)](\cdot) + \ell_4 X_r(\cdot) + 2\ell_5(\cdot, G[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0);$$
$$J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](\cdot))X_r(\cdot) - \ell K[A_1(s)G[A_1(\tau)X_r(\tau); \ell_1 X_r(\cdot)](s) + A_4(s)X_r(s) +$$
$$+ 2A_5(s, G[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](s))X_r(s)](\cdot)\} -$$

$(d \times r)$-матрица,

$$A_4(t) = \frac{\partial^2 Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z \partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}, \qquad A_5(t,x(t,\varepsilon)) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}x\right]\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} -$$

$(n \times n)$-матрицы,

$$\ell_4 x(\cdot,\varepsilon) = \frac{\partial^2 J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z \partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}},$$
$$\ell_5(\cdot, x(\cdot,\varepsilon))x(\cdot,\varepsilon) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}x(\cdot,\varepsilon)\right]\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} -$$

линейные функционалы, представляющие собой производные по Фреше, $P_{\Xi_0^*}$ — ортопроектор матрицы Ξ_0^*: $P_{\Xi_0^*}\colon \mathbb{R}^d \to N(\Xi_0^*)$. Пусть $\operatorname{rank} P_{\Xi_0} = \rho_2$; здесь $P_{\Xi_0}\colon \mathbb{R}^r \to N(\Xi_0)$ — $(r \times r)$-матрица-ортопроектор. Обозначим P_{ρ_2} $(r \times \rho_2)$-матрицу, составленную из ρ_2 линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора P_{Ξ_0}.

Теорема. *Пусть выполнено условие* (5) *разрешимости порождающей задачи* (3), (4) *и краевая задача* (1), (2) *представляет особый критический случай* $P_{Q^*} \neq 0$, $F_0(c_r) \equiv 0$. *Тогда для каждого корня* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ *уравнения* (15) *для порождающих амплитуд* $(F_1(c_r^*) = 0)$ *при условии* $P_{\Xi_0^*} = 0$ *задача* (1), (2) *имеет* ρ_2*-параметрическое семейство решений, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t, 0) = z_0(t, c_r^*)$. *Решение краевой задачи* (1), (2) $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)$ *может быть найдено при помощи итерационной процедуры типа* [5].

В случае периодической задачи матрица Ξ_0 совпадает с производной уравнения для порождающих амплитуд (15), использованной И. Г. Малкиным [3] для доказательства аналогичной теоремы. В случае задач фредгольмова типа $m = n$, следовательно, $d = r$ и требование $P_{\Xi_0^*} = 0$ становится равносильным условию невырожденности матрицы Ξ_0. В свою очередь, невырожденность матрицы Ξ_0 эквивалентна простоте корня c_r^* уравнения (15) для порождающих амплитуд.

Длина отрезка $[0, \varepsilon_*]$, на котором сохраняется сходимость этой итерационной процедуры, может быть оценена как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова, так и аналогично [6], из условия сжимаемости оператора, определяющего итерационную процедуру.

В качестве иллюстрации анализа краевой задачи (1), (2) в особом критическом случае может служить исследование периодической задачи для известного уравнения [3, 7], описывающее движение маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания большой частоты, приведенное в [5].

Утверждение доказанной теоремы является естественным дополнением к традиционной [1, 3] классификации краевых задач и может быть перенесено на нелинейные автономные краевые задачи и краевые задачи с импульсным воздействием в особом критическом случае [8, 9].

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 p.
2. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – Москва: Наука, 1979. – 432 с.
3. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
4. *Мерман Г. А.* Новый класс периодических решений в ограниченной задаче трех тел и в задаче Хилла // Тр. Ин-та теорет. астрономии АН СССР. – 1952. – Вып. 1. – С. 5–86.
5. *Бойчук А. А., Чуйко С. М., Чуйко А. С.* Неавтономные периодические краевые задачи в особом критическом случае // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, № 1. – С. 53–66.
6. *Чуйко А. С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания. – 2005. – **8**, № 2. – С. 278–288.
7. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1951. – **21**, № 5. – С. 499–597.
8. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. – 1992. – № 10. – С. 1668–1674.
9. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Там же. – 2001. – **37**, № 8. – С. 1132–1135.

Славянский государственный педагогический университет

Поступило в редакцию 14.07.2006