

## ЛОГАРИФМІЧНА ОБРОБКА ЗОБРАЖЕНЬ. ЧАСТИНА 2: УЗАГАЛЬНЕНА МОДЕЛЬ

New algebraic structure, which presents generalized basic model for logarithmic image processing, is described. In this structure interval  $(-M, M)$  is a set of pixel gray levels. Operations of addition and multiplication by real scalar are defined for this interval. The set of gray levels with these operations creates real vector space. New structure generalizes also known models of Jourlin–Pinoli and Pătrașcu over the use of parametric representation.

Описано нову алгебраїчну структуру для узагальненої базової моделі логарифмічної обробки зображень. У ній множину рівнів сірого елемента зображення розглянуто на проміжку  $(-M, M)$ . Для нього означено операції додавання та множення на дійсну скалярну величину. З цими операціями множина рівнів сірого утворює дійсний векторний простір. Нова структура через параметричне представлення узагальнює також відомі моделі Jourlin–Pinoli та Pătrașcu.

Сьогодні зображення стали одним з основних засобів отримання інформації про фізичні явища, стан середовищ, вид об'єктів, елементів сцен тощо. Проте умови їх реєстрації не завжди є оптимальними через можливе надмірне або ж, навпаки, недостатнє освітлення. Ці фактори спричиняють реєстрацію зображень дуже світлими чи надто темними. Тому завдання поліпшення якості зображень є актуальним, незважаючи на значний прогрес у розвитку апаратних засобів реєстрації зображень. Для його розв'язання використовують різні методи опрацювання зображень як у просторовій, так і у частотній областях [2, 5, 12, 14]. Проте більш раціональним є використання моделі об'єкта сприйняття зображень [6, 7, 13, 21, 22, 25, 36], для якої математичні операції відображають притаманні їй властивості. Такий підхід опосередковано запропонував 1965 р. Oppenheim [26], побудувавши алгебраїчну модель систем опрацювання сигналів у вигляді гомоморфної фільтрації [27]. Він використовував принцип суперпозиції та узагальненого додавання. Розвиваючи цей підхід, ми побудували алгебраїчну модель, яка узагальнює відомі моделі логарифмічного оброблення зображень (ЛОЗ) [15–17, 21–24, 28–35] включно з базовою моделлю [1], завдяки параметричному керуванню її функціональними можливостями. Розглянемо стисло основні відомі моделі логарифмічної обробки зображень.

**1. Основні моделі логарифмічної обробки зображень.** В обробку зображень термін ЛОЗ (англомовна версія – LIP) був введений роботами Jourlin та Pinoli, починаючи з 1985 р. [21–24, 33–35]. У них модель ЛОЗ реалізовувалася поелементною операцією додавання рівнів сірого елементів двох зображень  $u$  та  $v$

$$u \oplus v = u + v - \frac{u \cdot v}{M}, \quad (1)$$

операцією множення на скаляр  $\alpha \otimes u$  за формулою

$$\alpha \otimes u = M - M \left( 1 - \frac{u}{M} \right)^\alpha, \quad (2)$$

та операцією віднімання

$$u \ominus v = M \frac{u - v}{M - v}. \quad (3)$$

Недоліком цього підходу є те, що, незважаючи на декларацію, що область визначення рівнів сірого є інтервал  $(-\infty, M)$ , де  $M > 0$ , для нього правило додавання від'ємних чисел та чисел з різними знаками не встановлене, правило віднімання від'ємних чисел та чисел з різними знаками не приведене, а множення на скаляр (2) розглядалося тільки для додатних дійсних чисел  $\alpha > 0$ . У роботі [1] описано побудовану нами базову модель ЛОЗ, яка усуває зазначені вище недоліки. Для цього використане лінійне перетворення рівнів сірого з проміжку  $[0, M]$  в проміжок  $(-M, M)$ . Для множини рівнів сірого  $E = (-M, M)$  побудовано універсальну алгебру з двома бінарними операціями типу  $\langle 2, 2 \rangle$  [4, 9], чи як її ще називають алгебраїчну структуру [8] дійсного векторного простору [3, 10, 11] з означеними в ньому додаванням  $\langle + \rangle_1$ , множенням на дійсний скаляр  $\langle \times \rangle_1$  та скалярним добутком  $(\cdot \cdot)_E$ , завдяки чому сформовано евклідов простір рівнів сірого. Описана алгебра оперує з дійсними числами різних знаків. При цьому для  $E = (-M, M)$ , де  $M > 0$ ,  $\forall u, v \in E$  поелементна операція додавання реалізується за виразом

$$u \langle + \rangle_1 v = \text{sign}(u + v) \cdot M \cdot \left( 1 - \left( \left( 1 - \frac{|u|}{M} \right)^{\text{sign}(u)} \cdot \left( 1 - \frac{|v|}{M} \right)^{\text{sign}(v)} \right)^{\text{sign}(u+v)} \right), \quad (4)$$

де

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0, \end{cases}$$

а  $\forall \alpha \in R$  та  $\forall u, v \in E$  операція множення вектора на скаляр описується виразом

$$\alpha \langle \times \rangle_1 u = \text{sign}(\alpha \cdot u) \cdot M \cdot \left( 1 - \left( 1 - \frac{|u|}{M} \right)^{|\alpha|} \right), \quad (5)$$

Водночас множина  $E$  безпосередньо є векторним простором  $(E; \langle + \rangle_1, \langle \times \rangle_1)$  над полем дійсних чисел  $R$ . Побудованій векторній структурі властивий ізоморфізм  $\varphi_1 : E \rightarrow R$ :

$$\varphi_1 : u \rightarrow \varphi_1(u) = -M \cdot \ln \left( \left( 1 - \frac{|u|}{M} \right)^{\text{sign}(u)} \right). \quad (6)$$

Відома також інша модель ЛОЗ Pătrașcu [28–32], яка теж є універсальною алгеброю з двома бінарними операціями типу  $\langle 2, 2 \rangle$ . Вона оперує з дійсними числами різних знаків  $E = (-M, M)$ , де  $M > 0$ ,  $\forall u, v \in E$  і для поелементного додавання зображень використовує вираз

$$u \langle + \rangle_2 v = \frac{u + v}{1 + u \cdot v / M^2}, \quad (7)$$

а для операції множення вектора на скаляр  $\forall \alpha \in R$ :

$$\alpha \langle \times \rangle_2 u = M \cdot \frac{(M + u)^\alpha - (M - u)^\alpha}{(M + u)^\alpha + (M - u)^\alpha}. \quad (8)$$

Така векторна структура  $(E; \langle + \rangle_2, \langle \times \rangle_2)$  (7)–(8) характеризується ізоморфізмом

$$\varphi_2 : u \rightarrow \varphi_2(u) = -\frac{M}{2} \cdot \ln \left( \frac{M + u}{M - u} \right) \quad \forall u \in E. \quad (9)$$

Значимо, що для додатних значень  $u$  та  $v$  функція (7) відома ще як сума Ейнштейна; при  $M = 1$  – як частковий випадок параметричної трикутної  $s$ -норми Гамахера [19] зі значенням параметра управління, рівним 2; водночас для  $F=(-1, 1)$ ,  $\forall u, v \in F$  – як правило додавання контрастів [7].

Оскільки ізоморфізм обох моделей (6) та (9) має логарифмічну природу, то постає питання їх об'єднання. Адже відомо також, що закон Вебера–Фехнера справджується тільки у невеликому діапазоні, а закон контрастного сприйняття світла [6] розглядає його як перше наближення. Тому доцільним є створення такої параметричної моделі ЛОЗ, яка могла би змінювати свої характеристики під впливом зміни значень керуючих параметрів. З огляду на це метою роботи є побудова параметричної моделі ЛОЗ, яка би узагальнювала відомі моделі Jourlin–Pinoli [21], базову [1] та Pătraşcu [28].

## 2. Узагальнена модель логарифмічної обробки зображень для дійсного векторного простору рівнів сірого їх елементів

Доведемо лему, а потім на її основі теорему.

**Лема.** Множина  $E = (-M, M)$ , де  $M > 0$ , з операцією додавання  $\langle + \rangle_g$ :

$$\forall u, v \in E$$

$$u \langle + \rangle_g v \stackrel{def}{=} \text{sign}(u+v) \cdot \frac{|u+v| + (1-k) \cdot (g-2) \cdot u \cdot v / M}{1 + (g-1) \cdot u \cdot v / M^2 + k \cdot (g-2) \cdot \min(|u|, |v|) / M}, \quad (10)$$

де  $g > 0$ ,

$$k = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \hat{=} \text{sign}(u) = \text{sign}(v), \\ 1, & \text{якщо } \hat{=} \text{sign}(u) = -\text{sign}(v), \end{cases}$$

утворює адитивну абелеву групу  $G_g = (E; \langle + \rangle_g)$ .

**Доведення.** Для адитивної абелевої групи мають справджуватися такі аксіоми:

- додавання комутативне;
- додавання асоціативне;
- в множині  $E$  існує однозначний нульовий елемент  $e$ ;
- кожному елементу  $u$  множини  $E$  відповідає однозначно визначений протилежний елемент  $z$ .

Тому покажемо, що для операції додавання  $u \langle + \rangle_g v$  (10) справджуються зазначені вище аксіоми:

2.1. Додавання комутативне:

$$\begin{aligned} u \langle + \rangle_g v &= \text{sign}(u+v) \cdot \frac{|u+v| + (1-k) \cdot (g-2) \cdot u \cdot v / M}{1 + (g-1) \cdot u \cdot v / M^2 + k \cdot (g-2) \cdot \min(|u|, |v|) / M} = \\ &= \text{sign}(v+u) \cdot \frac{|v+u| + (1-k) \cdot (g-2) \cdot v \cdot u / M}{1 + (g-1) \cdot v \cdot u / M^2 + k \cdot (g-2) \cdot \min(|v|, |u|) / M} = v \langle + \rangle_g u. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.2. Додавання асоціативне:

Розіб'ємо формулу (10) на дві частини:

а) для  $k = 0$  з формули (10) отримуємо

$$u \langle + \rangle_g v = \text{sign}(u+v) \cdot \frac{|u+v| + (g-2) \cdot u \cdot v / M}{1 + (g-1) \cdot u \cdot v / M^2}. \quad (11)$$

Враховуючи, що при  $k = 0$   $\text{sign}(u) = \text{sign}(v)$ , для (11) можемо записати

$$(u\langle+\rangle_g v)\langle+\rangle_g w = \left( \text{sign}(u+v) \cdot \frac{u+v+(g-2)\cdot u\cdot v/M}{1+(g-1)\cdot u\cdot v/M^2} \right) \langle+\rangle_g w =$$

$$= \text{sign}(u) \cdot \frac{u+v+w+(g-2)\cdot(u\cdot v+u\cdot w+v\cdot w)/M+((g-1)+(g-2)^2)\cdot u\cdot v\cdot w/M^2}{1+(g-1)\cdot(u\cdot v+u\cdot w+v\cdot w)/M^2+(g-1)\cdot(g-2)\cdot u\cdot v\cdot w/M^3} \quad (12)$$

З другого боку

$$u\langle+\rangle_g (v\langle+\rangle_g w) =$$

$$= \text{sign}(u) \cdot \frac{u+v+w+(g-2)\cdot(u\cdot v+u\cdot w+v\cdot w)/M+((g-1)+(g-2)^2)\cdot u\cdot v\cdot w/M^2}{1+(g-1)\cdot(u\cdot v+u\cdot w+v\cdot w)/M^2+(g-1)\cdot(g-2)\cdot u\cdot v\cdot w/M^3} \quad (13)$$

З порівняння (12) і (13) випливає, що  $u\langle+\rangle_g (v\langle+\rangle_g w) = (u\langle+\rangle_g v)\langle+\rangle_g w$ .

б) для  $k=1$  з формули (10) отримуємо

$$u\langle+\rangle_g v = \text{sign}(u+v) \cdot \frac{|u+v|}{1+(g-1)\cdot u\cdot v/M^2+k\cdot(g-2)\cdot \min(|u|,|v|)/M}. \quad (14)$$

Враховуючи, що у цьому випадку  $u$  та  $v$  мають протилежні знаки, тобто  $v=-z$ ,  $u\langle+\rangle_g v = u\langle+\rangle_g (-z)$ , запишемо вираз (14) як

$$u\langle+\rangle_g (-z) = \text{sign}(u-z) \cdot \frac{|u-z|}{1-(g-1)\cdot u\cdot z/M^2+k\cdot(g-2)\cdot \min(|u|,|z|)/M}. \quad (15)$$

Тоді, припускаючи, що  $|u|>|z|$  та підставляючи формулу (15) у вираз  $(u\langle+\rangle_g (-z))\langle+\rangle_g w$ , на основі формули (11), де  $w>0$ , отримуємо

$$(u\langle+\rangle_g (-z))\langle+\rangle_g w = \frac{u-z+w+(g-2)\cdot u\cdot w/M-(g-1)\cdot u\cdot z\cdot w/M^2}{1-(g-1)\cdot(u\cdot z-u\cdot w+z\cdot w)/M^2+(g-2)\cdot z/M}. \quad (16)$$

Водночас припустимо, що  $|z|>|w|$ . Тоді на основі виразу (15)

$$(-z)\langle+\rangle_g (w) = \text{sign}(w-z) \cdot \frac{|w-z|}{1-(g-1)\cdot z\cdot w/M^2+k\cdot(g-2)\cdot \min(|z|,|w|)/M}. \quad (17)$$

Підставляючи формулу (17) у вираз  $u\langle+\rangle_g ((-z)\langle+\rangle_g w)$  на основі формули (11), матимемо

$$u\langle+\rangle_g ((-z)\langle+\rangle_g w) = \frac{u-z+w+(g-2)\cdot u\cdot w/M-(g-1)\cdot u\cdot z\cdot w/M^2}{1-(g-1)\cdot(u\cdot z-u\cdot w+z\cdot w)/M^2+(g-2)\cdot z/M}. \quad (18)$$

З порівняння виразів (16) та (18) випливає, що

$$u\langle+\rangle_g ((-z)\langle+\rangle_g w) = (u\langle+\rangle_g (-z))\langle+\rangle_g w.$$

Аналогічно доводяться випадки для інших співвідношень між величинами  $u, v$  та  $w$  як за їх значеннями, так і за знаком. Отже, операція додавання на основі виразу (10) асоціативна. ■

2.3. У множині  $E$  існує однозначно визначений нульовий елемент  $e$ , такий, що  $u\langle+\rangle_g e = u$  для кожного елемента  $u$ .

Таким елементом є  $e=0$ . Для нього отримуємо, виходячи з виразу (10):

$$u\langle+\rangle_g e = \text{sign}(u+0) \cdot \frac{|u+0|+(1-k)\cdot(g-2)\cdot u\cdot 0/M}{1+(g-1)\cdot u\cdot 0/M^2+k\cdot(g-2)\cdot \min(|u|,0)/M} = \text{sign}(u)\cdot|u|=u. \quad \blacksquare$$

2.4. Кожному елементу  $u$  в множині  $E$  відповідає однозначно визначений протилежний елемент  $z$ , такий, що:  $u \langle + \rangle_g z = 0$ .

Таким елементом є  $z = -u$ . Для нього отримуємо

$$u \langle + \rangle_g z = \text{sign}(u - u) \cdot \frac{|u - u| + (1 - k) \cdot (g - 2) \cdot u \cdot (-u) / M^2}{1 + (g - 1) \cdot u \cdot (-u) / M^2 + k \cdot (g - 2) \cdot \max(|u|, |u|) / M}. \quad (19)$$

Оскільки доданками є два числа з протилежними знаками, то формула (19) має відповідати випадку, при якому  $k = 1$ . Тому з (19) отримуємо

$$u \langle + \rangle_g z = \text{sign}(u - u) \cdot \frac{|u - u|}{1 + (v) \cdot u \cdot (-u) / M^2 + (g - 2) \cdot |u| / M} = 0.$$

Отже,  $G_g = (E; \langle + \rangle_g)$  є адитивною абелевою групою. ■

Зазначимо, що функцію додавання (10) при  $M = 1$  можна використовувати як основу конструювання балансних норм [20] та функцію агрегації в біполярному масштабі [18].

Враховуючи описану вище лему, доведемо тепер таку теорему.

**Теорема.** Нехай задане поле дійсних чисел  $(R; +, \cdot)$  та адитивна абелева група  $G_g = (E; \langle + \rangle_g)$ . Тоді операція відображення  $R \langle \times \rangle_g E \rightarrow E : (\alpha, u) \rightarrow \alpha \langle \times \rangle_g u$  для довільного  $\alpha \in R$  і для довільного  $u \in E$ , яка описується виразом

$$\alpha \langle \times \rangle_g u \stackrel{\text{def}}{=} \text{sign}(\alpha \cdot u) \cdot M \cdot \frac{(M + (g - 1) \cdot |u|)^{|\alpha|} - (M - |u|)^{|\alpha|}}{(M + (g - 1) \cdot |u|)^{|\alpha|} + (g - 1) \cdot (M - |u|)^{|\alpha|}}, \quad (20)$$

де  $g > 0$ , є операцією множення вектора на скаляр, а множина  $E$  безпосередньо є векторним простором над полем дійсних чисел  $R$ .

**Доведення.** Оскільки кожній парі  $\alpha, u$ , де  $\alpha$  – скаляр, а  $u$  – елемент множини  $E$  (вектор), має відповідати елемент  $\alpha \langle \times \rangle_g u$ , який називається добутком скаляра  $\alpha$  на вектор  $u$  (20), то покажемо, що ця операція множення вектора на скаляр для довільних елементів  $u$  і  $v$  з множини  $E$  та для довільних дійсних чисел  $\alpha, \beta \in R$  задовольняє таким аксіомам:

- множення на скаляр дистрибутивне відносно додавання векторів;
- множення на скаляри дистрибутивне відносно додавання скалярів;
- множення на скаляри асоціативне;
- в множині  $E$  існує однозначний одиничний елемент  $I$ .

2.5. Множення векторів на скаляр дистрибутивне відносно додавання векторів:

$$\alpha \langle \times \rangle_g (u \langle + \rangle_g v) = (\alpha \langle \times \rangle_g u) \langle + \rangle_g (\alpha \langle \times \rangle_g v). \quad (21)$$

Розглянемо виконання операцій  $\alpha \langle \times \rangle_g (u \langle + \rangle_g v)$ . Для однакових за знаком доданків  $u$  та  $v$  впливає, що тоді у формулі (10)  $k = 0$  і вона набуває вигляду (11). Водночас за аналогією з (20) отримуємо такий результат множення вектора  $v$  на скаляр  $\alpha$ :

$$\alpha \langle \times \rangle_g v = \text{sign}(\alpha \cdot v) \cdot M \cdot \frac{(M + (g - 1) \cdot |v|)^{|\alpha|} - (\alpha \cdot v)^{|\alpha|}}{(M + (g - 1) \cdot |v|)^{|\alpha|} + (g - 1) \cdot (M - |v|)^{|\alpha|}}. \quad (22)$$

Обчислюючи за виразом (11) суму  $u \langle + \rangle_g v$  та підставляючи її у формулу (20), реалізуємо цим операції, описані в лівій частині виразу (21), отримуючи при цьому

$$\alpha \langle \times \rangle_g (u \langle + \rangle_g v) = \frac{\text{sign}(\alpha \cdot u) \cdot M \cdot ((M + (g-1) \cdot (u+v) + (g-1)^2 u \cdot v / M)^{|\alpha|} - (M - (u+v) + u \cdot v / M)^{|\alpha|})}{(M + (g-1) \cdot (u+v) + (g-1)^2 u \cdot v / M)^{|\alpha|} + (g-1) \cdot (M - (u+v) + u \cdot v / M)^{|\alpha|}}. \quad (23)$$

Водночас, підставляючи у вираз (11) формули (20) і (22), реалізуючи цим операції, описані у правій частині виразу (21), отримуємо

$$\alpha \langle \times \rangle_g u \langle + \rangle_g (\alpha \langle \times \rangle_g v) = \frac{\text{sign}(\alpha \cdot u) \cdot M \cdot ((M + (g-1) \cdot (u+v) + (g-1)^2 u \cdot v / M)^{|\alpha|} - (M - (u+v) + u \cdot v / M)^{|\alpha|})}{(M + (g-1) \cdot (u+v) + (g-1)^2 u \cdot v / M)^{|\alpha|} + (g-1) \cdot (M - (u+v) + u \cdot v / M)^{|\alpha|}}. \quad (24)$$

З порівняння виразів (23) та (24) випливає рівність (21):

$$(\alpha \langle \times \rangle_g u) \langle + \rangle_g (\alpha \langle \times \rangle_g v) = \alpha \langle \times \rangle_g (u \langle + \rangle_g v).$$

Якщо  $\text{sign}(u) = -\text{sign}(v)$ , тобто  $k = 1$ , то доведення аналогічне. ■

2.6. Множення вектора на скаляри дистрибутивне відносно додавання скалярів:

$$(\alpha + \beta) \langle \times \rangle_g u = (\alpha \langle \times \rangle_g u) \langle + \rangle_g (\beta \langle \times \rangle_g u). \quad (25)$$

З виразу (20) маємо:

$$(\alpha + \beta) \langle \times \rangle_g u = \text{sign}((\alpha + \beta) \cdot u) \cdot M \cdot \frac{(M + (g-1) \cdot |u|)^{|\alpha+\beta|} - (M - |u|)^{|\alpha+\beta|}}{(M + (g-1) \cdot |u|)^{|\alpha+\beta|} + (g-1) \cdot (M - |u|)^{|\alpha+\beta|}}. \quad (26)$$

Якщо  $\text{sign}(\alpha) = \text{sign}(\beta)$ , то для реалізації операції додавання при обчисленні правої частини виразу (25) використовуємо формулу (11). Тоді отримуємо

$$\begin{aligned} & (\alpha \langle \times \rangle_g u) \langle + \rangle_g (\beta \langle \times \rangle_g u) = \\ & = \text{sign}((\alpha + \beta) \cdot u) \cdot M \cdot \frac{(M + (g-1) \cdot |u|)^{|\alpha+\beta|} - (M - |u|)^{|\alpha+\beta|}}{(M + (g-1) \cdot |u|)^{|\alpha+\beta|} + (g-1) \cdot (M - |u|)^{|\alpha+\beta|}}. \end{aligned} \quad (27)$$

З порівняння виразів (26) та (27) випливає рівність (25). ■

2.7. Множення вектора на скаляри асоціативне:

$$(\alpha \cdot \beta) \langle \times \rangle_g u = \alpha \langle \times \rangle_g (\beta \langle \times \rangle_g u). \quad (28)$$

З виразу (20) отримуємо

$$(\alpha \cdot \beta) \langle \times \rangle_g u = \text{sign}(\alpha \cdot \beta \cdot u) \cdot M \cdot \frac{(M + (g-1) \cdot |u|)^{|\alpha \cdot \beta|} - (M - |u|)^{|\alpha \cdot \beta|}}{(M + (g-1) \cdot |u|)^{|\alpha \cdot \beta|} + (g-1) \cdot (M - |u|)^{|\alpha \cdot \beta|}}. \quad (29)$$

Водночас  $\beta \langle \times \rangle_g u$  теж визначається на основі виразу (20). Підставивши отриманий таким шляхом вираз у формулу (20), реалізуючи цим обчислення правої частини виразу (28) маємо

$$\alpha \langle \times \rangle_g (\beta \langle \times \rangle_g u) = \text{sign}(\alpha \cdot \beta \cdot u) \cdot M \cdot \frac{(M + (g-1) \cdot |u|)^{|\alpha \cdot \beta|} - (M - |u|)^{|\alpha \cdot \beta|}}{(M + (g-1) \cdot |u|)^{|\alpha \cdot \beta|} + (g-1) \cdot (M - |u|)^{|\alpha \cdot \beta|}}. \quad (30)$$

З порівняння виразів (29) та (30) випливає рівність (28). ■

2.8.  $I \langle \times \rangle_g u = u$ . Таким одиничним елементом множини  $E$  є число  $I = 1$ , тому

$$1 \langle \times \rangle_g u = \text{sign}(1 \cdot u) \cdot M \cdot \frac{(M + (g-1) \cdot |u|)^{|1|} - (M - |u|)^{|1|}}{(M + (g-1) \cdot |u|)^{|1|} + (g-1) \cdot (M - |u|)^{|1|}} =$$

$$= \text{sign}(1 \cdot u) \cdot M \cdot \frac{M + (g-1) \cdot |u| - M + |u|}{M + (g-1) \cdot |u| + (g-1) \cdot (M - |u|)} = \text{sign}(u) \cdot M \cdot \frac{|u|}{M} = u. \blacksquare$$

З виразу (20) випливає також, що результат множення скаляра  $\alpha$  на вектор  $u$  завжди належить множині  $E$ , тобто  $\alpha \langle \times \rangle_g u \in E$  незалежно від знаків  $\alpha$  та  $u$ .

Отже, властивості абелевої групи  $G_g = (E; \langle + \rangle_g)$  з операцією додавання векторів  $\langle + \rangle_g$  (10), а також операція множення вектора на скаляр (20) підтверджують, що множина елементів (векторів)  $E$  над полем дійсних скалярів  $R$  утворює векторний простір  $(E; \langle + \rangle_g, \langle \times \rangle_g)$ .  $\blacksquare$

Оскільки  $u \langle + \rangle_g (-v) = u \langle - \rangle_g v$ , то з так означеної операції додавання (10) отримуємо вираз для реалізації операції віднімання:

$$\forall u, v \in E$$

$$u \langle - \rangle_g v = \text{sign}(u - v) \cdot \frac{|u - v| - k \cdot (g - 2) \cdot u \cdot v / M}{1 - (g - 1) \cdot u \cdot v / M^2 + (1 - k) \cdot (g - 2) \cdot \min(|u|, |v|) / M}. \quad (31)$$

Графічне представлення функцій додавання  $A = u \langle + \rangle_g v$  (10) та віднімання  $S = u \langle - \rangle_g v$  (31) як бінарних операцій універсальної алгебри для  $M = 200$  та таких значень керуючого параметра  $g : 0.5, 2, 5$  подано на рисунку  $a, b, c$  та  $d, e, f$  відповідно.

**Фундаментальний ізоморфізм.** Побудованій векторній структурі властивий ізоморфізм, який однозначно відображає елементи простору  $E$  у простір дійсних чисел  $R$  через нелінійну функцію  $\varphi_g : E \rightarrow R$ :

$$\varphi_g : u \rightarrow \varphi_g(u) = -\text{sign}(u) \cdot \frac{M}{g} \cdot \ln \left( \frac{M - |u|}{M + (g-1) \cdot |u|} \right). \quad (32)$$

Ізоморфізм  $\varphi_g$  (32) верифікується такими властивостями:

- a)  $\varphi_g(u \langle + \rangle_g v) = \varphi_g(u) + \varphi_g(v), \forall u, v \in E;$   
 б)  $\varphi_g(\alpha \langle \times \rangle_g u) = \alpha \cdot \varphi_g(u), \alpha \in R, \forall u \in E.$

### 3. Евклідов простір рівнів сірого елементів зображення узагальненої моделі логарифмічної обробки зображень

Скалярний добуток двох рівнів сірого  $(\cdot | \cdot)_E : E \times E \rightarrow R$  визначається зі збереженням ізоморфізму (32):

$$\forall u, v \in E$$

$$(u | v)_E = \varphi_g(u) \cdot \varphi_g(v), \forall u, v \in E.$$

Так означений скалярний добуток  $(\cdot | \cdot)_E$  на просторі рівнів сірого задає евклідов простір. Норма  $\| \cdot \|_E : E \rightarrow R^+$  визначається через скалярний добуток

$$\forall u \in E \quad \|u\|_E = \sqrt{(u | u)_E} = |\varphi_g(u)|, \forall u \in E.$$

Ця норма верифікується співвідношеннями:

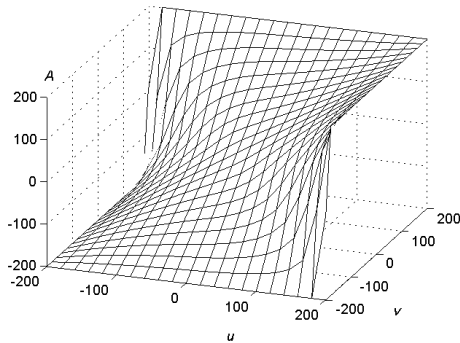
$$\|u \langle + \rangle_g v\|_E = |\varphi_g(u) + \varphi_g(v)|,$$

$$\|u \langle - \rangle_g v\|_E = |\varphi_g(u) - \varphi_g(v)|,$$

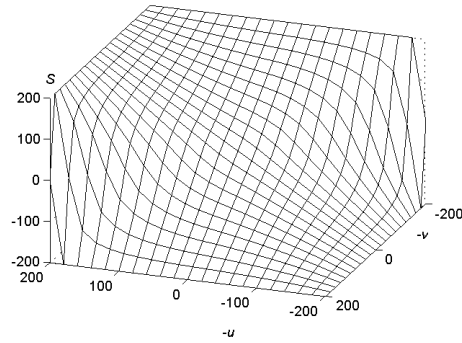
$$\| \alpha \langle x \rangle_g u \|_E = | \alpha \cdot \varphi_g(u) |.$$

#### 4. Векторний простір монохромних зображень

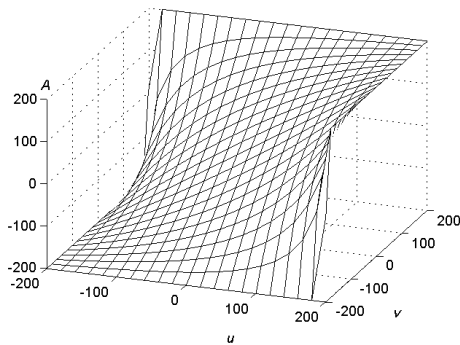
Відповідно до викладеного у [26, 31] зазначимо, що монохромне зображення є функцією двовимірного компакту  $D$  з  $R^2$  зі значеннями (величинами рівнів сірого) з простору  $E$ . Означимо як  $F(D, E)$  множину монохромних зображень з рівнями сірого, які визначені в  $D$ . Розширимо операції (10) і (20) та функції з простору  $E$  рівнів сірого до зображень  $F(D, E)$  рівнів сірого так:



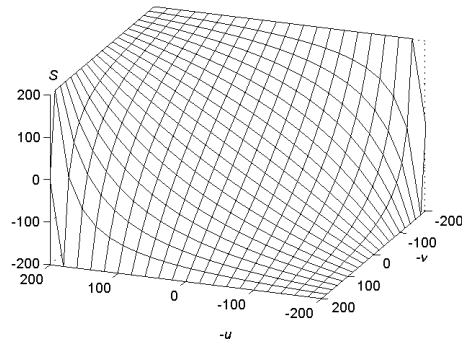
а) функція додавання з  $g = 0.5$



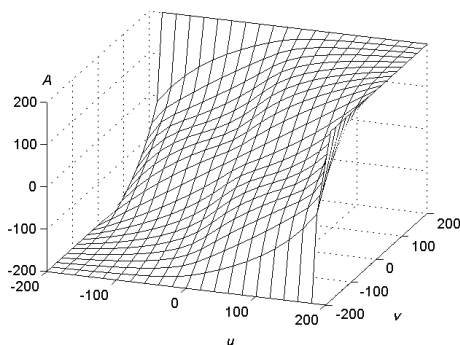
б) функція віднімання з  $g = 0.5$



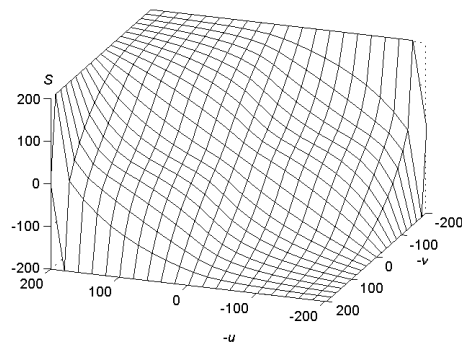
в) функція додавання з  $g = 2$



г) функція віднімання з  $g = 2$



р) функція додавання з  $g = 5$



д) функція віднімання з  $g = 5$

Графічне представлення функцій додавання (10) та віднімання (31).

**Додавання:**

$$\forall f_1, f_2 \in F(D, E), \forall (x, y) \in D$$



$$(f_1 \langle + \rangle_g f_2)(x, y) = f_1(x, y) \langle + \rangle_g f_2(x, y).$$

Нейтральний елемент є аналогічний нульовій функції.

Додавання  $\langle + \rangle_g$  (10) є асоціативне, комутативне, має нульовий елемент, кожен елемент множини має відповідний йому негативний елемент. Отже, ці операції формують множини  $F(D, E)$  зі структурою комутативної групи.

**Множення на скаляр:**

$$\forall \alpha \in R, \forall f \in F(D, E), \forall (x, y) \in D \quad (\alpha \langle \times \rangle_g f)(x, y) = \alpha \langle \times \rangle_g f(x, y).$$

Дві операції – додавання  $\langle + \rangle_g$  (10) та множення на скаляр  $\langle \times \rangle_g$  (20) формують з  $F(D, E)$  структуру векторного простору.

### 5. Гільбертів простір монохромних зображень [26, 31]

Нехай  $f$  та  $q$  є інтегровними функціями з  $F(D, E)$ . Тоді означимо скалярний добуток як

$$\forall f_1, f_2 \in F(D, E) \quad (f_1 | f_2)_{L^2(E)} = \int_D (f_1(x, y) | f_2(x, y))_E dx dy.$$

Разом зі скалярним добутком простір монохромних зображень з рівнем сірого  $F(D, E)$  формує гільбертів простір. Для нього означимо норму

$$\forall f \in F(D, E) \quad \|f\|_{L^2(E)} = \left( \int_D \|f(x, y)\|_E^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

### 6. Основні риси узагальненої моделі ЛОЗ.

Аналіз виразу (10) для операції додавання, виразу (20) для операції множення на скаляр та ізоморфізму (32) засвідчують, що нова узагальнена модель через наявність параметра  $g > 0$  дає змогу вибирати різні модифікації ЛОЗ. Так, при  $g = 1$  отримуємо базову модель ЛОЗ [1], яка узагальнює модель Jourlin–Pinoli [21–23], при  $g = 2$  отримуємо модель Rătrașcu [28–31]. Завдяки цьому відомі моделі ЛОЗ стали складовою частиною запропонованої узагальненої моделі. Це дає можливість ефективно адаптувати її залежно від властивостей об'єкта сприйняття зображення, який моделюється.

### ВИСНОВКИ

Описана нова алгебраїчна структура, яка формує узагальнену модель ЛОЗ монохромних зображень, характеризується параметричним управлінням її властивостей. Це дає змогу створювати ефективні програмні та апаратні засоби обробки зображень, зорієнтовані на певний об'єкт сприйняття зображення, властивості якого дозволяє моделювати ця модель. Базові арифметичні операції (10) та (20) з новими властивостями можуть бути використані для обробки кольорових зображень.

1. Воробель Р. А. Логарифмічна обробка зображень. Ч. 1: Базова модель // Відбір і обробка інформації. – 2009. – Вип. 31(107). – С. 26–35.
2. Красильников Н. Н. Цифровая обработка изображений. – М.: Вузовская книга, 2001. – 320 с.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Физматлит, 1971. – 432 с.
4. Мальцев А. И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.
5. Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. В. А. Соифера. – М.: Физматлит., 2003. – 784 с.

6. *Нестерук В. Ф., Порфирьева Н. Н.* Контрастный закон восприятия света // Оптика и спектроскопия, 1970. – **29**, № 6. – С. 1138–1143.
7. *Нестерук В. Ф., Соколова В. А.* Вопросы теории восприятия изображений и количественная оценка их контраста // Опτικο-механическая промышленность. – 1980. – № 5. – С. 11–13.
8. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер., 2004. – 302 с.
9. *Основи дискретної математики* // Ю. В. Капітонова, С. Л. Кривий, О. А. Летичевський, Г. М. Луцький, М. К. Печорін. – К.: Наук. думка, 2002. – 579 с.
10. *Райков Д. А.* Векторные пространства. – М.: Физматлит., 1962. – 212 с.
11. *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. – Там же. – 1963. – 264 с.
12. *Цифровое преобразование изображений* / Под ред. Р. Е. Быкова. – М.: Горячая-линия-Телеком, 2003. – 228 с.
13. *Шабанов-Кушнарченко Ю. П., Рвачов В. Л., Мурашко А. Г.* Математичні моделі зору. – К.: Техніка, 1966. – 95 с.
14. *Яне Б.* Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2007. – 584 с.
15. *Courbebaisse G., Trunde F., Jourlin M.* Wavelet transform and LIP model. Image Analysis and Stereology. – 2002. – **21**. – P. 121–125.
16. *Deng G.* An entropy interpretation of the logarithmic image processing model with application to contrast enhancement // IEEE Transactions on Image Processing. – 2009. – **18**, № 5. – P. 1135–1140.
17. *Deng G., Cahill L.W., Tobin G.R.* The study of logarithmic image processing model and its application to image enhancement // Ibid. – 1995. – **4**, № 4. – P. 506–512.
18. *Grabisch M.* Aggregation on bipolar scales / Eds. Harrie C. M. de Swart, Ewa Orłowska, Gunther Schmidt, Marc Roubens // Theory and Application of Relational Structures as Knowledge Instruments II. – Springer, 2006. – P. 355–371.
19. *Hamacher H.* Über logische Verknüpfungen unscharfer Aussagen und deren zugehörige Bewertungsfunktionen // Progress in Cybernetics and Systems Research, Hemisphere Publ. Comp. – N. Y., 1975. – P. 276–287.
20. *Homenda W.* Triangular norms, uni- and nullnorms, balanced norms: the cases of the hierarchy of iterative operators / Eds. E. P. Klement, R. Mesiar // 24<sup>th</sup> Linz Seminar on Fuzzy Set Theory. Abstracts. February 4–8. – 2003. – Linz, 2003. – P. 27–35.
21. *Jourlin M., Pinoli J.-C.* A model for logarithmic image processing // Département de Mathématiques, No 3, Université de Saint-Etienne, Décembre 1985.
22. *Jourlin M., Pinoli J.-C.* A model for logarithmic image processing // Journal of Microscop. – 1988. – **149**, Pt. 1. – P. 21–35.
23. *Jourlin M., Pinoli J.-C.* Image dynamic range enhancement and stabilization in the context of the logarithmic image processing model // Signal Processing. – 1995. – **41**, № 2. – P. 225–237.
24. *Jourlin M., Pinoli J.-C.* Logarithmic image processing // Advances in Imaging and Electron Physics. – 2001. – **115**. – P. 129–196.
25. *Nesteruk V.F., Porfirieva N. N.* Concerning the law of visual light sensation // Vision research. – 1974. – **14**, № 9. – P. 899–902.
26. *Oppenheim A. V.* Superposition in a class of non-linear system // Technical Report 432. Research Laboratory of Electronics. M. I. T., Cambridge Ma. – 1965. – 62 p.
27. *Oppenheim A. V.* Generalized superposition // Information and Control. – 1967. – **11**, № 5&6. – P. 528–536.
28. *Pătrașcu V., Voicu I.* An Algebraical Model for Gray Level Images // Proc. 7<sup>th</sup> Int. Conf., Exhibition on Optimization of Electrical and Electronic Equipment, OPTIM 2000. – Brașov, România, 11–12 May 2000. – P. 809–812.
29. *Pătrașcu V., Buzuloiu V.* A Mathematical Model for Logarithmic Image Processing // The 5<sup>th</sup> World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics, SCI2001, July 22–25. – Orlando, USA. – 2001. – **13**. – P. 117–122.
30. *Pătrașcu V., Buzuloiu V.* The Affine Transforms for Image Enhancement in the Context of Logarithmic Models // Proc. Int. Conf. on Computer Vision and Graphics, ICCVG 2002, September 25–29, 2002. – Poland: Zakopane. – **2**. – P. 596–601.
31. *Pătrașcu V.* Gray Level image Enhancement Method Using the Logarithmic Model // Acta Tehnica Napocensis, Electronics and Telecommunications. – Romania: Cluj-Napoca. – 2003. – **43**, № 2. – P. 39–50.

32. *Pătrașcu V., Buzuloiu V.* The mean dynamic range optimization in the framework of logarithmic models / Eds. O. Iancu, A. Manea, D. Cojoc // *Advanced topics in optoelectronics, microelectronics, and nanotechnologies // Proc. SPIE.* – Oct. 2003. – **5227**. – P. 73–80.
33. *Pinoli J.-C.* A general comparative study of the multiplicative homomorphic, log-ratio and logarithmic image processing approaches // *Signal Processing*, – 1997. – **58**, № 1. – P. 11–45.
34. *Pinoli J.-C.* The logarithmic image processing model: connection with human brightness perception and contrast estimators // *J. Mathematical Imaging and Vision*. – 1997. – **7**. – P. 341–358.
35. *Pinoli J. C., Debayle J.* Logarithmic adaptive neighborhood image processing (LANIP): introduction, connections to brightness perception, and application issues // *EURASIP J. Advances in Signal Processing*. – 2007. – Vol. 2007, Article ID 36105, doi: 10.1155/2007/36105, 22 p.
36. *Stockham T. G., Jr.* Image processing in the context of visual models // *Proc. of the IEEE*. – 1972. – **60**, № 7. – P. 828–842.

*Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка  
НАН України, Львів*

*Одержано  
11.06.2009*