УДК 004.932

Р. А. Воробель

ТРИКУТНА ПАРАМЕТРИЧНА НОРМА

Application of exponential functions for multiplicative generators of triangular norms construction is presented. Complexity of inverse function termination in analytical form is pointed out. Possibility of Lambert function usage for construction of earlier unknown functions is shown. New parametric triangular norm is constructed using them.

Розглянуто використання експоненціальних функцій для побудови мультиплікативних генераторів трикутних норм. Зазначено складність знаходження обернених функцій в аналітичному вигляді. Проаналізовано можливість використання функції Ламберта для знаходження раніше невідомих обернених функцій. Використовуючи їх, побудовано нову параметричну трикутну норму.

Одним з основних елементів інтелектуальних діагностичних систем є логічні зв’я́зки, які є аналогом операцій об’єднання та перетину множин. Л. Заде побудував теорію нечітких множин [5], в якій вони відіграють ключову роль. Водночас він запропонував використовувати як логічні зв’я́зки трикутні норми, введені у К. Менгером у 1942 р. [4]. З того часу трикутні норми посіли чільне місце як у нечіткій та багатозначній логіці, так і в теорії напівгруп та теорії асоціативних функцій [2, 3]. Основним конструктивним елементом трикутних норм залишаються їх адитивний та мультиплікативний генератори, які є однозначними бієктивними функціями, тобто такими, для яких існує обернена функція. Незначна кількість відомих трикутних норм зумовлена якраз проблемами отримання в аналітичному вигляді обернених функцій. Враховуючи це, метою цієї роботи є розширення можливості використання нових функцій за генератор трикутних норм. Це є здійсненним завдяки відшуканню аналітичного представлення нових обернених функцій. За основу генераторів трикутних норм обрано експоненціальні функції. Слід зазначити, що відомим є використання за мультиплікативний генератор строгих трикутних норм функції [2]

$$t_m^*(x) = \frac{e^{-px} - 1}{e^{-p} - 1}, \tag{1}$$

де $p \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Ми ж проаналізуємо можливості використання функцій xe^{x-1} та $x^p e^{x-1}$ як генераторів трикутних норм та побудуємо з їх використанням відповідні трикутні норми.

1. Використання за генератор трикутної норми функції xe^{x-1}.

Розглянемо функцію $t_m(x) = xe^{x-1}$, графік якої показано кривою знизу на рис. 1. Для цієї функції можемо довести такі необхідні та достатні вимоги, сформульовані у роботах [2, 3], як до мультиплікативного генератора трикутної норми $T(x, y)$.

1.1. $\forall x \in [0, 1]$ $t_m(x) \in [0, 1]$.

Оскільки $0 \le x \le 1$, то $\frac{1}{e} \le e^{x-1} \le 1$, і $0 \le xe^{x-1} \le 1$, а значить $t_m(x) \in [0, 1]$. З цього доведення випливає, що множиною значень функції $t_m(x)$ є $Ran\,(t_m) = [0, 1]$.

1.2. $t_m(x)$ строго зростаюча. Припустимо, що $x_1 < x_2$, тоді $e^{x_1-1} < e^{x_2-1}$, а значить $x_1 e^{x_1-1} < x_2 e^{x_2-1}$ і $t_m(x_1) < t_m(x_2)$.

1.3. $t_m(1) = 1$. Маємо $t_m(1) = 1 \cdot e^{1-1} = e^0 = 1$.

1.4. $t_m(x)$ неперервна справа у точці $x = 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(t_m(0 + \Delta x) - t_m(0) \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta x e^{\Delta x}}{e} - 0 \right) = 0 .$$

1.5. $\forall x, y \in [0,1]$ $t_m(x) \cdot t_m(y) \in Ran\,(t_m) \cup [0, t_m(0^+)]$.

Для функції $t_m(x) = xe^{x-1}$ $t_m(0) = 0$ і $t_m(0^+) = 0$. Тому $Ran\,(t_m) \cup [0, t_m(0^+)] = Ran\,(t_m)$. Звідси, враховуючи, що $t_m(x) \in [0,1]$ і $t_m(y) \in [0,1]$, $t_m(x) \cdot t_m(y) \in [0,1] = Ran\left(t_m\right)$.

1.6. Функції $t_m(\cdot)$ та $t_m^{(-1)}(\cdot)$ генерують трикутну норму $T(x, y)$, аналітичне представлення якої формується виразом $T(x, y) = t_m^{(-1)}\left(t_m(x) \cdot t_m(y)\right)$, де $t_m^{(-1)}(x)$ є псевдо оберненою до $t_m(x)$ і такою, що

$$t_m^{(-1)}(x) = \begin{cases} t_m^{-1}(x), & \text{ï ðè } x \in [t_m(0), 1], \\ 0, & \text{ï ðè } x \in [0, t_m(0)], \end{cases}$$

а $t_m^{-1}\left(x\right)$ є оберненою функцією до $t_m(x)$. Оскільки $t_m(0) = 0$, то $t_m^{(-1)}(x) = t_m^{-1}(x)$ і

$$T(x, y) = t_m^{-1}\left(t_m(x) \cdot t_m(y)\right).$$

Однак обернена функція до xe^{x-1} невідома. Визначимо її, використовуючи функцію $LambertW(x)$.

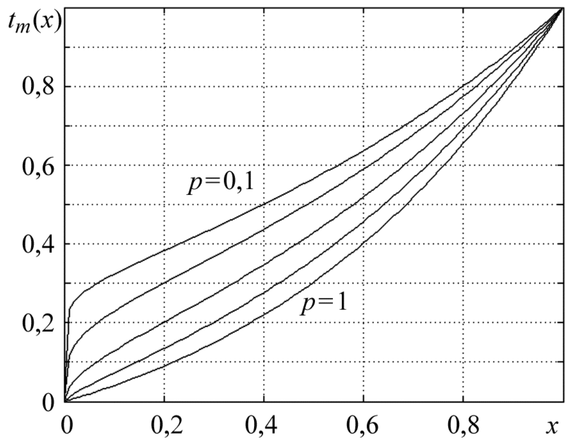

Рис. 1. Графічне представлення функцій мультиплікативного генератора $t_m(x) = x^p e^{x-1}$ за різних значень p: 0,1 (верхня крива); 0,25; 0,5; 0,75 і 1 (нижня крива).

Твердження 1. Оберненою до функції $y = xe^{x-1}$ є $y = LambertW(e \cdot x)$.

Доведення. Помножимо обидві частини виразу $y = xe^{x-1}$ на e і отримаємо $e \cdot y = xe^x$. Звідси, за означенням, $x = LambertW(e \cdot y)$. Замінивши змінні, отримуємо $y = LambertW(e \cdot x)$ ■.

Знаючи спосіб отримання функції, оберненої до $y = xe^{x-1}$, можемо визначати вираз для обчислення трикутної норми $T(x, y)$ на основі мультиплікативного генератора $t_m(x)$, яким є функція xe^{x-1}, враховуючи твердження 1:

$$T(x, y) = t_m^{-1}\left(t_m(x) \cdot t_m(y)\right) = LambertW(e \cdot xe^{x-1} \cdot ye^{y-1}) = LambertW(xye^{x+y-1}) . \quad (2)$$

Отримавши вираз для обчислення t-норми (2), можемо побудувати відповідний вираз для s-норми, використовуючи відоме співвідношення між трикутними конормою і нормою

$$S(x, y) = 1 - T(1-x, 1-y) . \quad (3)$$

Враховуючи вираз (2), з (3) отримуємо

$$S(x, y) = 1 - LambertW((1-x) \cdot (1-y) \cdot e^{1-x+1-y-1}) = 1 - W((1-x) \cdot (1-y) \cdot e^{1-x-y}) . \quad (4)$$

На рис. 2 показано графічне представлення трикутної норми, яка використовує функцію Ламберта: *а*) t-норма (2); *г*) s-норма (4).

Недоліком побудованої трикутної норми є те, що вона не є параметричною, а тому має обмежені функціональні можливості. Для усунення цього недоліку введемо фіксований параметр p у вираз, що представляє мультиплікативний генератор, записавши його у вигляді $t_m^p(x) = x^p e^{x-1}$, де $p \in (0, \infty)$, і побудуємо далі на його основі параметричну трикутну норму.

2. Використання за генератор трикутної норми функції $x^p e^{x-1}$.

На рис. 1 представлено графіки функції $x^p e^{x-1}$ за різних значень параметра *p*: 0,1; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0. Для функції $x^p e^{x-1}$ обернена їй невідома. Зазначимо, що у роботі [1] описано, що оберненою до функції $y = x^p e^x$ є функція $p \cdot LambertW\left(\frac{1}{p} x^{1/p}\right)$. Враховуючи це, можемо довести таку властивість нової функції $t_m^p(x)$.

Твердження 2. Оберненою до функції $y = x^p e^{x-1}$ є функція $y = p \cdot LambertW\left(\frac{1}{p}(ex)^{1/p}\right)$.

Доведення. Помножимо обидві сторони виразу $y = x^p e^{x-1}$ на e та піднесемо їх до степеня $1/p$, отримавши $(ey)^{1/p} = xe^{x/p}$. Розділивши тепер обидві сторони на p матимемо $(ey)^{1/p}/p = \frac{x}{p}e^{x/p}$, чи $\frac{(ey)^{1/p}}{p} = \tilde{x}e^{\tilde{x}}$, де $\tilde{x} = x/p$ і $\tilde{x} = LambertW((ey)^{1/p}/p)$, або ж $x = p \cdot LambertW((ey)^{1/p}/p)$, а після заміни змінних – $y = p \cdot LambertW((ex)^{1/p}/p)$ ■.

Покажемо тепер, що функція $t_m^p(x) = x^p e^{x-1}$ може бути мультиплікативним генератором параметричної трикутної норми $T^p(x, y)$.

2.1. $\forall x \in [0,1] \;\; t_m^p(x) \in [0,1]$.

Оскільки $p > 0$ і $0 \le x \le 1$, то $e^{x-1} > 0$ і $0 \le x^p e^{x-1} \le 1$, а значить $t_m^p(x) \in [0,1]$ і множиною значень функції $t_m^p(x)$ є $Ran\,(t_m^p) = [0,1]$.

2.2. $t_m^p(x)$ строго зростаюча. Припустимо, що $x_1 < x_2$, тоді $e^{x_1-1} < e^{x_2-1}$, а значить і $x_1^p e^{x_1-1} < x_2^p e^{x_2-1}$, бо $p > 0$ і $x_1^p < x_2^p$. Тому $t_m^p(x_1) < t_m^p(x_2)$.

2.3. $t_m^p(1) = 1$. Маємо $t_m^p(1) = 1^p \cdot e^{1-1} = 1$.

2.4. $t_m^p(x)$ неперервна справа у точці $x = 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(t_m^p(0+\Delta x) - t_m^p(0)\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta x^p e^{\Delta x}}{e} - 0\right) = 0.$$

2.5. $\forall x, y \in [0,1]$ $t_m^p(x) \cdot t_m^p(y) = Ran\,(t_m^p) \cup [0, t_m^p(0^+)]$.

Для функції $t_m^p(x) = x^p e^{x-1}$ $t_m^p(0) = 0$ і $t_m^p(0^+) = 0$. Тому $Ran\,(t_m^p) = [0,1]$. Оскільки $t_m^p(x) \in [0,1]$ і $t_m^p(y) \in [0,1]$, то $t_m^p(x) \cdot t_m^p(y) \in \left[0,1\right] = Ran\,(t_m^p)$.

2.6. Функції $t_m^p(\cdot)$ та $(t_m^p)^{-1}(\cdot)$ генерують трикутну норму $T^p(x,y)$, аналітичне представлення якої формується виразом $T^p(x,y) = (t_m^p)^{(-1)}(t_m^p(x) \cdot t_m^p(y))$, де $(t_m^p)^{(-1)}(x)$ є псевдо оберненою до $t_m^p(x)$ і такою, що

$$(t_m^p)^{(-1)}(x) = \begin{cases} (t_m^p)^{-1}(x), & \text{ïðè } x \in [t_m^p(0), 1], \\ 0, & \text{ïðè } x \in [0, t_m^p(0)], \end{cases}$$

а $(t_m^p)^{-1}(x)$ є оберненою функцією до $t_m^p(x)$. Оскільки $t_m^p(0) = 0$, то $(t_m^p)^{(-1)}(x) = (t_m^p)^{-1}(x)$ і

$$T^p(x,y) = (t_m^p)^{-1}(t_m^p(x) \cdot t_m^p(y)). \tag{5}$$

Оскільки, як оберненою до $t_m^p(x) = x^p e^{x-1}$ є функція $y = p \cdot LambertW\left(\frac{(ex)^{\frac{1}{p}}}{p}\right)$, то для виразу $T^p(x,y)$ (5) отримуємо:

$$\begin{aligned} T^p\left(x,y\right) &= p \cdot LambertW\left(\frac{1}{p}\left(x^p e^{x-1} \cdot y^p e^{y-1} \cdot e\right)^{\frac{1}{p}}\right) = \\ &= p \cdot LambertW\left(\frac{1}{p}\left(x^p y^p e^{x+y-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right) = \\ &= p \cdot LambertW\left(\frac{1}{p} \cdot x \cdot y \cdot e^{\frac{x+y-1}{p}}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Беручи до уваги вираз (6) для t–норми $T^p(x,y)$ та враховуючи співвідношення (3), можемо записати вираз для відповідної трикутної конорми $S^p(x,y)$:

$$S^p(x,y) = 1 - p \cdot LambertW\left(\frac{1}{p}(1-x)(1-y) \cdot e^{\frac{1-x+1-y-1}{p}}\right) =$$

$$= 1 - p \cdot LambertW\left(\frac{1}{p}(1-x)(1-y) \cdot e^{\frac{1-x-y}{p}} \right). \tag{7}$$

На рис. 2 представлено графічні зображення побудованої параметричної трикутної норми $T^p(x,y)$ за таких значень параметра p : 1; 0,1 і 10000, причому *а*)–*в*) – це *t*–норми (6), а *г*)–*д*) – це відповідні *s*–норми (7).

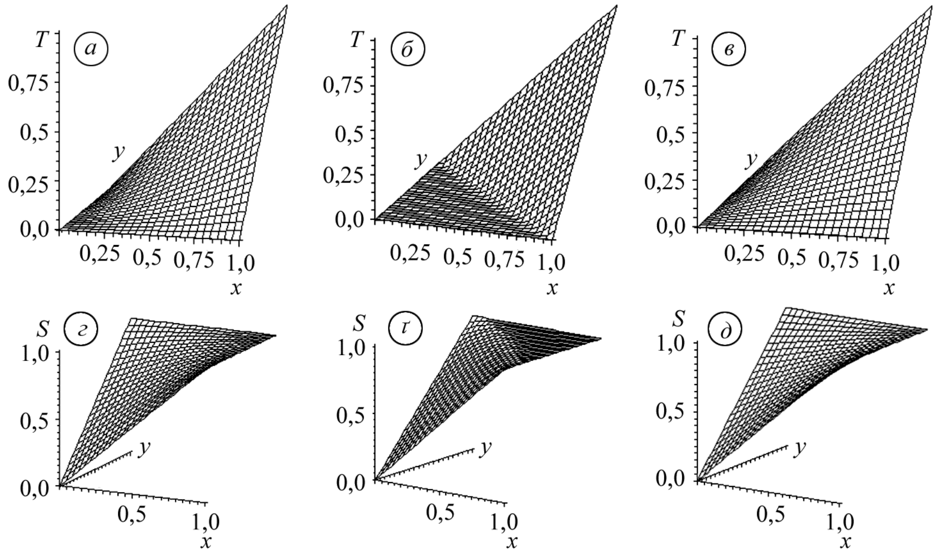

Рис. 2. Графіки трикутних *t*–норм *а–в* та відповідних їм *s*–норм *г–д* за різних значень *p*: 1 (*а* і *г*); 0,1 (*б* і *ґ*); 10000 (*в* і *д*).

Аналізуючи властивості *t*–норми (6) зазначимо, що при $p \to 0$ $T^p(x,y) \to \to T_L(x,y) = \max(x+y-1, 0)$, тобто її частковим випадком є *t*–норма Лукасевича, а при $p \to \infty$ $T^p(x,y) \to T_P(x,y) = xy$ – її частковим випадком є алгебраїчна *t*-норма. Для $0 < p < \infty$ $T^p(x,y)$ є строгою архімедовою трикутною нормою.

ВИСНОВКИ

Використання функції Ламберта дало змогу знайти раніше не відомі обернені функції в аналітичному вигляді. Завдяки цьому стало можливим застосувати їх до знаходження трикутних норм, а самі первинні функції, обернені до яких знайдено, – використати як мультиплікативні генератори трикутних норм. Введення в мультиплікативний генератор додаткового параметра зробило можливим побудувати параметричну трикутну норму. На основі цього генератора можна будувати складніші трикутні норми, використовуючи відомі підходи до функціонального перетворення як генератора, так і оберненої до нього функції.

1. *Попов Я. Б.* Математичне моделювання первинних перетворювачів фізичних величин на основі апроксимаційних методів: Дис. … канд. техн. наук. – Львів, 1998. – 130 с.
2. *Alsina C., Frank M. J., Schweizer B.* Associative Functions. Triangular Norms and Copulas. World Scientific Publishing Co., 2006. – 237 p.
3. *Klement E. P., Mesiar R., Pap E.* Triangular Norms. – Dordrecht: Kluwer., 2000. – 384 p.
4. *Menger K.* Statistical metrics // Proc. Nac. Acad. Sci. USA. – 1942. – Vol. 28. – P. 535–537.
5. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets // Information and Control. – 1965. – **8**, № 3. – P. 338–353.

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка
НАН України, Львів

Одержано
15.12.2008