УДК 519.718.2

О. Ю. Лозинський, С. В. Щербовських

ВИЗНАЧЕННЯ КІЛЬКОСТІ ЗАПАСНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ВІДНОВЛЮВАНОГО ОБ'ЄКТА З УРАХУВАННЯМ ТРИВАЛОСТІ РЕМОНТІВ

The problem of spare parts calculation for renewal item with repair time consideration using total cost function minimization is treated. Acyclic extended state space Markov reliability model for solving this problem is proposed.

Розглянуто проблему визначення кількості запасних елементів для відновлюваного об'єкта з урахуванням тривалості ремонтів із умови мінімізації функції загальних витрат. Для розв'язання проблеми запропоновано застосувати ациклічну Марковську модель надійності.

Постановка проблеми. Для безперебійного функціонування відновлюваних об'єктів необхідно забезпечити на складі наявність певної кількості запасних елементів. З погляду економії, зберігання запасних елементів вимагає витрат, а тому прагнуть звести їх кількість до нуля. З погляду надійності, для абсолютного уникнення перебоїв об'єкта через нестачу запасних елементів, їх кількість має бути максимально великою. Вказану суперечність розв'язують шляхом мінімізації функціоналу загальних витрат, пов'язаних із зберіганням та нестачею запасних елементів. Базовим елементом функціоналу загальних витрат є функція ймовірності виникнення вказаної кількості відмов об'єкта за досліджуване напрацювання. Розробка адекватного методу обчислення такої функції є важливою науковою проблемою. Зокрема, стаття присвячена визначенню для відновлюваного об'єкта з урахуваннями тривалості ремонтів функції ймовірності виникнення вказаної кількості відмов застосовуючи ациклічну Марковську модель надійності на основі розширення простору станів.

Практична цінність розв'язання вказаної проблеми полягає у розробці адекватного методу визначення кількості запасних елементів для відновлюваних об'єктів з урахуваннями тривалості ремонтів. Теоретична цінність полягає у подальшому розвитку положень математичного апарату Марковських моделей для аналізу показників надійності відновлюваних об'єктів з урахуванням тривалості ремонтів.

Аналіз останніх досліджень. Визначення кількості запасних елементів для технічного об'єкта зазвичай здійснюють статистичними методами [1]. З цією метою аналізують відмови об'єкта та витрати, спричинені ними, і, за кілька ітерацій, наближаються до оптимального значення кількості запасних елементів. Для відповідальних та високовартісних технічних об'єктів такий підхід є неприйнятним через високий ризик перебоїв на початковому етапі експлуатації, а також через те, що оптимальна кількість запасних елементів зі зростанням напрацювання змінюється. Розроблено ряд інженерних методів для попередньої оцінки кількості запасних елементів [2, 3]. Проте такі методи ґрунтуються на апроксимації нормальним розподілом і забезпечують лише наближену оцінку. У [4, 5] запропоновано адекватніші моделі надійності для визначення кількості запасних елементів, проте вони не враховують впливу тривалості ремонту. У [6] подана модель надійності, яка враховує тривалість ремонту, але лише для стаціонарного випадку. У [7, 8] розглянуто застосування методу Монте–Карло для оцінки кількості запасних елементів. Недоліком такого методу є низька обчислювальна ефективність та спотворення результату флуктуаціями, що створює метод. Перспективним напрямом щодо розв'язання вказаної проблеми є застосування перетворення циклічних Марковських моделей в ациклічні [9, 10].

Проте таке перетворення вимагає подальших досліджень щодо застосування його для Марковських моделей на основі розширення простору станів [11].

Постановка завдань. 1. Побудувати ациклічну Марковську модель надійності на основі розширення простору станів для відновлюваного об'єкта з урахуванням тривалості ремонтів. Застосовуючи отриману модель надійності, визначити для досліджуваного об'єкта кількість запасних елементів.

2. Підтвердити коректність та адекватність отриманого результату на основі застосування альтернативних методів визначення кількості запасних елементів.

Викладення основного матеріалу. У початковий момент часу об'єкт перебуває у справному стані, який позначимо як S_0 (рис. 1).

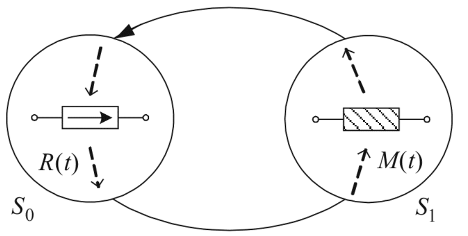

Рис. 1. Узагальнена діаграма станів та переходів для відновлюваного об'єкта з урахуванням тривалості ремонтів.

У стані S_0 напрацювання об'єкта розподілено за моделлю відмов $R(t)$. Унаслідок відмови об'єкт покидає справний стан S_0 і переходить у несправний стан S_1 Приймаємо припущення, що засоби технічної діагностики ідеальні. У стані S_1 відбувається ремонт об'єкта, тривалість якого розподілена за моделлю відновлення $M(t)$. Ремонт полягає у заміні вказаного об'єкта на новий. Внаслідок відновлення об'єкт покидає несправний стан S_1 і повертається у справний S_0. Наведений вище процес функціонування циклічно повторюється.

Приймаємо, що моделі відмов та відновлення об'єкта задані канонічними фазовими розподілами [12]. Модель відмов задана матрицями $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{p}(0)$ п'ятого порядку, а модель відновлення – $\mathbf{\Lambda}_m$, $\mathbf{p}_m(0)$ другого порядку:

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \lambda\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda\end{bmatrix},\quad \mathbf{p}(0)=\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{bmatrix},\quad \mathbf{\Lambda}_m=\begin{bmatrix}-\mu & \mu\\ 0 & -\mu\end{bmatrix},\quad \mathbf{p}_m(0)=\begin{bmatrix}c_{m0}\\ c_{m1}\end{bmatrix}.$$

де c_i, λ_j – параметри моделі відмов, для i = 0, 1, … 4; c_{mi}, μ – параметри моделі відновлення, для i = 0, 1.

Для порівняння результатів, отриманих на основі застосування Марковської моделі на основі розширення простору станів та звичайної Марковської моделі, визначимо значення параметрів експоненціальних моделей відмов λ_e, μ_e та відновлення, які відповідають значенням параметрів заданих моделей відмов та відновлення. За критерій відповідності приймаємо мінімум середньоквадратичної похибки між кривими функції імовірності експоненціального та заданого розподілів.

Кількість запасних елементів k визначаємо з умови, щоб витрати, пов'язані із зберіганням та нестачею запасних елементів, були мінімальними. Приймаємо, що витрати спричинені виникненням одного перебою становить x, а витрати на закупівлю та зберігання одного запасного елемента становить y. За таких позначень, сумарні витрати обчислюються згідно з виразом:

$$Q(k)=y\cdot k+\sum_{i=k}^{Na\max} x\cdot(i-k)\cdot P(i)\,, \qquad (1)$$

де $N_{a\max}$ – максимальна кількість відмов відновлюваного об'єкта, яка реально можлива за досліджуваний час; i – біжучий коефіцієнт; $P(i)$ – функція ймовірності виникнення вказаної кількості відмов.

Враховуючи, що середні витрати, спричинені виникненням перебоїв, при збільшенні кількості запасних елементів стрімко спадають, а витрати на закупівлю запасних елементів при збільшенні їх кількості пропорційно зростають, крива сумарних витрат матиме мінімум. Кількість запасних елементів, яка відповідає мінімуму і є результатом.

Додатково визначимо значення довірчої імовірності, що за вказаної кількості запасних елементів система не зазнає перебою:

$$\gamma = \sum_{n=i}^{k} P(i) . \qquad (2)$$

Пропонуємо для відновлюваного об'єкта з урахуванням тривалості ремонту функцію ймовірності виникнення вказаної кількості відмов визначати так. Нехай для об'єкта відома Марковська модель на основі розширення простору станів (рис. 2).

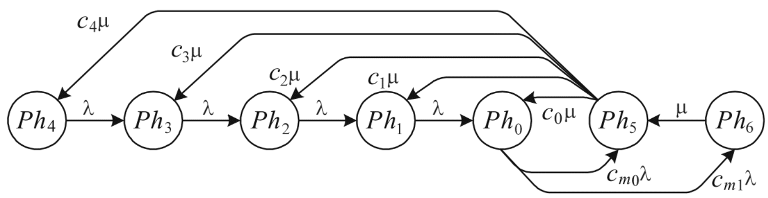

Рис. 2. Циклічна діаграма станів та переходів для відновлюваного об'єкта з урахуванням тривалості ремонтів.

Таку модель формують, застосовуючи правила [11]. Оскільки переходи, які відповідають відновленню, повертають систему у вихідні фази, то таку діаграму системи назвемо циклічною. Згідно з позначеннями, поданими на рис. 2, задамось, що вектор-стовбець змінних інтегрування

$$\mathbf{p}_C(t) = \begin{bmatrix} p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & p_3(t) & p_4(t) \end{bmatrix}^T ,$$

де p_j – функція імовірності фази Ph_j, для j = 0, 1, 2, 3, 4.

Для заданого так вектор-стовпця $\mathbf{p}_C(t)$ матриця інтенсивності переходів $\mathbf{\Lambda}_C$ та вектор-стовбець початкових умов $\mathbf{p}_C(0)$ такі:

$$\mathbf{\Lambda}_C = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & c_0\mu & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & c_1\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & c_2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \lambda & c_3\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & c_4\mu & 0 \\ c_{m0}\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & \mu \\ c_{m1}\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p}_C(0) = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ґрунтуючись на циклічній діаграмі станів та переходів системи, сформуємо ациклічну діаграму станів та переходів об'єкта. В ациклічній діаграмі переходи, які відповідають відновленню, переводять елемент у наступний справний стан, що забезпечує можливість розрахунку кількості відмов. Якщо відома циклічна Марковська модель об'єкта, то ациклічну $\mathbf{\Lambda}_A$, $\mathbf{p}_A(0)$ формуємо згідно з виразом:

$$\mathbf{\Lambda}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_i & \mathbf{\Lambda}_{zeros} & \mathbf{\Lambda}_{zeros} & \dots & \mathbf{\Lambda}_{zeros} \\ \mathbf{\Lambda}_o & \mathbf{\Lambda}_i & \mathbf{\Lambda}_0 & \dots & \mathbf{\Lambda}_{zeros} \\ \mathbf{\Lambda}_{zeros} & \mathbf{\Lambda}_o & \mathbf{\Lambda}_i & \dots & \mathbf{\Lambda}_{zeros} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{\Lambda}_{zeros} & \mathbf{\Lambda}_{zeros} & \mathbf{\Lambda}_{zeros} & \dots & \mathbf{\Lambda}_i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p}_A(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_c(0) \\ \mathbf{p}_{zeros}(0) \\ \mathbf{p}_{zeros}(0) \\ \dots \\ \mathbf{p}_{zeros}(0) \end{bmatrix},$$

де $\mathbf{\Lambda}_i$ – матриця інтенсивності внутрішніх переходів ациклічної моделі; $\mathbf{\Lambda}_o$ – матриця інтенсивності зовнішніх переходів ациклічної моделі; $\mathbf{\Lambda}_{zeros}$ – нульова квадратна матриця ациклічної моделі; $\mathbf{p}_{zeros}(0)$ – нульовий вектор-стовбець.

Розмірність матриць інтенсивності переходів $\mathbf{\Lambda}_i$, $\mathbf{\Lambda}_o$ та $\mathbf{\Lambda}_{zeros}$ дорівнює розмірності матриці $\mathbf{\Lambda}_C$, а розмірність вектор-рядка $\mathbf{p}_{zeros}(0)$ дорівнює розмірності вектора $\mathbf{p}_C(0)$. Розмірність квадратної матриці $\mathbf{\Lambda}_A$ та вектор-стовпця $\mathbf{p}_A(0)$ $N_{a\,max}$ вибираємо такою, щоб імовірність виникнення останньої відмови в кінці напрацювання T не перевищувала кількості, яка дорівнює точності обчислень. Результатом розрахунку ациклічної Марковської моделі є вектор-стовбець ймовірностей фаз $\mathbf{p}_A(T)$. Додаючи між собою ймовірності фаз, які відповідають одній і тій же кількості відмов, отримаємо функцію ймовірності появи заданої кількості відмов об'єкта $P(i)$.

Матриці інтенсивності переходів ациклічної моделі надійності $\mathbf{\Lambda}_i$ та $\mathbf{\Lambda}_o$ формуємо шляхом розкладання матриці інтенсивності переходів циклічної Марковської моделі $\mathbf{\Lambda}_C$. До матриці внутрішніх переходів належать переходи між фазами, які належать одному і тому ж стану, а також переходи, що відповідають відмові об'єкта. До матриці зовнішніх переходів належать переходи, які відповідають відновленню об'єкта:

$$\mathbf{\Lambda}_i = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ c_0\cdot\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & \mu \\ c_1\cdot\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0\cdot\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1\cdot\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2\cdot\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3\cdot\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4\cdot\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для оцінки коректності значень функції ймовірності появи заданої кількості відмов об'єкта, розрахованих за Марковською моделлю на основі розширення простору станів, сформовано перевірочні моделі надійності.

Для підтвердження достовірності значення функції ймовірності появи заданої кількості відмов об'єкта визначено, застосовуючи модель надійності на основі методу Монте–Карло. Також, для порівняння результатів, значення функції імовірності появи заданої кількості відмов об'єкта обчислено на основі ациклічної звичайної Марковської моделі надійності.

Результати розрахунку функції ймовірності появи заданої кількості відмов об'єкта виконані на основі зазначених вище моделей наведені на рис. 3.

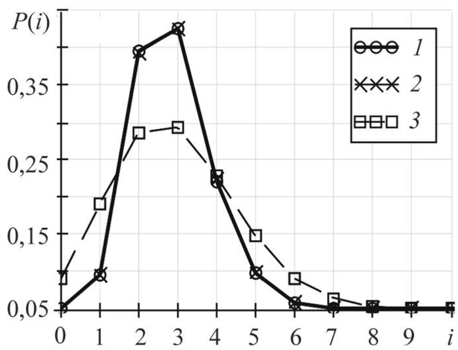

Рис. 3. Криві ймовірності появи вказаної кількості відмов для відновлюваного об'єкта з урахуванням тривалості ремонтів.

Позначення на рис. 3 такі: крива *1* (суцільна потовщена, маркер коло) – крива функції імовірності, розрахована за Марковською моделлю на основі розширення простору станів; крива *2* (суцільна, маркер хрест) – крива функції імовірності, розрахована методом Монте–Карло; крива *3* (пунктир, маркер квадрат) – крива функції імовірності, розрахована за звичайною Марковською моделлю.

Криві *1* та *2* збігаються у межах стохастичної похибки, породженої флуктаціями методу Монте–Карло. Середня величина цієї похибки для кількості ітерацій 50 000 становить $1.46 \cdot 10^{-7}$. Тривалість розрахунку значень функції ймовірності згідно із запропонованою Марковською моделлю на основі розширення простору станів у 84,5 рази менша за тривалість розрахунку згідно із відповідною моделлю на основі методу Монте–Карло. Крива *3* порівняно з кривими *1* та *2* відображає результат наближено, оскільки дійсна модель відмов замінена на експоненціальну. Інтегральна квадратична похибка між кривими *1* та *3* становить $1{,}76 \cdot 10^{-4}$ і не може бути зменшена.

Визначимо скільки необхідно мати запасних елементів для об'єкта, щоб загальні витрати, пов'язані із зберіганням та нестачею запасних елементів, були мінімальними. Результати розрахунку виразу (1) та окремих його складових на основі застосування функції ймовірності, отриманої за Марковською моделлю на основі розширення простору станів, подано на рис. 4.

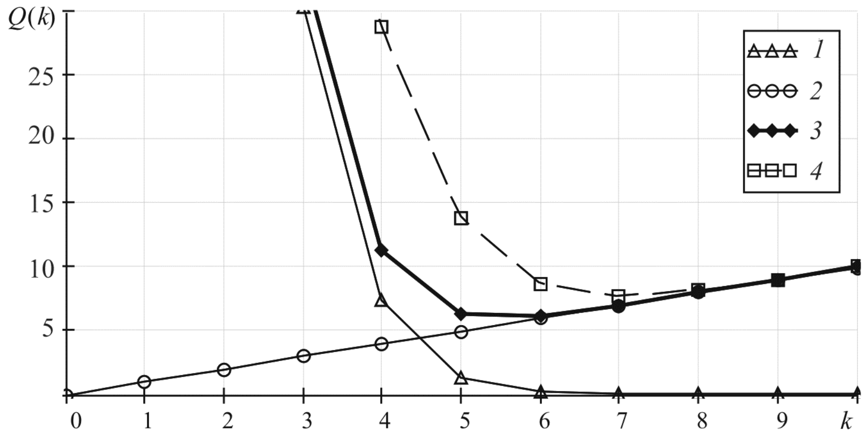

Рис. 4. Криві залежності витрат від кількості запасних елементів.

Середні витрати, спричинені виникненням перебоїв зі збільшенням кількості запасних елементів, стрімко спадають (крива *1*, суцільна, маркер трикутник). Витрати на закупівлю та зберігання запасних елементів зі збільшенням їх кількості пропорційно зростають (крива *1*, суцільна, маркер коло). Крива сумарних витрат (крива *3*, суцільна потовщена, маркер ромб) має мінімум на рівні $k = 6$.

Крива сумарних витрат розрахована за виразом (1) на основі застосування значень функції ймовірності, отриманих за звичайною Марковською моделлю (крива *4*, штрихова, маркер квадрат) має мінімум на рівні $k = 7$, тобто застосування звичайної Марковської моделі порівняно із запропонованою призводить до збільшення витрат на 13,2%.

Значення довірчої ймовірності, що за вказаної кількості запасних елементів з об'єктом не відбудеться перебою, згідно виразом (2), становить $\gamma = 09982$.

ВИСНОВКИ

Побудовано Марковську модель надійності на основі розширення простору станів для відновлюваного об'єкта з урахуванням тривалості ремонтів. Така модель надійності ґрунтується на запропонованому авторами методі перетворення циклічних Марковських моделей надійності на основі розширення простору станів у ациклічні моделі надійності. Застосовуючи таку модель надійності для досліджуваного об'єкта, розраховано кількість запасних елементів виходячи із умови мінімізації загальних витрат, пов'язаних зі збереженням та нестачею запасних елементів. Також визначено значення довірчої ймовірності, що з об'єктом не відбудеться перебою.

З метою перевірки коректності та адекватності отриманих результатів сформовано та обчислено відповідну модель надійності на основі методу Морнте–Карло, а також звичайну Марковську модель надійності. Показано, що результати, отримані на основі запропонованої моделі надійності, збігаються в межах допустимої похибки із результатами, отриманими на основі перевірочних моделей. Визначено, що запропонована модель надійності обчислює результат у понад 80 разів швидше за модель на основі Методу Монте–Карло. З'ясовано, що запропонована модель надійності є адекватнішою за звичайну Марковську модель, оскільки вона не обмежена лише експоненціальним розподілом.

Подальші дослідження скеровані на розробку методу автоматизованої побудови ациклічних Марковських моделей надійності на основі розширення простору станів для відновлюваних ненадлишкових систем.

Стаття написана у рамках проекту Ф25.4/024 фундаментальних досліджень вищих навчальних закладів, який фінансується за кошти державного бюджету.

1. *Крикавський Є. В., Чухрай Н. І., Чорнописька Н. В.* Логістика: компендіум і практикум: Навч. посіб. – К.: Кондор, 2006. – 340 с.
2. *Труханов В. М.* Надежность технических систем типа подвижных установок на этапе проектирования и испытания опытных образцов. – М.: Машиностроение, 2003. – 320 с.
3. *Надежность* технических систем: Справ. / Ю. К. Беляев, В. А. Богатырев, В. В. Болотин и др. Под ред. И. А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1985. – 608 с.
4. *Лозинський О. Ю., Щербовських С. В.* Розрахунок кількості запасних частин із заданою довірчою імовірністю для електромеханічних об'єктів з миттєвими ремонтами // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Електромеханічні та електроенергетичні системи. – 2008. – № 615. – С. 65–71.
5. *Sang-Chin Yang, Zhong-wei Du.* Criticality evaluation for spare parts initial provisioning / Reliability and Maintainability Symposium (RAMS'04). – 2004. – P. 507–513.
6. *Diallo C., Ait-Kadi D. Chelbi A.* (s,Q) Spare Parts Provisioning Strategy for Periodically Replaced Systems // Reliability, IEEE Transactions on. – 2008. – **57**, № 1. – P. 134–139.
7. *Dubi A.* The Monte-Carlo method and optimization of spare parts in complex realistic scenarios / Reliability and Maintainability Symposium (RAMS'06). – 2006 – P. 649–656.
8. *Marseguerra M., Zio E.* Basics of the Monte-Carlo Method with Application to System Reliability. – Hagen: Germany, 2002. – 141 p.
9. *Волочій Б. Ю.* Технологія моделювання алгоритмів поведінки інформаційних систем. – Львів: Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2004. – 220 с.
10. *Райншке К., Ушаков И. А.* Оценка надежности систем с использованием графов / Под ред. И. А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1988. – 208 с.
11. *Лозинський О. Ю., Щербовських С. В.* Побудова моделей надійності ремонтованих електромеханічних об'єктів на основі розширення простору станів // Вісник Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут". – 2005. – № 45. – С. 77–81.
12. *Лозинський О. Ю., Щербовських С. В.* Визначення ефективної підмножини фазових законів розподілу для утворення математичних моделей надійності ремонтованих об'єктів // Відбір і обробка інформації. – 2004. – № 21. – С. 17–22.

Національний університет "Львівська політехніка"

Одержано
01.09.2008