ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.08.016
УДК 681.5

В.И. Гриценко, Л.С. Житецкий, К.Ю. Соловчук

Международный научно-учебный центр информационных технологий и систем
НАН Украины и МОН Украины, Киев
E-mail: vig@irtc.org.ua, leonid_zhiteckii@i.ua, solovchuk.ok@gmail.com

Предельные возможности метода псевдообращения для управления линейными многосвязными объектами без памяти: гарантированные результаты

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В.И. Гриценко

Статья касается дискретного управления линейными многосвязными объектами без памяти с использованием подхода, основанного на псевдообращении моделей. Она отвечает на вопросы, относящиеся к областям применимости этого подхода. Цель статьи состоит в том, чтобы выявить некоторые асимптотические особенности замкнутых систем управления, содержащих псевдообратные модели в их петлях обратной связи. Рассматриваются объекты без памяти, имеющие любые ненулевые матрицы коэффициентов усиления, а именно, анализируются классы квадратных невырожденных и вырожденных матриц, а также прямоугольных матриц произвольного ранга. Отдельно изучается случай, когда эти матрицы известны, и случай, когда нет полной информации об их элементах. Вводится предположение, что имеются неизмеряемые произвольные, но ограниченные внешние возмущения, границы которых могут быть, вообще говоря, неизвестны. Получены три важных результата об асимптотическом поведении систем управления с псевдообратными моделями. Во-первых, показано, что при отсутствии неопределенности всегда существует положение равновесия этих систем и гарантируется их устойчивость и оптимальность. Во-вторых, предложен новый эффективный закон управления для стабилизации плохо обусловленных объектов с известными матрицами коэффициентов усиления. В-третьих, установлено несколько условий, гарантирующих существование положения равновесия и дисипативность системы управления с неопределенностями. Даны также асимптотические оценки верхних границ норм вектора управляющих воздействий и вектора выходных переменных.

Ключевые слова: *многосвязный объект без памяти, замкнутая система управления, псевдообратная модель, положение равновесия, устойчивость, оптимальность, диссипативность.*

Эффективным инструментом для управления многосвязными объектами без памяти (статическими объектами) с квадратной невырожденной матрицей коэффициентов усиления выступает, как известно, метод обратного оператора, восходящий к пионерным работам отечественных исследователей первой половины 60-х годов XX века. Сравнительно недавно в рамках теории псевдообращения матриц [1] удалось решить задачу оптимального управления линейными многосвязными объектами с произвольными, но известными квадратными и прямоугольными матрицами коэффициентов усиления при отсутствии внешних возмущений [2]. Позже в [3] на основе метода псевдообращения была формально решена задача синтеза оптимальных систем управления тем же классом объектов с ограниченными возмущениями. Достаточные условия устойчивости и диссипативности систем управления многосвязными линейными и нелинейными объектами по линейным псевдообратным моделям при наличии параметрических неопределенностей установлены в [4, 5].

Настоящая работа отвечает на вопросы: какова область применимости метода псевдообращения для управления линейными многосвязными объектами без памяти при полной и неполной информации о матрицах коэффициентов усиления?

1. Постановка задачи. Рассматривается многосвязный объект без памяти, который функционирует в дискретном времени $n = 0, 1, 2, \dots$ и описывается линейным разностным уравнением

$$y_n = Bu_{n-1} + v_n. \tag{1}$$

В этом уравнении $y_n = [y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(m)}]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^m$ — вектор выходных переменных, доступных для измерения в каждый дискретный момент времени n $(n = 1, 2, \dots)$; $u_n = [u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(r)}]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^r$ — вектор управляющих воздействий, отнесенный к тому же n-му моменту времени; $v_n = [v_n^{(1)}, \dots, v_n^{(m)}]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^m$ — вектор аддитивных неконтролируемых возмущений в момент n; $B = (b^{(ij)}) \in \mathbf{R}^{m \times r}$ — матрица коэффициентов усиления объекта, представляющая собой фиксированную (ненулевую) матрицу с элементами $b^{(ij)}$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, r$) и рангом $\operatorname{rank} B \leqslant \min\{r, m\}$ (T — символ транспонирования). Считается далее, что число выходных переменных не меньше числа управляющих воздействий: $r \leqslant m$ $(1 \leqslant \operatorname{rank} B \leqslant r)$.

Вводится предположение, что $v^{(i)} := \{v_n^{(i)}\} \in \ell_\infty$ $(i = 1, \dots, m)$ — скалярные последовательности, ограниченные в ∞-норме: $\| v^{(i)} \|_\infty := \sup_{1 \leqslant n < \infty} | v_n^{(i)} | < \infty$ (в обозначениях пространства ℓ_∞ и ∞-нормы $\| x^{(i)} \|_\infty$ бесконечной последовательности $\{x_n^{(i)}\}$: $x_n^{(i)} \in \mathbf{R}$, активно используемых в современной теории управления; см., например, [6, с. 29]). Более определенно предполагается, что $\| v^{(i)} \|_\infty \leqslant \varepsilon^{(i)} < \infty$, $i = 1, \dots, m$; при этом числа $\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(m)}$ в принципе не обязательно должны быть известны конструктору системы управления. Итак,

$$\| v_n \|_2 \leqslant \varepsilon \quad \forall n \in [0, \infty) \ \Rightarrow \ v := \{v_n\} \in \ell_\infty^m \ \Rightarrow \ \| v \|_\infty \leqslant \varepsilon, \tag{2}$$

где $\varepsilon = +\sqrt{[\varepsilon^{(1)}]^2 + \dots + [\varepsilon^{(m)}]^2}$, $\| x \|_2 := +\sqrt{x^{\mathrm{T}} x}$ — евклидова норма вектора x, а $\ell_\infty^m = \underbrace{\ell_\infty \times \dots \times \ell_\infty}_{m}$.

В рамках такого предположения можно вообразить, что при каждом $n = 0, 1, 2, \dots$ вектор v_n зависит от своеобразного параметра “случая” ω: $v_n = v_n(\omega)$, при этом $v_n(\omega) \in \Omega$, где $\Omega \subseteq [-\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(1)}] \times \dots \times [-\varepsilon^{(m)}, \varepsilon^{(m)}]$.

Пусть $y^0 = [y^{0(1)}, \dots, y^{0(m)}]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^m$ — вектор заданных (желаемых) значений соответствующих выходных переменных. Рассматривается случай, когда $0 < \| y^0 \| < \infty$. В этом случае, по крайней мере, одно из m заданных значений $y^{0(i)}$ должно быть ненулевым: $| y^{0(1)} | + \dots + | y^{0(m)} | \neq 0$.

Обозначим B_0 некоторую фиксированную $m \times r$-матрицу, имеющую смысл матрицы коэффициентов усиления опорной (номинальной) линейной модели объекта. В соответствии с методом псевдообращения [3] закон управления, ориентированного на стабилизацию выхода y_n объекта (1) в некоторой окрестности точки y^0, строится в форме универсальной итерационной процедуры

$$u_n = u_{n-1} + B_0^+ e_n. \tag{3}$$

Здесь

$$e_n = y^0 - y_n \tag{4}$$

— вектор текущих ошибок замкнутой системы управления объектом (1), а $B_0^+ \in \mathbf{R}^{r\times m}$ — матрица, псевдообратная матрице B_0.

Замечание 1. Согласно [1, теорема 3.4] общая формула

$$B_0^+ = \lim_{\delta\to 0}(B_0^{\mathrm{T}} B_0 + \delta^2 I_r)^{-1} B_0^{\mathrm{T}},$$

в которой I_N — заимствованное из [7, с. 9] обозначение единичной матрицы порядка N, позволяет найти $B_0^+ = (\beta_0^{(ji)})$ при любой матрице $B_0 \in \mathbf{R}^{r\times m}$.

Требуется исследовать предельные возможности управления объектами (1) методом псевдообращения, а именно формально установить условия, при выполнении которых гарантируется, что в рамках предположений (2) система управления (1), (3), (4) будет иметь определенные свойства: устойчивость, диссипативность (предельную ограниченность всех сигналов) и оптимальность.

2. Решение задачи управления при полной информации о статической характеристике объекта. В случае, когда априорная неопределенность относительно элементов $b^{(ij)}$ матрицы B, описывающей статическую характеристику объекта (1), отсутствует, опорную модель естественным образом можно сделать адекватной объекту, полагая $B_0 = B$. При таком выборе матрицы B_0 процедура (3) приобретает вид

$$u_n = u_{n-1} + B^+ e_n. \tag{5}$$

При этом если $r = m$, а $\det B \neq 0$, то согласно (5) она принимает форму

$$u_n = u_{n-1} + B^{-1} e_n, \tag{6}$$

поскольку в этом случае $B^+ = B^{-1}$; см., например, [1, упражнение 3.5.1].

Предельные возможности метода псевдообращения для управления объектом (1) с полной информацией о матрице B определяют следующие фундаментальные результаты [3, 5].

1. Положение равновесия системы управления (1), (4), (5) всегда существует (независимо от ранга матрицы B) и определяется парой векторов $u^{\mathrm{e}} = Q_u u_0 + B^+ y^0$, $y^{\mathrm{e}} = Bu^{\mathrm{e}}$, где $Q_u := I_r - B^+ B$; при этом в единственном случае, когда $\operatorname{rank} B = r$, множество равновесных точек $E_u := \{u^{\mathrm{e}}\}$ — одноточечное множество, содержащие вектор $u^{\mathrm{e}} = B^+ y^0$, а во всех остальных случаях E_u — связное неодноточечное множество, представляющее собой линейное многообразие в $\mathbf{R}^r$ размерности $\dim E_u = r - \operatorname{rank} B$.

2. В условиях (2) эта система диссипативна по состоянию (u_n, y_n):

$$\limsup_{n\to\infty} \| y_n \|_2 \leqslant \| BB^+ \|_2 \| y^0 \|_2 + \| Q_e \|_2 \varepsilon + 2\varepsilon \ < \infty,$$
$$\limsup_{n\to\infty} \| u_n - u^{\mathrm{e}} \|_2 \leqslant \| B^+ \|_2 \varepsilon \ < \infty, \tag{7}$$

где $Q_e := I_m - BB^+$, а $\| P \|_2$ — спектральная норма матрицы P, определяемая как $\| P \|_2 := \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \lambda_i^{1/2}(P^{\mathrm{T}}P)$ [6, приложение 5] (здесь и далее $\lambda_i(\cdot)$ обозначает i-е собственное значение $N \times N$ -матрицы, заключенной в скобках).

3. В условиях (2) управление по закону (5), (4) минимизирует верхнюю грань функционала

$$J_n = J_n(u_{n-1}) := \sup_{v_n(\omega):\, v_n(\omega) \in \Omega} \| e_n \|_2 \tag{8}$$

на множестве ℓ_∞^r всех допустимых векторов u_{n-1}, от которых зависит J_n, и дает $+\sqrt{\| Q_e e_{n-1} \|_2^2 + (\operatorname{diam} \Omega)^2} \leqslant J_n \leqslant \| Q_e \|_2 \| e_{n-1} \|_2 + \operatorname{diam} \Omega$.

4. В двух случаях, а именно при $v_n^{(1)} = \ldots = v_n^{(m)} \equiv 0$, а также при выполнении условий $| v_n^{(1)} | + \ldots + | v_n^{(m)} | \not\equiv 0$, $\sup_\omega \| v_n \|_2 = \varepsilon$ для любого $n \in [0, \infty)$ и $v_n \in \Omega$, где Ω — шар в $\mathbf{R}^m$ с диаметром $\operatorname{diam} \Omega = 2\varepsilon$, процедура (5), (4) приводит к решению оптимизационной задачи

$$\sup_{v_n(\omega):\, v_n(\omega) \in \Omega} \| e_n \|_2 \to \inf_{u_n \in \ell_\infty^r},$$

причем значение функционала (8) на оптимальном управлении определяется выражением $J_n = \| Q_e \|_2 \| e_0 \|_2 + (1 + \| Q_e \|_2) \operatorname{diam} \Omega$.

5. Если $r = m$, $\det B \neq 0$, то в условиях (2) итеративная процедура (6) совместно с (4) определяет закон оптимального управления объектом (1), при котором как функционал (8), так и функционал $J = \lim_{n\to\infty} \sup \| y^0 - y_n \|_2$, характеризующий асимптотический показатель качества замкнутой системы (1), (4), (6), достигает своего минимума, равного $\min_{\{u_n\} \in \ell_\infty^r} J = 2\varepsilon$.

Вводя принятое в [7, с. 9] обозначение $0_N = [\underbrace{0, \ldots, 0}_{N}]$ строки из N нулей и обозначение $\operatorname{im} P$ образа матрицы P, принятое в [8, п. 6.24], сформулируем один важный в практическом плане результат.

Теорема 1. *При* $v_n \equiv 0_m^{\mathrm{T}}$ *система управления* (1), (4), (5) *становится астатической в двух отдельных случаях*: 1) *при любом* $y^0 \in \mathbf{R}^m$, *если* B — *квадратная невырожденная матрица*; 2) *в специальном случае, когда* $y^0 \in \operatorname{im} B$, *независимо от матрицы* B. *Более того,* $y_n \equiv y^0$ *для всех* $n \in [1, \infty)$.

Справедливость теоремы 1 следует из того, что по определению Q_e — идемпотентная матрица [1, упражнение 3.7.6], а $PP^+ x = x$ при $x \in \operatorname{im} P$ [1, следствие 3.5].

Замечание 2. В обоих случаях, фигурирующих в теореме 1, $y^{\mathrm{e}} = y^0$, т.е. $E_y = \{y^{\mathrm{e}}\}$ — одноточечное множество, тогда как в случае 1) множество $E_u = \{u^{\mathrm{e}}\}$ остается одноточечным множеством, а в случае 2) оно становится неодноточечным. Без умаления общности будем далее полагать, что $y^0 \notin \operatorname{im} B$.

Согласно (7) при $B_0 = B$, когда $\det B \neq 0$, а $v_n \not\equiv 0_m^{\mathrm{T}}$, получаем

$$\limsup_{n\to\infty} \| y_n \|_2 \leqslant \| y^0 \|_2 + 2\varepsilon, \tag{9}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \| u_n - u^e \|_2 \leqslant \| B^{-1} \|_2 \varepsilon . \tag{10}$$

Оценки (9), (10) показывают, что если B — плохо обусловленная матрица, то хотя управление (6) и гарантирует минимально возможное отклонение y_n от y^0 при $n \to \infty$, но такая минимизация будет достигаться ценой слишком большого размаха возможных колебаний вектора u_n относительно равновесной точки u^{e} при $v_n \not\equiv 0_m^{\mathrm{T}}$. В самом деле, при достаточно большом числе обусловленности матрицы B, определяемом как $\operatorname{cond} B = \| B \| \| B^{-1} \|$ [8, п. 16], а именно при $\operatorname{cond} B >> 1$ множитель $\| B^{-1} \|_2$, фигурирующий в правой части (10), принимает достаточно большое значение: $\| B^{-1} \|_2 >> 1/ \| B \|_2$.

Для управления объектом (3) при $1 << \operatorname{cond} B < \infty$ методом псевдообращения вместо матрицы $B_0 = B$, рекомендуется теперь брать ближайшую к B (в определенном смысле) вырожденную матрицу $B_0 \neq B$ и формировать $\{u_n\}$, модифицируя процедуру (6) так:

$$u_n = u_{n-1} + [d_0 I_m + (1 - d_1) B_0^{+}] e_n , \tag{11}$$

где d_0 и d_1 — некоторые достаточно малые положительные числа. В качестве меры близости B_0 к B предлагается использовать фробениусову норму

$$\| \Delta \|_F := \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} | \delta^{(ij)} |^2 \right)^{1/2} \tag{12}$$

матрицы $\Delta = (\delta^{(ij)}) = B_0 - B$ с элементами $\delta^{(ij)} = b_0^{(ij)} - b^{(ij)}$ (определение $\| \cdot \|_F$ можно найти, например, в [6, приложение 5]).

В силу (12) задача отыскания минимума нормы $\| \Delta \|_F$ сводится, очевидно, к стандартной задаче условной оптимизации в следующей форме:

$$\min_{\operatorname{vec} \hat{B}_0 \in \underbrace{R \times \ldots \times R}_{r^2}} \| \operatorname{vec} \hat{B}_0 - \operatorname{vec} B \|_2^2 : \det \hat{B}_0 = 0 . \tag{13}$$

Здесь $\operatorname{vec} P := [p^{(11)}, \ldots, p^{(NN)}]^{\mathrm{T}}$ — взятое из [6, с. 220] обозначение N^2-мерного вектора, который образуется вытягиванием в столбец $N \times N$-матрицы $P = (p^{(ij)})$. В свою очередь, задача (13) решается, как известно, классическим методом множителей Лагранжа [9, гл. 8] путем минимизации зависящей от составляющих вектора $\operatorname{vec} \hat{B}_0$ и множителя Лагранжа Λ функции

$$\Phi(\operatorname{vec} \hat{B}_0, \Lambda) = (\hat{b}_0^{(11)} - b^{(11)})^2 + \ldots + (\hat{b}_0^{(rr)} - b^{(rr)})^2 + \Lambda \det \hat{B}_0$$

из условий $\partial \Phi(\cdot, \cdot) / \partial \hat{b}_0^{(ij)} = 0, \quad \partial \Phi(\cdot, \cdot) / \partial \Lambda = 0$, которые в конечном счете приводят к системе алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} & 2(\hat{b}_0^{(ij)} - b^{(ij)}) + \Lambda \frac{\partial}{\partial \hat{b}_0^{(ij)}} \det \hat{B}_0 = 0, \quad i, j = 1, \ldots, r, \\ & \det \hat{B}_0 = 0 \end{aligned}\right\}$$

относительно неизвестных $\hat{b}_0^{(ij)}$ и Λ. А это в итоге позволяет вычислять $\operatorname{vec} B_0 = \arg\min \Phi(\operatorname{vec} \hat{B}_0, \Lambda)$.

Теорема 2. *При выполнении условия* $\| B_0^+ \Delta \| < 1$ *найдутся числа* $d_0, d_1 > 0$ *такие, что система* (1), (4), (11) *становится астатической, когда* $v_n \equiv 0_m^{\mathrm{T}}$, *и диссипативной, когда* $v_n \not\equiv 0_m^{\mathrm{T}}$; *при этом если* $\| I_m - BA \|_2 < 1$, *то*

$$\limsup_{n \to \infty} \| e_n \|_2 \leqslant \frac{2\varepsilon}{1 - \| I_m - BA \|_2} < \infty,$$

где $A := d_0 I_m + (1 - d_1) B_0^+$.

Доказательство этой теоремы существенно использует приведенное в [7, п. 2.15.3] свойство $\lambda_i(\alpha_0 I_N + \alpha_1 P) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i(P)$ любого собственного значения λ_i матрицы $P \in \mathbf{R}^{N \times N}$ и тот замечательный факт, что если $\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |\lambda_i(P)| < 1$, то $\| P \|^n \leqslant K \rho_0^n \quad \forall n$ и некоторых $K, \rho_0: \ 0 < K < \infty, \ 0 < \rho_0 < 1$ при любой матричной норме (детали доказательства опускаются из-за ограниченного объема статьи).

3. Решение задачи управления в условиях параметрической неопределенности. Предположим теперь, что матрица $B \in \mathbf{R}^{m \times r}$ неизвестна, но априори известно некоторое замкнутое ограниченное множество $\Xi = \{\hat{B}\}$ матриц $\hat{B}$, к которому она принадлежит. Как и в [5, с. 62], будем исходить из того, что Ξ — интервальное семейство матриц $\hat{B} = (\hat{b}^{(ij)})$, заданное в форме

$$\Xi = \{(\hat{b}^{(ij)}) : \underline{b}^{(ij)} \leqslant \hat{b}^{(ij)} \leqslant \overline{b}^{(ij)}\}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, r,$$

считая границы интервалов $[\underline{b}^{(ij)}, \overline{b}^{(ij)}]$ известными; при этом $b^{(ij)} \in [\underline{b}^{(ij)}, \overline{b}^{(ij)}]$.

Зафиксируем некоторую матрицу B_0 и рассмотрим систему управления (1), (3), (4). Воспользуемся обозначением $0_{m,r}$ нулевой $m \times r$-матрицы, принятым в [7, с. 9]. Справедливы следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Необходимым условием того, что положение равновесия системы* (1), (3), (4) *существует, является требование*

$$\operatorname{rank} B_0 \leqslant \min_{\substack{\hat{B} \in \Xi \\ \hat{B} \neq 0_{m,r}}} \operatorname{rank} \hat{B}.$$

Лемма 2. *Предположим, что* Ξ *— множество матриц полного ранга, а* $\operatorname{rank} B_0 = r$. *Для существования положения равновесия системы* (1), (3), (4) *достаточно, чтобы было выполнено условие*

$$\max_{\Delta : (B_0 - \Delta) \in \Xi} \| B_0^+ \Delta \| < 1.$$

Лемма 3. *Пусть* $B_0^+ B \neq 0_{m,r}$. *Тогда если* $\operatorname{rank} B_0 = 1$, *то положение равновесия системы* (1), (3), (4) *существует и определяется как решение* $u = u^{\mathrm{e}}$ *системы алгебраических уравнений*

$$B_0^+ Bu = B_0^+ y^0. \tag{14}$$

Доказательство лемм 1 и 2 основано на использовании известного из [8, п.4.47] свойства $\operatorname{rank} P_1 P_2 \leqslant \min\{\operatorname{rank} P_1, \operatorname{rank} P_2\}$. Основу доказательства леммы 3 составляет установление свойства ортогональности $B^+ y^0 \perp \ker B^T (B^+)^T$, которое согласно [8, п.6.34] необходимо и достаточно для обеспечения совместности системы уравнений (14) (здесь $\ker P$ — принятое в [8, п.6.24] обозначение ядра матрицы P).

Следуя [4], введем вспомогательные переменные

$$\sigma^{(ki)} = \sum_{j=1}^{m} \beta_0^{(kj)} \delta^{(ji)}, \qquad k, i = 1, \ldots, r,$$

представляющие собой линейные формы относительно составляющих векторов $\Delta^{(i)} = [\delta^{(1i)}, \ldots, \delta^{(mi)}]^{\mathrm{T}}$, и рассмотрим следующие пары задач линейного программирования:

$$\min \sigma^{(ki)}, \quad \max \sigma^{(ki)} \quad \text{при} \quad \underline{b}^{(ij)} - b_0^{(ij)} \leqslant \delta^{(ij)} \leqslant \overline{b}^{(ij)} - b_0^{(ij)}. \tag{15}$$

Используя принятые в [6, приложение 5] обозначения 1-нормы $\| P \|_1 := \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \times \{| P^{(i1)} | + \ldots + | P^{(iN)} |\}$ матрицы $P \in \mathbf{R}^{N \times N}$ и обозначения согласованной с ней ∞-нормы $\| x \|_\infty = \max\{| x^{(1)} |, \ldots, | x^{(N)} |\}$ вектора $x \in \mathbf{R}^N$, представим один гарантированный результат, касающийся асимптотического поведения рассматриваемой системы.

Теорема 3. *Предположим, что положение равновесия системы* (1), (3), (4) *существует. Если*

$$q := \max_{1 \leqslant k \leqslant r} \sum_{i=1}^{r} \max\{| \min \sigma^{(ki)} |, | \max \sigma^{(ki)} |\} < 1, \tag{16}$$

где $\min \sigma^{(ki)}$ *и* $\max \sigma^{(ki)}$ *— решения задач* (15), *то эта система устойчива* (*при* $v_n \equiv 0_m^{\mathrm{T}}$) *и диссипативна* (*при* $v_n \not\equiv 0_m^{\mathrm{T}}$); *при этом справедливы асимптотические оценки*

$$\begin{aligned} &\limsup_{n \to \infty} \| u_n - u^e \|_\infty \leqslant (1 - q)^{-1} [\| I_r - B_0^+ B_0 \|_1 \| u_0 - u^e \|_\infty + \| B_0^+ \|_1 \overline{\varepsilon}] < \infty \\ &\limsup_{n \to \infty} \| y_n \|_\infty \leqslant \| B \|_1 (\| u^e \|_\infty + (1 - q)^{-1} [\| I_r - B_0^+ B_0 \|_1 \| u_0 - u^e \|_\infty + \| B_0^+ \|_1 \overline{\varepsilon}]) + \overline{\varepsilon} < \infty, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\overline{\varepsilon} = \max\{\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(m)}\}$.

Эта теорема — переформулировка в терминах задач линейного программирования утверждения 2, доказанного в [5], с уточненными оценками (17).

Замечание 3. Поскольку Ξ — компакт, то в силу (16) правые части неравенств (17) — непрерывные функции от B_0 на Ξ Поэтому если $B_0 \in \Xi$, а Ξ не содержит матриц $\hat{B}$ ранга, меньшего r, то существует наилучшая (в смысле минимума верхней грани $\| e_n \|_\infty$ при $n \to \infty$) матрица $B_0 = \overline{B}_0$,

$$\overline{B}_0 = \arg \min_{B_0 \in \Xi} \{\| I_m - B_0 B_0^+ \|_1 [\| e_0 \|_\infty + 2\overline{\varepsilon}] + 2\overline{\varepsilon} (1 - q)^{-1}\}.$$

При выполнении же требования (16) в этих условиях положение равновесия системы (1), (3), (4) заведомо существует (согласно лемме 2). А если к тому же $r = m$, но $v_n \equiv 0_m^{\mathrm{T}}$, то эта система становится астатической: $\lim_{n\to\infty} \| e_n \| = 0$ при любой матрице $B_0 \in \Xi$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Albert A. Regression and the Moore-Penrose pseudoinverse. New York: Academic Press. 1972. 224 p.
2. Скурихин В. И., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Управление многосвязными объектами с вырожденными и плохо обусловленными передаточными матрицами на основе метода псевдообратного оператора. *Управляющие системы и машины*. 2013. № 3. С. 14—20, 29.
3. Скурихин В. И., Гриценко В. И., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Метод обобщенного обратного оператора в задаче оптимального управления линейными многосвязными статическими объектами. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2014. № 8. С. 57—66.
4. Zhiteckii L. S., Skurikhin V. I., Solovchuk K. Y. Stabilization of a nonlinear multivariable discrete-time time-invariant plant with uncertainty on a linear pseudoinverse model. *J. Computer and Systems Sciences International*. 2017. № 5. P. 12—26.
5. Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Pseudoinversion in the problems of robust stabilizing multivariable discrete-time control systems of linear and nonlinear static objects under bounded disturbances. *J. Automation and Information Sciences*. 2017. № 3. P. 57—70.
6. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. Москва: Наука. 2002. 303 с.
7. Marcus M., Minc H. A survey of matrix theory and matrix inequalities. Boston: Allyn & Bacon, Inc. 1964. 232 p.
8. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. Москва: Наука. 1984. 320 с.
9. Polyak B. T. Introduction to optimization. New York: Optimization Software Inc. 2010. 384 p.

Поступило в редакцию 22.05.2019

REFERENCES

1. Albert, A. (1972). Regression and the Moore-Penrose pseudoinverse. New York: Academic Press.
2. Skurikhin, V. I., Zhiteckii, L. S. & Solovchuk, K. Y. (2013). Control of interconnected plants with singular and ill-conditioned transfer matrices based on pseudo-inverse operator method. Control Systems and Computers, No. 3, pp. 14-20, 29 (in Russian).
3. Skurikhin, V. I., Gritsenko, V. I., Zhiteckii, L. S. & Solovchuk, K. Y. (2014). Generalized inverse operator method in the problem of optimal controlling linear interconnected static plants. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 8, pp. 57-66 (in Russian).
4. Zhiteckii, L. S., Skurikhin, V. I. & Solovchuk, K. Y. (2017). Stabilization of a nonlinear multivariable discrete-time time-invariant plant with uncertainty on a linear pseudoinverse model. J. Computer and Systems Sciences International, No. 5, pp. 12-26.
5. Zhiteckii, L. S. & Solovchuk, K. Yu. (2017). Pseudoinversion in the problems of robust stabilizing multivariable discrete-time control systems of linear and nonlinear static objects under bounded disturbances. J. Automation and Information Sciences, No. 3, pp. 57-70.
6. Polyak, B. T. & Shcherbakov, P. S. (2002). Robust stability and control. Moscow: Nauka (in Russian).
7. Marcus, M. & Minc, H. (1964). A survey of matrix theory and matrix inequalities. Boston: Allyn & Bacon, Inc.
8. Voevodin, V. V. & Kuznetsov, Yu. A. (1984). Matrices and computations. Moscow: Nauka (in Russian).
9. Polyak, B. T. (2010). Introduction to optimization. New York: Optimization Software Inc.

Received22.05.2019

В.І. Гриценко, Л.С. Житецький, К.Ю. Соловчук

Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем
НАН України та МОН України, Київ
E-mail: vig@irtc.org.ua, leonid_zhiteckii@i.ua, solovchuk.ok@gmail.com

ГРАНИЧНІ МОЖЛИВОСТІ МЕТОДУ ПСЕВДООБЕРНЕННЯ
ДЛЯ КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМИ БАГАТОЗВ'ЯЗНИМИ ОБ'ЄКТАМИ
БЕЗ ПАМ'ЯТІ: ГАРАНТОВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Стаття стосується дискретного керування лінійними багатозв'язними об'єктами без пам'яті з використанням підходу, основаного на псевдоберненій моделі. Вона відповідає на питання, що відносяться до областей застосовності цього підходу. Мета статті полягає в тому, щоб виявити деякі асимптотичні особливості замкнених систем керування, що містять псевдообернені моделі в їх петлях зворотного зв'язку. Розглядаються об'єкти без пам'яті, що мають будь-які ненульові матриці коефіцієнтів підсилення, а саме, аналізуються класи квадратних невироджених і вироджених матриць, а також прямокутних матриць довільного рангу. Окремо вивчається випадок, коли ці матриці відомі, і випадок, коли немає повної інформації про їхні елементи. Вводиться припущення, що є невимірювальні довільні, але обмежені зовнішні збурення, межі яких можуть бути, взагалі кажучи, невідомі. Отримано три важливих результати про асимптотичну поведінку систем керування з псевдооберненими моделями. По-перше, показано, що за відсутності невизначеності завжди існує положення рівноваги цих систем та гарантуються їхні стійкість і оптимальність. По-друге, запропоновано новий ефективний закон керування для стабілізації погано обумовлених об'єктів з відомими матрицями коефіцієнтів підсилення. По-третє, встановлено кілька умов, що гарантують існування положення рівноваги і дисипативність системи керування з невизначеностями. Дано також асимптотичні оцінки верхніх меж норм вектора керуючих впливів і вектора вихідних змінних.

Ключові слова: *багатозв'язний об'єкт без пам'яті, замкнена система керування, псевдообернена модель, положення рівноваги, стійкість, оптимальність, дисипативність.*

V.I. Gritsenko, L.S. Zhiteckii, K.Yu. Solovchuk

International Research and Training Center for Information Technologies and Systems
of the NAS of Ukraine and the Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv
E-mail: vig@irtc.org.ua, leonid_zhiteckii@i.ua, solovchuk.ok@gmail.com

LIMITATIONS OF PSEUDOINVERSE METHOD
FOR CONTROL OF LINEAR INTERCONNECTED
MEMORYLESS PLANTS: GUARANTEED RESULTS

The paper deals with the discrete-time control of the linear interconnected memoryless plants using the pseudoinverse model-based approach. It answers the questions related to applicability areas for this approach. The objective of the paper is to derive some asymptotic features of the closed-loop control systems containing the pseudoinverse models in their feedback loops. To this end, the memoryless plants having any nonzero gain matrices are considered. Namely, the classes of square non-singular and singular matrices and nonsquare matrices with arbitrary rank are analyzed. The case where these matrices are known and the case where there is no full information on their elements are separately studied. The assumption that there are the unmeasurable arbitrary, but bounded external disturbances whose bounds may be unknown, in general, is introduced. Three important results about the asymptotic behavior of the control systems with the pseudoinverse models are obtained. First, it is shown that, in the absence of uncertainties, the equilibrium state of these systems always exists, and their stability and optimality are guaranteed. Second, a new effective control law for the stabilization of the ill-conditioned plants with the known gain matrices is proposed. Third, the several conditions guaranteeing the existence of the equilibrium state and the dissipativeness of the control system in the presence of uncertainties are established. Asymptotic estimates of upper bounds on the norms of the control input and output vectors are given.

Keywords: *interconnected memoryless plants, closed-loop control system, pseudoinverse model, equilibrium state, stability, optimality, dissipativeness.*