ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 2007

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9,531.36

А. Л. Зуев

Об относительной компактности траекторий дифференциальных уравнений в банаховом пространстве

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. М. Ковалевым)

A class of bounded perturbations of a linear differential equation in a Banach space is considered. Sufficient conditions for the precompactness of trajectories of the perturbed system are proposed. Such conditions are shown to be applicable for a nonlinear differential equation without assuming that the corresponding infinitesimal generator is accretive.

Постановка задачи. Пусть X — вещественное банахово пространство, A — замкнутый (вообще говоря, неограниченный) линейный оператор с областью определения $D(A) \subset X$ и значениями в X. Рассмотрим абстрактную задачу Коши на промежутке $t \in [0, +\infty)$:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad x(0) = x_0 \in X. \tag{1}$$

Будем предполагать, что область определения $D(A)$ всюду плотна в X и что A является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной полугруппы (C_0-полугруппы) линейных операторов $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ в X (см. [1, гл. V]). Таким образом, задача Коши (1) корректно поставлена для $t \in [0, +\infty)$, и всякое обобщенное решение представимо в виде

$$x(t) = e^{tA}x_0, \qquad t \geqslant 0. \tag{2}$$

Не претендуя на полноту, выделим работы [2–9], в которых исследовано асимптотическое поведение решений $x(t)$ при $t \to +\infty$ для различных классов операторов A. Известным достаточным условием существования ω-предельных точек решения (2) является предкомпактность (относительная компактность) траектории $\gamma(x_0) = \{e^{tA}x_0 \mid t \geqslant 0\}$. Для уравнений с предкомпактными траекториями возможно исследование ω-предельных множеств с помощью функционалов Ляпунова, удовлетворяющих принципу инвариантности ЛаСалля [10; 5, 11]. Поэтому представляет большой интерес нахождение условий предкомпактности траекторий дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. В статье [4] предложено достаточное условие предкомпактности траекторий $\gamma(x_0)$ уравнения (1) для случая аккретивного оператора $-A$, а также рассмотрены неавтономные дифференциальные уравнения в гильбертовом пространстве. Как показано в работе [12], условие аккретивности нарушено для дифференциального оператора, описывающего управляемое вращение упругой балки, при этом все траектории рассмотренного уравнения предкомпактны. С целью изучения более широкого класса уравнений (в том числе с немонотонными операторами) рассмотрим возмущенную задачу Коши на промежутке $t \geqslant 0$ следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + f(t)R(x,t), \qquad x(0) = x_0 \in X, \tag{3}$$

где $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $R\colon X \times [0,+\infty) \to X$ — непрерывные отображения.

В настоящем сообщении доказано сохранение свойства предкомпактности траекторий при переходе от уравнения (1) к (3) с некоторыми дополнительными предположениями на функцию f и отображение R. С помощью этого результата получены достаточные условия предкомпактности траекторий нелинейного автономного дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Как показывает пример, предложенные условия справедливы без предположения об аккретивности генератора нелинейной полугруппы.

Вспомогательные утверждения. Предположим, что банахово пространство X имеет базис $\{e_i\}$, $i = 1,2,\ldots$. Обозначим через $\{f_j\} \subset X^*$, $j = 1,2,\ldots$, сопряженную систему ограниченных линейных функционалов, т. е. $f_j(e_i) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда для каждых $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ определены линейные операторы проектирования:

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i, \qquad P_n(x) = x - S_n(x).$$

Поскольку $\{e_i\}$ — базис, то операторы $S_n\colon X \to X$ ограничены в совокупности [1, с. 68]:

$$\|S_n\| \leqslant M < \infty, \qquad n = 1,2,\ldots.$$

Для описания компактных подмножеств X сформулируем два вспомогательных результата.

Лемма 1. *Пусть $\{e_i\}$ — базис в X. Ограниченное подмножество $C \subset X$ относительно компактно в X только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in C} \|P_n x\| = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Если C предкомпактно, то по критерию Хаусдорфа для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечная $\dfrac{\varepsilon}{2M}$-сеть $\{x^{(j)}\}$, $j = 1,2,\ldots,m(\varepsilon)$. Это означает, что для всякого $x \in C$ найдется $j \leqslant m(\varepsilon)$, при котором $\|x - x^{(j)}\| < \varepsilon/2M$, т. е.

$$\|P_n x\| = \|P_n(x - x^{(j)}) + P_n x^{(j)}\| \leqslant \|P_n\|\frac{\varepsilon}{2M} + \|P_n x^{(j)}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|P_n x^{(j)}\|. \tag{5}$$

Покажем теперь, что для достаточно больших n справедливо неравенство $\|P_n x^{(j)}\| < \varepsilon/2$ при каждом $j = 1,2,\ldots,m(\varepsilon)$. В самом деле, поскольку $\{e_i\}$ — базис, то каждый элемент сети представим сходящимся рядом:

$$x^{(j)} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(j)} e_i. \tag{6}$$

По определению оператора P_n,

$$\|P_n x^{(j)}\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i^{(j)} e_i \right\|.$$

Последнее выражение не превосходит $\varepsilon/2$, начиная с некоторого индекса $n = n(\varepsilon)$, поскольку каждый ряд (6) сходится по норме пространства X. Таким образом, из (5) следует $\|P_n x\| < \varepsilon$ при $n \geqslant n(\varepsilon)$, что доказывает (4).

Обратно, если множество C ограничено, то все конечномерные проекции

$$C_n = \{S_n x \mid x \in C\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

предкомпактны. Из соотношения (4) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n любая конечная ε-сеть множества C_n может быть использована для покрытия C, что доказывает лемму.

Будем называть C_0-полугруппу линейных операторов $\{e^{tA}\}_{t \geqslant 0}$ в X равномерно ограниченной [13, p. 8], если

$$\|e^{tA}\| \leqslant N, \qquad \forall t \geqslant 0$$

при некоторой константе $N < \infty$.

Лемма 2. *Пусть $\{e_i\}$ — базис в X, C — компактное подмножество X, $\{e^{tA}\}_{t \geqslant 0}$ — равномерно ограниченная C_0-полугруппа линейных операторов в X, для которой траектории $\gamma(x_0) = \{e^{tA} x_0 \mid t \geqslant 0\}$ предкомпактны при всех $x_0 \in C$. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{t \geqslant 0,\, x \in C} \|P_n e^{tA} x\| \right) = 0. \tag{7}$$

Согласно лемме 1, для доказательства (7) достаточно установить предкомпактность множества

$$K = \{e^{tA} \mid x \in C,\ t \geqslant 0\}.$$

Пусть $\{y_n\}$ — последовательность элементов из K, т.е. $y_n = e^{t_n A} x_n$ при некоторых $\{t_n\} \subset$ $\subset [0, +\infty)$, $\{x_n\} \subset C$, $n = 1, 2, \ldots$. Из компактности C следует существование сходящейся подпоследовательности $x_{n(k)} \to x^* \in C$ при $k \to \infty$. Предкомпактность траектории $\gamma(x^*)$ обеспечивает существование сходящейся подпоследовательности $e^{t_{n(k(m))} A} x^* \to y^* \in X$ при $m \to \infty$. Используя равномерную ограниченность полугруппы $\{e^{tA}\}_{t \geqslant 0}$, заключаем, что $e^{t_{n(k(m))} A} x_{n(k(m))} \to y^*$ при $m \to \infty$. Лемма 2 доказана.

Предкомпактность траекторий возмущенной задачи. По определению [13, с. 184], слабым (mild) решением задачи (3) на промежутке $0 \leqslant t < T \leqslant +\infty$ называется непрерывная функция $x \colon [0, T) \to X$, удовлетворяющая интегральному уравнению

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) R(x(s), s)\, ds. \tag{8}$$

Имеет место достаточное условие предкомпактности траекторий задачи (3).

Теорема 1. *Пусть X — банахово пространство с базисом, A — инфинитезимальный генератор равномерно ограниченной C_0-полугруппы линейных операторов $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ в X, $f \in L^1[0,+\infty)$, $R(x,t) \in K$ при всех $x \in X$, $t \geqslant 0$, K — компакт. Предположим также, что множества $\{e^{tA}y \mid t \geqslant 0\}$ предкомпактны при всех $y \in K \cup \{x_0\}$. Тогда всякое слабое решение $x(t)$, $t \in [0,+\infty)$ задачи (3) содержится в некотором компактном подмножестве X.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ — слабое решение (3) на полуинтервале $t \geqslant 0$. Из интегрального уравнения (8) следует, что компактность $\{e^{tA}x_0 \mid t \geqslant 0\}$ и условия $f \in L^1[0,+\infty)$, $R \in K$ обеспечивают ограниченность решения $x(t)$. По лемме 1, для доказательства предкомпактности траектории $\{x(t) \mid t \geqslant 0\}$ достаточно выбрать какой-либо базис $\{e_i\}$ в X и установить существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\geqslant 0} \|P_n x(t)\| = 0.$$

Применяя оператор проектирования к обеим частям (8), получим

$$\|P_n x(t)\| \leqslant \|P_n e^{tA} x_0\| + \left\| \int_0^t f(s) P_n(e^{(t-s)A} R(x(s),s)) ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|P_n e^{tA} x_0\| + \|f\|_{L^1} \sup_{s\in[0,t],\, y\in K} \|P_n e^{sA} y\|.$$

Доказательство завершается применением лемм 1 и 2.

Определенный класс автономных дифференциальных уравнений с нелинейным инфинитезимальным генератором можно привести к виду (3) и построить оценку соответствующей функции $f(t)$ на решениях уравнения методом функционалов Ляпунова. Сформулируем основной результат в этом направлении для абстрактной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + h(x(t))B(x(t)), \qquad x(0) = x_0 \in X, \tag{9}$$

где $h\colon X \to \mathbb{R}$, $B\colon X \to X$ — локально липшицевы отображения. (Отображения $h(x)$, $B(x)$ называются локально липшицевыми, если для всякого $r \geqslant 0$ существует константа $L(r)$ такая, что

$$|h(x) - h(y)| \leqslant L(r)\|x-y\|, \qquad \|B(x) - B(y)\| \leqslant L(r)\|x-y\|$$

при всех $\|x\| \leqslant r$, $\|y\| \leqslant r$.) Если $w\colon X \to \mathbb{R}$ — дифференцируемый (по Фреше) функционал, то функция времени $w(x(t))$ дифференцируема на каждом классическом решении $x(t)$ задачи (9). Тогда для любого $x \in D(A) \subset X$ производную w в силу (9) можно записать следующим образом:

$$\dot{w}(x) = [\nabla w(x), Ax + B(x)h(x)],$$

где $[\cdot,\cdot]\colon X^* \times X \to \mathbb{R}$ — двойственное спаривание X^* и X, т. е. $[\nabla w(x), \xi]$ — значение линейного функционала $\nabla w(x) \in X^*$ в точке $\xi \in X$.

Теорема 2. *Пусть X — банахово пространство с базисом, A — инфинитезимальный генератор равномерно ограниченной C_0-полугруппы линейных операторов $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ в X,* *множества $\{e^{tA}y \mid t \geqslant 0\}$ предкомпактны при всех $y \in X$, $B\colon X \to X$ — вполне непрерывный оператор. Предположим, что существует дифференцируемый функционал $w\colon X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условиям:*

1) множества $M_c = \{x \mid w(x) \leqslant c\}$ ограничены при всех $c \in \mathbb{R}$;

2) $\inf\limits_{\|x\| \leqslant r} w(x) > -\infty$ при любом $r > 0$;

3) существует константа $k_1 > 0$ такая, что

$$\dot{w}(x) \leqslant k_1 h(x) \leqslant 0, \qquad \forall x \in D(A).$$

Тогда для любого $x_0 \in X$ задача Коши (9) имеет единственное решение $x(t)$ на $[0, +\infty)$, при этом $\{x(t) \mid t \geqslant 0\}$ — предкомпактное подмножество X.

Схема доказательства. Согласно теореме 1.4 из [13, с. 185], для каждого $x_0 \in X$ существует единственное максимальное слабое решение $x(t)$ задачи (9) при $t \in [0, t_{\max})$. Условия *1* и *3* обеспечивают ограниченность $x(t)$, поэтому $t_{\max} = +\infty$. Положим в уравнении (3) $R(x,t) = B(x)$, $f(t) = h(x(t))$. Тогда условия *2* и *3* обеспечивают свойство $f \in L^1[0, +\infty)$. Таким образом, траектория $\{x(t) \mid t \geqslant 0\}$ предкомпактна в X по теореме 1.

Отметим, что поскольку множества M_c инвариантны при выполнении условия $\dot{w}(x) \leqslant 0$, то теорема 2 допускает локальную формулировку в подмножестве пространства X, расположенном между поверхностями уровня функционала w.

П р и м е р. Рассмотрим гильбертово пространство ℓ^2, элементы которого будем обозначать в виде столбцов $x = (u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots)^T$. Линейные операторы A, B зададим с помощью бесконечных матриц:

$$A = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \omega_2 \\ -\omega_2 & 0 \end{pmatrix}, \ldots\right) +$$

$$+ (0, 1, 0, -J_1, 0, -J_2, \ldots)^T \cdot (-1, -1, \omega_1 J_1, 0, \omega_2 J_2, 0, \ldots),$$

$$B = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1/\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1/\omega_2 & 0 \end{pmatrix}, \ldots\right).$$

Функционал $h\colon \ell^2 \to \mathbb{R}$ определим соотношением $h(x) = -v_0^2$. Будем предполагать, что коэффициенты матриц A и B удовлетворяют условиям: все $\omega_n > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2 < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} < \infty.$$

Задача (9) с введенными таким образом отображениями A, B, h является обобщением уравнений, рассмотренных в статье [14] для описания движения механической системы с упругими балками под воздействием стабилизирующего управления. Положим $J = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} J_n^2$ и зададим квадратичный функционал $w(x)$ в ℓ^2 следующим образом:

$$w(x) = u_0^2 + J v_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + 2 J_n v_0 v_n + v_n^2) \geqslant 0.$$

Легко видеть, что $w(x)$ удовлетворяет условиям *1*, *2* теоремы 2. Вычисляя производную $\dot{w}(x)$ и применяя неравенство Коши–Буняковского, убеждаемся, что условие *3* выполнено при $k_1 = 1$ для значений x из некоторого шара с центром в точке $0 \in \ell^2$. Используя теорему Люмера–Филлипса [13, с. 15], теорему 3 из статьи [4], можно показать, что линейный оператор A порождает равномерно ограниченную C_0-полугруппу $\{e^{tA}\}_{t \geqslant 0}$ в ℓ^2 с предкомпактными траекториями $\{e^{tA}y \mid t \geqslant 0\}$.

Таким образом, для рассмотренной задачи Коши применима теорема 2 (в локальной формулировке), т. е. для любого x_0 из некоторой окрестности точки $0 \in \ell^2$ существует единственное слабое решение $x(t)$ задачи (9) на полуинтервале $t \in [0, +\infty)$, при этом множество $\{x(t) \mid t \geqslant 0\}$ предкомпактно. Обозначим $-F(x) = Ax + h(x)Bx$. Нетрудно проверить, что оператор F не является монотонным, поскольку выражение $\langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2 \rangle$ принимает значения обоих знаков при $x_1,\ x_2 \in D(F)$. Поэтому предкомпакность траекторий нелинейного уравнения (3) не может быть установлена непосредственным применением результатов работы [4].

Доказанное по теореме 2 свойство предкомпактности траекторий позволяет в дальнейшем исследовать ω-предельные множества решений задачи (3) с помощью принципа инвариантности.

1. *Функциональный* анализ. – 2-е изд. / Под ред. С. Г. Крейна. – Москва: Наука, 1972. – 544 с.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – Москва: Наука, 1970. – 536 с.
3. *Bresis H.* Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations // Contributions to Nonlinear Functional Analysis / Ed. E. H. Zarantonello. – New York: Academic Press, 1971. – P. 101–156.
4. *Dafermos C. M., Slemrod M.* Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups // J. Funct. Anal. – 1973. – **13**. – P. 97–106.
5. *Шестаков А. А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. – Москва: Наука, 1990. – 320 с.
6. *Barbu V.* Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems. – San Diego, CA: Academic Press, 1993. – 476 p.
7. *Luo Z.-H., Guo B.-Z., Morgul O.* Stability and stabilization of nonlinear systems with applications. – London: Springer, 1999. – 403 p.
8. *Згуровский М. З., Мельник В. С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. – Киев: Наук. думка, 1999. – 631 с.
9. *Oostveen J.* Strongly stabilizable distributed parameter systems. – Philadelphia: SIAM, 2000. – 150 p.
10. *LaSalle J. P.* Stability theory and invariance principles // Intern. Symp. Dynamical Systems (Providence, 1974) / Eds. L. Cesari, J. K. Hale, J. P. LaSalle. – New York: Academic Press, 1976. – P. 211–222.
11. *Зуев А. Л.* Частичная асимптотическая устойчивость абстрактных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 5. – С. 629–637.
12. *Coron J.-M., d'Andrea-Novel B.* Stabilization of a rotating body beam without damping // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1998. – **44**. – P. 608–618.
13. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New York: Springer, 1983. – 279 p.
14. *Zuyev A. L.* Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems // Automatica. – 2005. – **41**, No 1. – P. 1–10.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 27.07.2006