УДК 621.391:519.22

І. М. Яворський, І. Ю. Ісаєв, І. Б. Кравець

ПОРІВНЯННЯ ПАРАМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Analysis of periodically nonstationary random process parametric models properties are carried out. Formulae for the correlation function components of periodically autoregressive moving avarage model and parametric model based on harmonic series representation are derived. It is shown, that the periodically autoregressive moving average model is a subset of coherent decomposition vector autoregressive moving average model.

Проведено порівняльний аналіз параметричних моделей періодично нестаціонарних випадкових процесів. Виведено вирази для компонентів кореляційних функцій періодично авторегресивної моделі ковзного середнього та параметричної моделі на основі гармонічного представлення. Доведено, що періодична авторегресивна модель ковзного середнього є підкласом векторної авторегресивної моделі, побудованої на основі когерентного представлення.

Розглянемо параметричні моделі періодично нестаціонарних випадкових процесів (ПНВП) [1], а саме періодично авторегресивну модель ковзного середнього (ПАРКС) [2], векторну авторегресивну модель ковзного середнього когерентного представлення ПНВП [2] та розроблену нами модель параметричного представлення на онові гармонічного представлення [3]. Модель ПАРКС базується на ідеї, що довільний ПНВП процес $\xi_n \equiv \xi(hn)$ може бути отриманий з білого шуму шляхом пропускання його через лінійний фільтр з періодично змінними параметрами. Таку модель можна описати таким рівнянням:

$$\xi_n = \sum_{p=1}^{P_1} \xi_{n-p} a_n^p + \sum_{q=0}^{Q_1} \varepsilon_{n-q} b_n^q , \tag{1}$$

де $a_n^p = a_{n-M}^p$ – авторегресивні параметри; $b_n^q = b_{n-M}^q$ – параметри ковзного середнього; $T = hM$ – період корельованості; h – час дискретизації; M – натуральне ціле число, яке визначає період процесу; P_1, Q_1 – числа, що визначають порядок моделі. Під час побудови векторної авторегресивної моделі ковзного середнього когерентного представлення ПНВП використовують той факт, що його відліки, взяті через період корельованості, творять стаціонарні стаціонарно зв'язані послідовності:

$$\xi_n = \xi_{mM+k} = \zeta_m^k , \tag{2}$$

де ζ_m^k – M випадкових процесів. Ці послідовності можна записати у вигляді векторної авторегресії ковзного середнього (ВАРКС):

$$\zeta_m^k = \sum_{p=1}^{P_2} \left(\sum_{l=0}^{M-1} \zeta_{m-p}^l A_{k,l}^p \right) + \sum_{q=0}^{Q_2} \left(\sum_{l=0}^{M-1} \varepsilon_{m-q}^l B_{k,l}^q \right), \tag{3}$$

де $A_{k,l}^p$, $B_{k,l}^q$ – параметри моделі; P_2, Q_2 – порядок моделі.

Недоліком моделей (1) та (2) при їх застосуванні до аналізу реальних даних є вимога цілочисельного значення періоду та складність інтерпретації значень коефіцієнтів моделі. Тому ми розробили нові методи параметричного моделювання, що позбавлені цих недоліків. Одним з можливих шляхів параметричного моделювання ПНВП є використання його гармонічного представлення [4, 5]. Розроблений на цій основі метод полягає у виділенні стаціонарних компонентів з періодично нестаціонарного випадкового процесу й їх параметризації за допомогою векторної авторегресивної моделі ковзного середнього. Запишемо ПНВП у такому вигляді:

$$\xi_n = \sum_{k=-K}^{K} \xi_n^k e^{j\omega_0 nk}, \tag{4}$$

де K – число, що визначає кількість стаціонарних компонент ПНВП. ВАРКС модель стаціонарних компонент має такий вигляд:

$$\xi_n^k = \sum_{p=1}^{P_3} \sum_{l=-K}^{K} \phi_p^{kl} \xi_{n-p}^l + \sum_{q=0}^{Q_3} \sum_{l=-K}^{K} \lambda_q^{kl} \varepsilon_{n-q}^l, \tag{5}$$

де $\phi_{k,l}^p$, $\lambda_{k,l}^q$ – параметри моделі; P_3, Q_3 – порядок моделі. Як бачимо, у кожній з моделей використовується специфічний підхід до моделювання, тому слід провести порівняння усіх цих моделей та визначити характер апроксимації їх характеристик.

Розглянемо модель ПАРКС та застосуємо до неї таку ж конструкцію, що використовується у векторній авторегресивній моделі ковзного середнього когерентного представлення ПНВП. Вираз (1), враховуючи подання (2) та періодичність параметрів a_k^p та b_k^q, набуде такого вигляду:

$$\xi_{mM+k} = \sum_{p=1}^{P} \xi_{mM+k-p} a_k^p + \sum_{q=0}^{Q} \varepsilon_{mM+k-q} b_k^q .$$

У матричній формі його можна записати так:

$$X_m = M_0 X_m + M_1 X_{m-1} + N_0 E_m + N_1 E_{m-1},$$

де

$$X_m = \begin{pmatrix} \xi_{mM+M-1} \\ \dots \\ \xi_{mM+2} \\ \xi_{mM+1} \\ \xi_{mM} \end{pmatrix}, \quad M_0 = \begin{pmatrix} 0 & a_{M-1}^1 & . & a_{M-1}^{M-2} & a_{M-1}^{M-1} \\ \dots & \dots & . & \dots & \dots \\ 0 & 0 & . & a_2^1 & a_2^2 \\ 0 & 0 & . & 0 & a_1^1 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ \dots & \dots & . & \dots & \dots \\ a_2^3 & a_2^4 & . & 0 & 0 \\ a_1^2 & a_1^3 & . & 0 & 0 \\ a_0^1 & a_0^2 & . & a_0^{M-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} b_{M-1}^0 & . & b_{M-1}^{M-2} & b_{M-1}^{M-1} \\ \dots & . & \dots & \dots \\ 0 & . & b_2^1 & b_2^2 \\ 0 & . & b_1^0 & b_1^1 \\ 0 & . & 0 & b_0^0 \end{pmatrix},$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ \dots & \dots & . & \dots & \dots \\ b_2^3 & b_2^4 & . & 0 & 0 \\ b_1^2 & b_1^3 & . & 0 & 0 \\ b_0^1 & b_0^2 & . & b_0^{M-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad E_m = \begin{pmatrix} \varepsilon_{mM+M-1} \\ \dots \\ \varepsilon_{mM+1} \\ \varepsilon_{mM} \end{pmatrix}.$$

Перенесемо доданок $M_0 X_m$ у ліву частину:

$$(1-M_0)X_m = M_1 X_{m-1} + N_0 E_m + N_1 E_{m-1}.$$

Легко бачити, що визначник матриці $(1-M_0)$ дорівнює одиниці, а це означає, що існує обернена матриця $(1-M_0)^{-1}$, а тоді останній вираз можна подати так:

$$X_m = (1-M_0)^{-1} M_1 X_{m-1} + (1-M_0)^{-1} N_0 E_m + (1-M_0)^{-1} N_1 E_{m-1},$$

що запишемо у вигляді

$$X_m = \sum_{p=1}^{P} A_p X_{m-p} + \sum_{q=0}^{Q} B_q E_{m-q},$$

де $P=1$; $Q=1$; $A_1 = (1-M_0)^{-1} M_1$; $B_0 = (1-M_0)^{-1} N_0$; $B_1 = (1-M_0)^{-1} N_1$. Цей вираз описує ВАРМА модель когерентного представлення ПНВП (3), а це означає, що модель ПАРКС є її окремим випадком.

Обчислимо кореляційну функцію ПНВП у випадку моделі ПАРКС, для цього вираз (1) з врахуванням Фур'є-представлень періодичних параметрів $a_n^p = \sum_k \alpha_k^p e^{j\omega_0 kn}$, $b_n^q = \sum_k \beta_k^q e^{j\omega_0 kn}$ перепишемо у вигляді

$$\xi_n = \sum_{p=1}^{P_1} \sum_k \xi_{n-p} \alpha_k^p e^{j\omega_0 kn} + \sum_{q=0}^{Q_1} \sum_k \varepsilon_{n-q} \beta_k^q e^{j\omega_0 kn}. \qquad (6)$$

Помножимо останній вираз на ε_{n-u}^*:

$$\xi_n \varepsilon_{n-u}^* = \sum_{p=1}^{P_1} \sum_k \xi_{n-p} \varepsilon_{n-u}^* \alpha_k^p e^{j\omega_0 kn} + \sum_{q=0}^{Q_1} \sum_k \varepsilon_{n-q} \varepsilon_{n-u}^* \beta_k^q e^{j\omega_0 kn}$$

та усереднимо його за ансамблем

$$k_{\xi\varepsilon}(n,u) = \sum_{p=1}^{P_1} \sum_k k_{\xi\varepsilon}(n-p, u-p) \alpha_k^p e^{j\omega_0 kn} + \sum_{q=0}^{Q_1} \sum_k \delta(u-q) \beta_k^q e^{j\omega_0 kn}, \qquad (7)$$

де $k_{\xi\varepsilon}(n,u) = E(\xi_n \varepsilon_{n-u}^*)$ – взаємокореляційна функція процесів ξ_n та ε_n. Подамо кореляційну функцію через її коефіцієнти:

$$k_{\xi\varepsilon}(n,u) = \sum_m K_m^{\xi\varepsilon}(u) e^{j\omega_0 mn}.$$

Тоді вираз (7) набуде такого вигляду:

$$\sum_m K_m^{\xi\varepsilon}(u) e^{j\omega_0 mn} = \sum_{p=1}^{P_1} \sum_k \sum_m K_m^{\xi\varepsilon}(u-p) e^{j\omega_0 m(n-p)} \alpha_k^p e^{j\omega_0 kn} + \sum_k \beta_k^u e^{j\omega_0 kn}.$$

Звідси

$$K_m^{\xi\varepsilon}(u) = \sum_{p=1}^{P_1} \sum_k K_{m-k}^{\xi\varepsilon}(u-p) \alpha_k^p e^{-j\omega_0 (m-k) p} + \beta_m^u.$$

Оскільки при $u<0 \Rightarrow K_m^{\xi\varepsilon}(u) = 0$, отримаємо рекурсивну систему рівнянь для обчислення взаємокореляційної функції процесів ξ_n та ε_n:

$$\begin{cases} K_m^{\xi\varepsilon}(0) = \beta_m^0; \\ K_m^{\xi\varepsilon}(1) = \sum\limits_k K_{m-k}^{\xi\varepsilon}(0)\alpha_k^1 e^{-j\omega_0(m-k)} + \beta_m^1; \\ \ldots \\ K_m^{\xi\varepsilon}(u) = \sum\limits_{p=1}^{P_1}\sum\limits_k K_{m-k}^{\xi\varepsilon}(u-p)\,\alpha_k^p e^{-j\omega_0(m-k)p} + \beta_m^u. \end{cases} \tag{8}$$

Легко бачити, що кількість компонентів взаємокореляційної функції дорівнює кількості компонентів β_m^u. А компоненти $K_m^{\xi\varepsilon}(u)$ $u > Q_1$ формують кореляційний хвіст, що в асимтотиці заникає до нуля:

$$K_m^{\xi\varepsilon}(u) = \sum_{p=1}^{P_1}\sum_k K_{m-k}^{\xi\varepsilon}(u-p)\,\alpha_k^p e^{-j\omega_0(m-k)p} .$$

Для обчислення кореляційних компонентів $K_m^{\xi\xi}(u)$ домножимо вираз (6) на ξ_{n-u}^*:

$$\xi_n\xi_{n-u}^* = \sum_{p=1}^{P_1}\sum_k \xi_{n-p}\xi_{n-u}^*\alpha_k^p e^{j\omega_0 kn} + \sum_{q=0}^{Q_1}\sum_k \varepsilon_{n-q}\xi_{n-u}^*\beta_k^q e^{j\omega_0 kn} ,$$

візьмемо середнє за ансамблем:

$$k_{\xi\xi}(n,u) = \sum_{p=1}^{P_1}\sum_k k_{\xi\xi}(n-p,u-p)\,\alpha_k^p e^{j\omega_0 kn} + \sum_{q=0}^{Q_1}\sum_k k_{\varepsilon\xi}(n-q,u-q)\beta_k^q e^{j\omega_0 kn} ,$$

де $k_{\xi\xi}(n,u) = E(\xi_n\xi_{n-u}^*)$ – кореляційна функція процесу ξ_n. Розклавши кореляційну функцію в ряд Фур'є, отримуємо:

$$\sum_m K_m^{\xi\xi}(u)e^{j\omega_0 mn} =$$

$$= \sum_{p=1}^{P_1}\sum_k\sum_m K_m^{\xi\xi}(u-p)\,e^{j\omega_0 m(n-p)}\alpha_k^p e^{j\omega_0 kn} + \sum_{q=0}^{Q_1}\sum_k\sum_m K_m^{\varepsilon\xi}(u-q)\,e^{j\omega_0 m(n-q)}\beta_k^q e^{j\omega_0 kn},$$

а звідси

$$K_m^{\xi\xi}(u) = \sum_{p=1}^{P_1}\sum_k K_{m-k}^{\xi\xi}(u-p)\,\alpha_k^p e^{-j\omega_0(m-k)p} + \sum_{q=0}^{Q_1}\sum_k K_{m-k}^{\varepsilon\xi}(u-q)\beta_k^q e^{-j\omega_0(m-k)q} . \tag{9}$$

Оскільки $k_{\xi\varepsilon}(n,u) = \sum\limits_k K_k^{\xi\varepsilon}(u)e^{j\omega_0 kn}$, $k_{\varepsilon\xi}(n,u) = \sum\limits_k K_k^{\varepsilon\xi}(u)e^{j\omega_0 kn}$ і $k_{\xi\varepsilon}(n,-u) = k_{\varepsilon\xi}(n+u,u)$, то

$$K_k^{\xi\varepsilon}(-u) = K_k^{\varepsilon\xi}(u)e^{j\omega_0 ku} .$$

Відповідно до останньої властивості вираз (9) перетворимо таким чином:

$$K_m^{\xi\xi}(u) = \sum_{p=1}^{P_1}\sum_k K_{m-k}^{\xi\xi}(u-p)\,\alpha_k^p e^{-j\omega_0(m-k)p} + \sum_{q=0}^{Q_1}\sum_k K_{m-k}^{\xi\varepsilon}(q-u)e^{-j\omega_0(m-k)u}\beta_k^q . \tag{10}$$

Цей вираз, а також вираз (8) дозволяють обчислити компоненти кореляційної функції на основі параметрів моделі. Слід зауважити, що у випадку $u > Q_1$ останній вираз матиме вигляд

$$K_m^{\xi\xi}(u) = \sum_{p=1}^{P_1}\sum_k K_{m-k}^{\xi\xi}(u-p)\,\alpha_k^p e^{-j\omega_0(m-k)p}$$

і описуватиме поведінку хвоста кореляційної функції. А це означає, що за виглядом компонентів кореляційної функції процесу ПНВП можна оцінити порядок Q_1 та кількість параметрів α_k^p.

Розглянемо параметричну модель на основі гармонічного представлення (4). Помножимо його на послідовність ξ_{n-u}^*

$$\xi_n \xi_{n-u}^* = \sum_k \xi_n^k e^{j\omega_0 nk} \sum_m \xi_{n-u}^{*m} e^{-j\omega_0 (n-u)m},$$

та усереднимо за ансамблем

$$k_{\xi\xi}(n,u) = \sum_k \sum_m R_{\xi\xi}^{km}(u) e^{j\omega_0 nk} e^{-j\omega_0 (n-u)m},$$

тут $R_{\xi\xi}^{km}(u)$ – взаємокореляційна функція процесів ξ_n^k та ξ_n^m. Оскільки кореляційна функція процесу ξ_n є періодичною в часі, то

$$\sum_l K_l^{\xi\xi}(u) e^{j\omega_0 nl} = \sum_k \sum_m R_{\xi\xi}^{km}(u) e^{j\omega_0 nk} e^{-j\omega_0 nm} e^{j\omega_0 um}.$$

Звідси після заміни $k - m = l$ отримаємо:

$$\sum_l K_l^{\xi\xi}(u) e^{j\omega_0 nl} = \sum_l \sum_m R_{\xi\xi}^{l+m,m}(u) e^{j\omega_0 um} e^{j\omega_0 nl}.$$

Відтак
$$K_l^{\xi\xi} = \sum_m R_{\xi\xi}^{l+m,m}(u) e^{j\omega_0 um}. \qquad (11)$$

Останній вираз пов'язує компоненти кореляційної функції процесу з взаємокореляційними функціями стаціонарних компонент ПВНП.

Параметрична модель стаціонарних компонент ПВНП має такий вигляд:

$$\xi_n^k = \sum_p \sum_l \phi_p^{kl} \xi_{n-p}^l + \sum_q \sum_l \lambda_q^{kl} \varepsilon_{n-q}^l. \qquad (12)$$

Помножимо останній вираз на послідовність ε_{n-u}^{*m} та усереднимо за ансамблем. Врахуємо, що кореляційна функція білошумового процесу

$$E\left(\varepsilon_n^l \varepsilon_{n-u}^{*m}\right) = \frac{1}{4}\left(\varepsilon_n^{cl} \pm j\varepsilon_n^{sl}\right)\left(\varepsilon_{n-u}^{*cm} \mp j\varepsilon_{n-u}^{*sm}\right) = \frac{1}{2}\delta(l-m)\delta(u),$$

де $\delta(u)$ – символ Кронекера. Тоді

$$R_{\xi\varepsilon}^{km}(u) = \sum_p \sum_l \phi_p^{kl} R_{\xi\varepsilon}^{lm}(u-p) + \frac{1}{2}\lambda_u^{km}.$$

Оскільки $R_{\xi\varepsilon}^{km}(u) = 0$ при $u < 0$, то отримаємо рекурсивну систему рівнянь для обчислення взаємокореляційних функцій $R_{\xi\varepsilon}^{km}(u)$:

$$\begin{cases} R_{\xi\varepsilon}^{km}(0) = \frac{1}{2}\lambda_0^{km}; \\ R_{\xi\varepsilon}^{km}(1) = \sum_l \phi_1^{kl} R_{\xi\varepsilon}^{lm}(0) + \frac{1}{2}\lambda_1^{km}; \\ \dots \\ R_{\xi\varepsilon}^{km}(u) = \sum_p \sum_l \phi_p^{kl} R_{\xi\varepsilon}^{lm}(u-p) + \frac{1}{2}\lambda_u^{km}. \end{cases} \qquad (13)$$

Помножимо вираз (12) на процес ξ_{n-u}^{*m}

$$\xi_n^k \xi_{n-u}^{*m} = \sum_p \sum_l \phi_p^{kl} \xi_{n-p}^l \xi_{n-u}^{*m} + \sum_q \sum_l \lambda_q^{kl} \varepsilon_{n-q}^l \xi_{n-u}^{*m}$$

та усереднимо за ансамблем

$$R_{\xi\xi}^{km}(u) = \sum_p \sum_l \phi_p^{kl} R_{\xi\xi}^{lm}(u-p) + \sum_q \sum_l \lambda_q^{kl} R_{\varepsilon\xi}^{lm}(u-q).$$

Оскільки взаємокореляційна функція має властивість $R_{\varepsilon\xi}^{lm}(u) = R_{\xi\varepsilon}^{*lm}(-u)$, то отримаємо такий вираз:

$$R_{\xi\xi}^{km}(u) = \sum_p \sum_l \phi_p^{kl} R_{\xi\xi}^{lm}(u-p) + \sum_q \sum_l \lambda_q^{kl} R_{\xi\varepsilon}^{*lm}(q-u). \tag{14}$$

Вирази (14) та (13) формують систему лінійних рівнянь для обчислення взаємокореляційних функцій $R_{\xi\xi}^{km}(u)$ стаціонарних компонент ПНВП. Слід зауважити, що у випадку $u > Q_3$ взаємокореляційні функції формують кореляційний хвіст та обчислюються згідно з виразом:

$$R_{\xi\xi}^{km}(u) = \sum_p \sum_l \phi_p^{kl} R_{\xi\xi}^{lm}(u-p).$$

Для обчислення компонентів кореляційної функції ПНВП отримані значення взаємокореляційних функцій слід підставити у вираз (11).

Як бачимо, основна відмінність двох методів полягає у різних алгоритмах апроксимації кореляційної функції. У випадку моделі, що побудована на основі гармонічного представлення, спочатку визначаємо взаємокореляційні функції, а далі на їх основі формуємо компоненти, а у випадку ПАРКС-моделі відразу апроксимуємо кореляційні компоненти ПНВП. Це означає, що для різних типів випадкових процесів кожна модель матиме свої переваги та недоліки. Для визначення ефективності застосування тої чи іншої моделі до певного типу сигналу слід глибше дослідити імовірнісні характеристики цих моделей та використати симуляційні моделі для верифікації їх характеристик.

1. *Драган Я. П., Рожков В. А., Яворский И. Н.* Методы вероятносного анализа ритмики океанологических процессов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1987. – 319 с.
2. *Pagano M.* On Periodic and Multiple Autoregressions. – The Annals of Statistics. – 1978. – Vol. 6. – P. 1310–1317.
3. *Яворський И. Н., Кравец И. Б., Исаев И. Ю.* Параметрическое моделирование периодически коррелированных случайных процессов на основе их представления через стационарные случайные процессы // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. – 2006. – **49**, №11. – С. 33–42.
4. *Яворський І. М., Ісаєв І. Ю., Кравець І. Б.* Лінійна смугова фільтрація при дослідженні структури періодично нестаціонарних випадкових сигналів // Відбір і обробка інформації. – 2006. – Вип. 25 (101). – С. 19–25.
5. *Яворський І. М., Ісаєв І. Ю., Кравець І. Б.* Виділення квадратурних складових періодично нестаціонарних випадкових процесів на основі перетворення Гільберта // Відбір і обробка інформації. – 2007. – Вип. 27 (103).

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;
Інститут телекомунікації технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща

Одержано
07.04.2009