$k(r) = 0$ і $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$, $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_m)'$ — відповідно лівий та правий власні вектори з додатними елементами матриці $\mathbf{K}(\gamma)$ і такі, що $\boldsymbol{\nu}\mathbf{h} = 1$. Позначимо

$$C_+ = \max_{j \in E'} \frac{1}{h_j} \sup_{x \geqslant 0} \frac{\overline{F_j^0}(x)}{\int\limits_x^\infty e^{\gamma(y-x)} F_j^0(dy)}, \qquad C_- = \min_{j \in E'} \frac{1}{h_j} \inf_{x \geqslant 0} \frac{\overline{F_j^0}(x)}{\int\limits_x^\infty e^{\gamma(y-x)} F_j^0(dy)}.$$

Наслідок 1. *При* $m_1^0 < 0$ *для будь-якого* $i \in E'$ *та всіх* $u \geqslant 0$

$$C_- h_i e^{-\gamma u} \leqslant \mathrm{P}\{\xi^+ > u / x(0) = i\} \leqslant C_+ h_i e^{-\gamma u}.$$

1. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінчених ланцюгах Маркова та для напівмарківських процесів. – Київ: Інститут математики НАН України, 1998. – 320 с.
2. *Gusak D. V., Karnaukh E. V.* Matrix factorization identity for almost semi-continuous processes on a Markov chain // Theory of Stoch. Processes. – 2005. – **11(27)**, No 1–2. – P. 41–47.
3. *Grigelionis B.* Two-sided Lundberg inequalities in a markovian environment // Liet. Matem. Rink. – 1993. – **33**, No 1. – P. 30–41.
4. *Asmussen S.* Ruin probabilities. – Singapore: World Sci., 2000. – 385 p.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 30.06.2006

УДК 519.872

О. В. Коба, С. В. Пустова

Аналітична модель функціонування call-центру

(Представлено академіком НАН України І. М. Коваленком)

An analytical model of the call center operation is developed as a retrial queueing system M/M/c with abandons. The main characteristics of an effective call center operation are defined, and some graphical dependences and numerical characteristics are given.

У сучасних умовах українського та світового ринку послуг для збільшення ролі задоволення потреб клієнтів важливим фактором є взаємозв'язок із клієнтами засобами телефонного зв'язку, зокрема call-центрами.

У цілому, call-центр — загальний термін, який визначає процес обслуговування за участю людини з використанням телефону. Спочатку call-центри використовувались для обслуговування клієнтів лише за допомогою телефонних апаратів. При цьому інформація передавалась голосом оператора. Проте зараз розпочалася активна інтеграція до call-центру таких технологій, як IP-телефонія, електронна пошта, Інтернет, бази даних, факсимільний зв'язок, чат тощо. Спостерігається повсюдне вбудовування підприємствами до своєї структури call-центрів або укладання договору щодо надання послуг call-центрами стороннім організаціям. Call-центри поступово отримують ознаки широкого поширення і певного стандарту в соціальній сфері та сфері обслуговування.

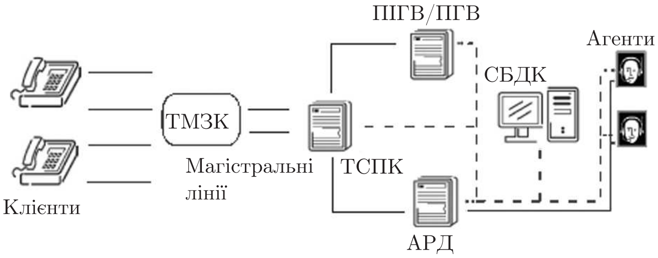

Рис. 1. Структурна схема простого call-центру: ТМЗК — телефонна мережа загального користування; ТСПК — телефонна система приватного користування; ПІГВ/ПГВ — пристрої інтерактивної голосової відповіді; АРД — автоматичний розподільник дзвінків; СБДК — сервер бази даних клієнтів

Таким чином, побудова математичної моделі функціонування call-центрів з метою визначення показників ефективності їх функціонування і оптимізації є актуальною задачею.

Досліджуючи статистичні дані функціонування call-центрів, С. Агюр та інші дослідники [1, 2] відзначають негативні наслідки нехтування повернень викликів для розрахунку показників функціонування call-центрів, зокрема оптимальної кількості місць операторів. У той же час протягом останніх 20 років інтенсивно вивчаються системи масового обслуговування (СМО) з повторними викликами [3, 4]. А отже, на сьогодні адекватною моделлю функціонування call-центрів є СМО з повторними викликами.

Структура call-центру. На рис. 1 схематично представлене устаткування, яке використовується у процесі роботи call-центру. Поряд з послугами агентів — операторів, які обслуговують дзвінки, call-центри використовують пристрої інтерактивної голосової відповіді (ПІГВ/ПГВ (interactive voice response units)). Ці спеціалізовані комп'ютери дозволяють клієнтам повідомляти їхні запити й надають можливість самообслуговування. Клієнти, які взаємодіють із ПІГВ, використовують клавіатури своїх телефонів або голоси для надання необхідної інформації, такої як номер розрахункового рахунку або ознаку типу необхідної функції чи інформації. Останні розробки в області технології розпізнавання мови дозволяють ПГВ розпізнавати складні команди клієнтів. У відповідь голосовий відповідач використовує синтезований голос для повідомлення потрібної інформації: баланс грошей на рахунку, розклад літаків тощо.

Наведемо як приклад структуру call-центру української авіакомпанії (див. рис. 1).

Клієнти, що проживають на території України, починають процес замовлення квитка, набираючи безкоштовний телефонний так званий "800"-номер. Компанія, яка надає послуги телефонної мережі загального користування (ТМЗК (public service telephone network)), що забезпечує службу "800"-го номера для авіакомпанії, знає дві важливих частини інформації про кожний дзвінок: телефонний номер того, хто дзвонить, який визначається автоматичним визначником номера (АВН (automatic number identification)), і номер, з яким з'єднується клієнт, який визначається службою визначення автоматичного виклику (СВАВ (dialed number identification service)). Відповідно ці два номери називаються АВН- і СВАВ-номери. Компанія-провайдер телефонної мережі використовує їх для з'єднання клієнтів з call-центром.

Нехай call-центр розглядуваної авіакомпанії має свій власний телефонний комутатор, який називають телефонною системою приватного користування (ТСПК (private automatic branch exchange)). Номер, який набирає клієнт, визначає місцезнаходження системи на телефонній мережі.

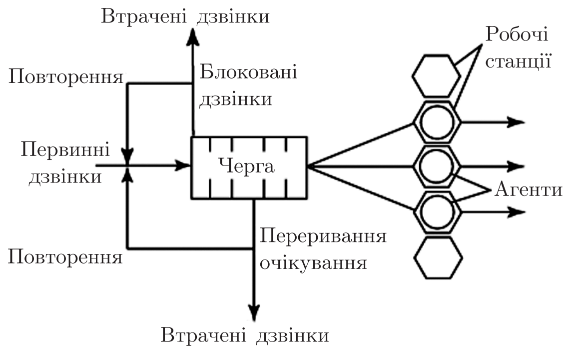

Рис. 2. Схема функціонування call-центру

ТСПК зв'язана з ТМЗК за допомогою множини телефонних ліній, які називаються магістральними і належать авіакомпанії. Якщо хоча б одна з магістральних ліній вільна, то клієнта буде з'єднано з компанією.

Дзвінки можуть бути з'єднані спочатку з ПГВ, який уточнює, що ж саме цікавить клієнтів. Наприклад, клієнтам може бути запропоновано "натиснути одиницю", якщо вони хочуть отримати інформацію про статус рейсу. Клієнтам може знадобитися з'єднання з операторами — у такому випадку дзвінок буде спрямований до агента від автоматичного розподільника дзвінків (АРД (automatic call distributor)). Це — спеціалізований комутатор, призначений для маршрутизації дзвінків. Наприклад, авіакомпанія може спеціально перенаправляти дзвінки російськомовних клієнтів до певних агентів. Такий тип ідентифікації клієнта може здійснюватися по-різному: а) за допомогою окремого резервування "800"-го номера для російськомовних клієнтів; б) за допомогою АВН, який дозволяє комп'ютерній системі call-центру визначити телефонний номер, як номер російськомовного клієнта (наприклад, номери телефонів абонентів АР Крим); в) за допомогою взаємодії з ПГВ, який може запропонувати клієнтам натиснути "3", якщо вони хочуть, щоб обслуговування проводилося російською мовою.

Клієнтам, що знаходяться у режимі очікування, може бути надана для прослуховування музика, комерційні радіопередачі або інша інформація. Якщо такі клієнти вішають трубку перш ніж їх обслужать, то кажуть про переривання. Клієнти, які не переривають обслуговування, через певний час зв'язуються з агентом. Агент з'єднаний за допомогою ПК або термінала з корпоративною інформаційною системою (КІС), яка складається зі спеціального програмного забезпечення (ПЗ) і бази даних клієнтів (БДК). ПЗ робить запити до БДК, при цьому повертається скеровуюча інформація. Для розглядуваного випадку скеровуючою інформацією є мова, якою розмовляє клієнт. Так само ПЗ може використовуватися для автоматичного відображення потрібної інформації про клієнта на моніторі робочої станції агента. Це так зване "вилітаюче вікно" (screen pop) заощаджує час агента і зменшує тривалість обслуговування.

Функціонування call-центру у загальному випадку можна уявити собі у вигляді схеми, зображеної на рис. 2. На вхід call-центру з c агентами з певною інтенсивністю надходять виклики від клієнтів. Такі дзвінки називають первинними. Якщо в момент надходження вхідного виклику будь-який з агентів вільний, то виклик отримує обслуговування, після чого залишає систему. Якщо всі агенти зайняті, то клієнта розміщують у чергу. Клієнт на цьому етапі може відмовитись очікувати на обслуговування у черзі. Він може або залишити систему назавжди, або зробити повторний виклик через певний проміжок часу. Клієнт, який знаходиться у черзі, або дочекається на обслуговування, або припинить очікування і зможе повторити виклик знову або назавжди залишить систему. У реальних системах розмір черги обмежений можливостями телекомунікаційного обладнання (наприклад, кількістю телефонних ліній, кількістю ліній ПГВ тощо). А тому, якщо на момент надходження виклику до call-центру всі агенти і всі місця у черзі будуть зайняті, то людина почує сигнал "зайнято" (при цьому кажуть, що сигнал блокується).

З рис. 2 видно, що повторення є однією зі складових вхідного потоку викликів, а тому їх ігнорування може сильно вплинути на основні показники ефективності функціонування call-центру, зокрема при визначенні оптимальної кількості каналів, необхідних для забезпечення заданого рівня обслуговування. Саме тому з усіх найрізноманітніших аспектів функціонування call-центру найбільш цікавими та важливими є питання, які пов'язані з повторними спробами додзвону клієнтів, які не змогли отримати обслуговування з першого разу.

Отже, call-центр являє собою багатоканальну СМО з вхідними потоками первинних і повторних викликів, з місцями чекання і відмовами.

Аналітична модель. Більшість реальних існуючих телефонних систем неможливо описати ані СМО типу $M/G/n/\infty$, ані СМО типу $M/G/n/0$: з одного боку, виклик, який застане всіх агентів зайнятими, отримує відмову, і тому черга в системі не утворюється; з іншого боку, часто виклик, який отримав відмову (був блокований), повторює спробу з'єднатися знову з агентом call-центру, тобто у системі утворюється потік повторних викликів.

Роботу call-центру можна уявити собі за допомогою СМО з поверненнями і втратами. Для спрощення розглянемо процес функціонування call-центру без черги: припустимо, що клієнти, які очікують на обслуговування, знаходяться на так званій орбіті. Кажуть, що клієнти, які повертаються до системи, утворюють джерело повторних викликів — орбіту. Орбіту можна розглядати як чергу, яка, проте, відрізняється від звичайної черги. Повторний виклик не може бути обслуженим одразу ж після звільнення каналу обслуговування, а лише тоді, коли на момент надходження повторного виклику будь-який з каналів обслуговування буде вільним. Розглянемо таку СМО (рис. 3).

Адекватність даної моделі реальній пояснюється тим, що політика управління більшості call-центрів полягає в тому, що клієнтів не змушують очікувати на обслуговування, а роз'єднують їх дзвінки із проханням передзвонити пізніше, при цьому не всі клієнти є досить "терплячими", щоб повторювати свої дзвінки знову, тобто виникають втрачені дзвінки.

Нехай після кількох невдалих повернень виклик залишає систему. Нехай H_j — імовірність того, що після j-ї невдалої спроби клієнт зробить іще $(j+1)$ повторення. Набір імовірностей $\{H_j, j \geqslant 1\}$ називають функцією наполегливості. Припустимо, що ймовірність повторного виклику після невдалої повторної спроби не залежить від кількості попередніх повторних спроб (тобто $H_2 = H_3 = \cdots$).

Нехай є c каналів обслуговування, на які надходить пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ. У контексті телекомунікаційних технологій їх називають первинними. Якщо при надходженні заявки до системи будь-який із каналів обслуговування вільний, заявка негайно займає цей канал і залишає систему після обслуговування. Однак, якщо на момент надходження нового виклику всі c каналів зайняті, тоді з імовірністю $(1 - H_1)$ виклик залишає систему без обслуговування і з імовірністю $H_1 > 0$ формує джерело повторних викликів. Кожне таке джерело утворює пуассонівський процес повторних викликів з параметром ν. Якщо на момент надходження повторного виклику будь-який канал обслуговування вільний, то виклик обслуговується і після обслуговування залишає систему, а джерело по-

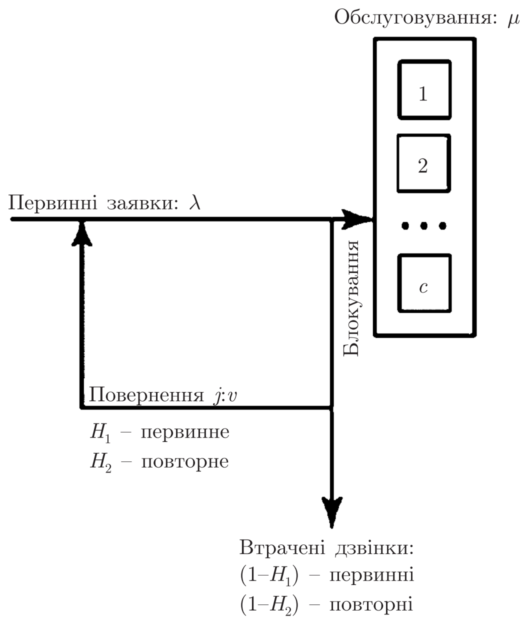

Рис. 3. Call-центр як СМО типу $M/M/c$ з поверненнями і втратами

вернень зникає. В іншому випадку, тобто якщо усі канали зайняті, з імовірністю $(1 - H_2)$ заявка залишає систему або з імовірністю H_2 відправляється на орбіту і робить спробу знову отримати обслуговування; і так доти, доки виклик не потрапить у канал або назавжди залишить систему без обслуговування.

Нехай час обслуговування розподілений експоненціально з параметром μ. Без втрати загальності можна припустити, що $\mu = 1$. Припустимо, що інтервали між надходженнями первинних і повторних викликів і час обслуговування є взаємонезалежними.

Функціонування системи можна описати за допомогою двовимірного процесу $(C(t), N(t))$, де $C(t)$ — кількість зайнятих каналів обслуговування, а $N(t)$ — кількість клієнтів на орбіті в момент t. Враховуючи викладені вище припущення, двовимірний процес є марковським, визначеним на множині станів $S = \{0, 1, \ldots, c\} \times \{0, 1, \ldots\}$. Випишемо інтенсивності переходів процесу $(C(t), N(t))$ за проміжок часу $(t, t + dt)$, $t \geqslant 0$:

а) при $0 \leqslant i \leqslant c - 1$, $0 \leqslant j < \infty$

$$q_{(ij)(nm)} = \begin{cases} \lambda, & (n,m) = (i+1, j) \\ i\mu, & (n,m) = (i-1, j), \\ j\nu, & (n,m) = (i+1, j-1), \\ -(\lambda + i\mu + j\nu), & (n,m) = (i, j), \\ 0, & \text{в інших випадках;} \end{cases} \qquad (1)$$

б) при $i = c$, $0 \leqslant j < \infty$

$$q_{(cj)(nm)} = \begin{cases} \lambda H_1, & (n,m) = (c, j+1), \\ j\nu(1 - H_2), & (n,m) = (c, j-1), \\ c\mu, & (n,m) = (c-1, j), \\ -(\lambda H_1 + j\nu(1 - H_2) + c\mu), & (n,m) = (c, j), \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \qquad (2)$$

З практичної точки зору, найбільш важливими показниками якості обслуговування клієнтів call-центру є: а) стаціонарна ймовірність блокування (імовірність того, що при надходженні заявки всі канали зайняті) $B = \lim_{t\to\infty} P\{C(t) = c\}$; б) стаціонарна середня кількість викликів, що знаходяться на орбіті, $N = \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}N(t)$; в) середня кількість зайнятих каналів обслуговування $Y = \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}C(t)$; г) імовірність того, що виклик буде втрачено, $L = 1-Y\mu/\lambda$.

Ергодичність СМО. Розглянемо функцію Ляпунова $\varphi(i,j) = ai + j$, де a — додатний параметр, який буде визначено далі. Середні відхилення визначаються як:

$$y_{ij} = \sum_{(nm)\neq(ij)} q_{(ij)(nm)}(\varphi(n,m) - \varphi(i,j)), \qquad i,n \in [0,c], \quad j,m \in [0,\infty).$$

Обчислимо різницю $\varphi(n,m) - \varphi(i,j) = a(n-i) + m - j$:

а) при $0 \leqslant i \leqslant c-1$, $0 \leqslant j < \infty$

$$\varphi(n,m) - \varphi(i,j) = \begin{cases} a, & (n,m) = (i+1,j), \\ -a, & (n,m) = (i-1,j), \\ a-1, & (n,m) = (i+1,j-1); \end{cases}$$

б) при $i = c$, $0 \leqslant j < \infty$

$$\varphi(n,m) - \varphi(c,j) = \begin{cases} 1, & (n,m) = (c,j+1), \\ -1, & (n,m) = (c,j-1), \\ -a, & (n,m) = (c-1,j). \end{cases}$$

Тоді, враховуючи (1), (2), маємо

$$y_{ij} = \begin{cases} \lambda a + j\nu(a-1) + i\mu(-a), & 0 \leqslant i \leqslant c-1, \quad 0 \leqslant j < \infty, \\ \lambda H_1 \cdot 1 + c\mu(-a) + j\nu(1-H_2)\cdot(-1), & i = c, \quad 0 \leqslant j < \infty. \end{cases}$$

Таким чином, для всіх $i = 0,1,\ldots,c$ існує

$$\lim_{j\to\infty} y_{ij} = L_i = \begin{cases} (a-1)\cdot\infty, & 0 \leqslant i \leqslant c-1, \\ -\infty, & i = c, \quad H_2 < 1, \\ \lambda H_1 - ac\mu, & i = c, \quad H_2 = 1. \end{cases}$$

Процес $(C(t), N(t))$ є ергодичним, якщо всі змінні L_i від'ємні [5, 6]. Для $H_2 < 1$ це означає, що невід'ємний параметр a повинен бути меншим за одиницю. Оскільки таке значення a можна завжди знайти, процес $(C(t), N(t))$ є ергодичним для будь-якої інтенсивності вхідного потоку, якщо $H_2 < 1$. Для $H_2 = 1$ умова $L_c < 1$ означає, що a повинно лежати в інтервалі $(\lambda H_1/c\mu; 1)$. Таке a можна знайти, якщо цей інтервал не є порожнім, тобто $\lambda H_1/\mu < c$. Це достатня умова ергодичності для випадку $H_2 = 1$. Насправді ж, дана умова водночас є і необхідною умовою ергодичності. Це випливає з формули для середньої кількості зайнятих каналів (середня кількість зайнятих каналів Y має бути менша за загальну кількість наявних каналів c).

Показники ефективності функціонування. Позначимо через $p_{ij}(t) = P\{C(t) = i, N(t) = j\}$ імовірність того, що в момент t система знаходиться в стані (i,j), тобто в системі зайнято i каналів і на орбіті знаходиться j викликів.

Для стаціонарного режиму визначені ймовірності задовольняють систему рівнянь Колмогорова:

$$(\lambda + i + j\nu)p_{ij} = \lambda p_{i-1,j} + (j+1)\nu p_{i-1,j+1} + (i+1)p_{i+1,j}, \quad 0 \leqslant i \leqslant c-1, \quad 0 \leqslant j < \infty, \tag{3}$$

$$(\lambda H_1 + j\nu(1-H_2) + c)p_{cj} = \lambda p_{c-1,j} + (j+1)\nu p_{c-1,j+1} + \lambda H_1 p_{c,j-1} + \\ + (j+1)\nu(1-H_2)p_{c,j+1}, \qquad i = c, \qquad 0 \leqslant j < \infty, \tag{4}$$

і умову нормування

$$\sum_{i=0}^{c}\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1. \tag{5}$$

Позначимо твірні функції $p_i(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_{ij}z^j$, $0 \leqslant i \leqslant c$. Тоді рівняння (3), (4) набувають вигляду

$$(\lambda + i)p_i(z) + \nu z p_i'(z) = \lambda p_{i-1}(z) + \nu p_{i-1}'(z) + (i+1)p_{i+1}(z), \qquad 0 \leqslant i \leqslant c-1, \tag{6}$$

$$(\lambda H_1(1-z) + c)p_c(z) = \lambda p_{c-1}(z) + \nu p_{c-1}'(z) + \nu(1-H_2)(1-z){p'}_c(z), \qquad i = c. \tag{7}$$

Введемо двовимірну твірну функцію $p(x,z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x^i p_i(z)$, $0 \leqslant i \leqslant c$. Тоді з останніх двох рівнянь маємо

$$\lambda(1-x)p(x,z) + \nu(z-x)p_z'(x,z) + (x-1)p_x'(x,z) + \lambda x^c(x-1)p_c(z) + \\ + \lambda H_1 x^c(1-z)p_c(z) + \nu(1-H_2)x^c(z-1)p_c'(z) - \nu x^c(z-x)p_c'(z) = 0.$$

Диференціюючи це рівняння відповідно за z, x, xx, xz, zz у точці $x=1$, $z=1$ отримуємо

$$\nu N - \lambda H_1 B - \nu H_2 N_c = 0, \tag{8}$$

$$\lambda + \nu N - Y - \lambda B - \nu N_c = 0, \tag{9}$$

$$\lambda Y + \nu p_{xz}'' - p_{xx}'' - \lambda c B - \nu c N_c = 0, \tag{10}$$

$$-\lambda N - \nu p_{zz}'' + (1+\nu)p_{xz}'' + \lambda N_c - \nu H_2 c N_c - \lambda H_1 c B + \nu p_{czz}'' = 0, \tag{11}$$

$$\nu p_{zz}'' - \lambda H_1 N_c - \nu H_2 p_{czz}'' = 0, \tag{12}$$

де $N = \mathrm{E}N(t) = p_z'(1,1)$, $B = P\{C(t) = c\} = p_c(1)$, $Y = \mathrm{E}C(t) = p_x'(1,1)$, $N_c = \mathrm{E}\{N(t); C(t) = c\} = p_c'(1)$.

Виокремлюючи з рівнянь (8), (9) змінну N_c, отримуємо

$$\nu(1-H_2)N = \lambda H_2 + \lambda(H_1 - H_2)B - H_2 Y.$$

У випадку $H_2 < 1$ це дозволяє нам виразити середню кількість викликів на орбіті N у термінах розподілу кількості зайнятих каналів:

$$N = \frac{\lambda H_2 + \lambda(H_1 - H_2)B - H_2 Y}{\nu(1-H_2)}.$$

Для випадку $H_2 = 1$, виокремлюючи з рівнянь (8)–(12) змінні N_c, p''_{xz}, p''_{zz}, p''_{czz} і беручи до уваги, що $p''_{xx}(1,1) = \mathrm{D}C^2(t) - \mathrm{E}C(t)$, одержуємо

$$Y = \lambda - \lambda(1 - H_1)B,$$

$$N = \frac{1+\nu}{\nu(c - \lambda H_1)}\left[\lambda + \lambda^2 - \mathrm{E}C^2(t) - \lambda(1 - H_1)\left(\lambda + c + 1 - \frac{\lambda H_1}{1+\nu}\right)B\right].$$

Виокремлюючи N з рівнянь (8)–(9), отримуємо

$$Y = \lambda - \lambda(1 - H_1)B - \nu(1 - H_2)N_c.$$

Для розв'язання системи рівнянь (3)–(5) чисельним методом часто використовується метод, розглянутий Уїлкінсоном (Wilkinson), який пропонує замінити вихідну СМО з нескінченною ємністю орбіти (максимальною кількістю викликів на орбіті) системою з обмеженою досить великою константою M ємністю орбіти. Тоді система рівнянь (3)–(5) буде скінченною, а СМО — ергодичною за будь-яких умов. Маємо

$$\begin{aligned}&(\lambda + i + j\nu)p_{ij}^M = \lambda p_{i-1,j}^M + (j+1)\nu p_{i-1,j+1}^M + (i+1)p_{i+1,j}^M,\\ &0 \leqslant i \leqslant c-1, \qquad 0 \leqslant j \leqslant M-1,\end{aligned} \tag{13}$$

$$(\lambda + i + M\nu)p_{iM}^M = \lambda p_{i-1,M}^M + (i+1)p_{i+1,M}^M, \qquad 0 \leqslant i \leqslant c-1, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&(\lambda H_1 + j\nu(1 - H_2) + c)p_{cj}^M = \lambda p_{c-1,j}^M + (j+1)\nu p_{c-1,j+1}^M + \lambda H_1 p_{c,j-1}^M +\\ &\qquad + (j+1)\nu(1 - H_2)p_{c,j+1}^M, \qquad 0 \leqslant j \leqslant M-1,\end{aligned} \tag{15}$$

$$(c + M\nu(1 - H_2))p_{cM}^M = \lambda p_{c-1,M}^M + \lambda H_1 p_{c,M-1}^M, \tag{16}$$

$$\sum_{i=0}^{c}\sum_{j=0}^{M} p_{ij} = 1. \tag{17}$$

де M — ємність орбіти.

Система (13)–(17) може бути розв'язана на комп'ютері за допомогою стандартних процедур. Однак, використовуючи спеціальну форму цих рівнянь, імовірності $p_{ij}^{(M)}$ можуть бути знайдені за допомогою рекурсивного алгоритму.

Покажемо, що при $M \to \infty$ показники функціонування СМО з обмеженою ємністю орбіти наближаються до показників функціонування вихідної СМО. З табл. 1, де наведено

Таблиця 1. Результати чисельних досліджень. Залежність імовірності блокування B^M і середньої ємності орбіти N^M від значення обмеження M ($c = 10$, $\lambda = 8$, $\nu = 15$)

M	B^M	N^{M}
0	0,121661064	0
10	0,34633607	1,319351429
20	0,367794042	1,763403632
30	0,370144179	1,849197286
50	0,370431704	1,864710385
100	0,370435175	1,865009201
1000	0,370435175	1,865009209
2000	0,370435175	1,865009209

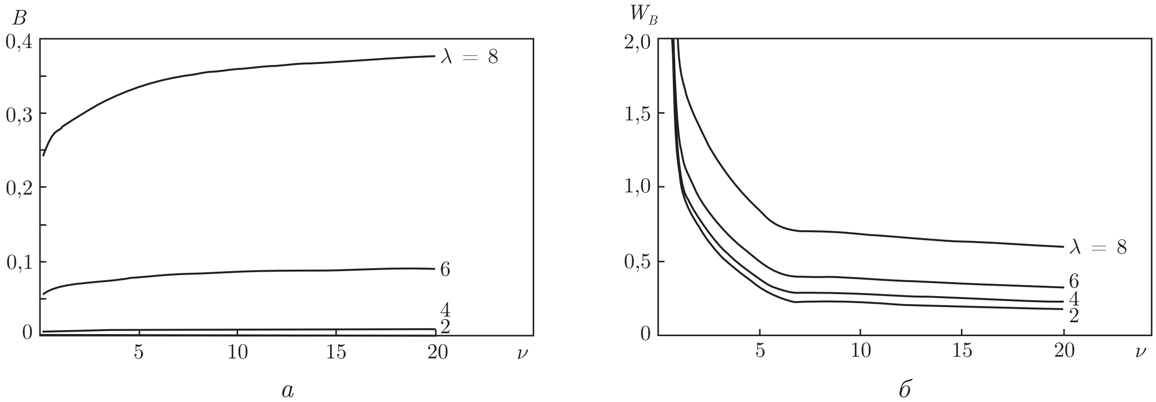

Рис. 4. Залежність імовірності блокування (a) та відносного часу очікування ($б$) від інтенсивностей первинних і повторних викликів ($H_1 = H_2 = 1$, $c = 10$)

залежність імовірності блокування і середньої кількості викликів на орбіті від значення M, видно, що зі збільшенням рівня обмеження ємності орбіти точність обчислень збільшується, а оскільки результати для $M = 1000$ і $M = 2000$ збігаються до останнього знаку після коми, то можна вважати, що чисельні результати для показників системи будуть досить точними при достатньо великому M.

Якість обслуговування клієнтів call-центру характеризується кількома показниками ефективності функціонування. Середній час очікування $W = N/\lambda$ (за формулою Літтла) на орбіті зазвичай вважається найважливішою серед цих характеристик. Однак W є середнім значенням для усіх дзвінків, навіть тих, які не очікували, а одразу ж отримали обслуговування. Більш глибоке розуміння дає ймовірність блокування B (імовірність того, що час очікування додатний і відмінний від нуля) і відносний середній час очікування $W_B = W/B$ (визначає додатний і відмінний від нуля час очікування). У результаті розв'язання системи (13)–(17) отримані залежності ймовірності блокування (рис. 4, a) та відносного часу очікування (рис. 4, $б$) від інтенсивностей первинних і повторних викликів.

1. *Aguir M. S., Karaesmen F., Aksin Z., Chauvet F.* The impact of retrials on call center performance // OR Spectrum. – 2004. – **26(3)**. – P. 353–376.
2. *Aguir M. S., Aksin O. Z., Karaesmen F., Dallery Y.* On the interaction between retrials and sizing of call centers. – April, 2006. – available at http://home.ku.edu.tr/zaksin/Rappls_z.pdf.
3. *Falin G. I., Templeton J. G. C.* Retrial queues. – London: Chapman and Hall, 1997. – 395 p.
4. *Yang T., Templeton J. G. C.* A survey on retrial queues // Queueing Systems. – 1987. – **2**. – P. 201–233.
5. *Tweedie R. L.* Sufficient conditions for regularity, recurrence and ergodicity of Markov processes // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1975. – No 78, part 1. – P. 125–136.
6. *Malyshev V. A., Menshikov M. V.* Ergodicity, continuity and analyticity of countable Markov chains // Proc. Moscow Math. Soc. – 1979. – No 39. – P. 3–48.
7. *Whitt W.* Understanding the efficiency of multi-server service systems // Manag. Sci. – 1992. – **38(5)**. – P. 708–723.

Національний авіаційний університет, Київ
Надійшло до редакції 03.07.2006