УДК 519.21

Є. В. Карнаух

Розподіли перестрибків для майже напівнеперервних процесів, заданих на ланцюгу Маркова

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

We deal with the distributions of overshoots for the almost semi-continuous processes defined on a Markov chain. For these processes, we get the limiting distributions of overshoots over the infinitely far and zero levels.

У цій роботі досліджуються розподіли перестрибкових функціоналів для майже напівнеперервних знизу процесів (процеси, що перетинають від'ємний рівень лише показниковими стрибками), заданих на ланцюгу Маркова. Для цих процесів отримані граничні розподіли перестрибків через нескінченно віддалений та нульовий рівні в термінах інтегральних перетворень міри додатних стрибків та матриці, що визначає розподіл доповнення до максимуму.

Розглянемо двовимірний процес Маркова:

$$Z(t) = \{\xi(t), x(t)\}, \qquad t \geqslant 0.$$

Тут $x(t)$ — скінченний незвідний неперіодичний ланцюг Маркова з множиною станів $E' = \{1 \dots m\}$ та матрицею перехідних імовірностей

$$\mathbf{P}(t) = e^{t\mathbf{Q}}, \qquad t \geqslant 0, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{N}(\mathbf{P} - \mathbf{I}),$$

де $\mathbf{N} = \|\delta_{kr}\nu_k\|_{k,r=1}^m$, ν_k — параметри показниково розподілених випадкових величин ζ_k (час перебування $x(t)$ у стані k), $\mathbf{P} = \|p_{kr}\|$ — матриця перехідних імовірностей вкладеного ланцюга, $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ — стаціонарний розподіл; $\xi(t)$ — однорідний процес з умовно незалежними приростами при фіксованих значеннях $x(t)$ (див. [1]).

Еволюція процесу $Z(t)$ описується матричною характеристичною функцією (х. ф.):

$$\mathbf{\Phi}_t(\alpha) = \mathbf{E}e^{\imath\alpha\xi(t)} = \big\|\mathrm{E}\big[e^{\imath\alpha(\xi(t))}, x(t) = r/x(0) = k\big]\big\| = e^{t\mathbf{\Psi}(\alpha)}, \qquad \mathbf{\Psi}(0) = \mathbf{Q}.$$

Надалі будемо розглядати процеси, які мають кумулянту

$$\mathbf{\Psi}(\alpha) = \int_0^\infty (e^{\imath\alpha x} - 1)\, d\mathbf{K}_0(x) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{F}_0(0)(\mathbf{C}(\mathbf{C} + \imath\alpha\mathbf{I})^{-1} - \mathbf{I}) + \mathbf{Q}, \tag{1}$$

де $d\mathbf{K}_0(x) = \mathbf{N}d\mathbf{F}(x) + \mathbf{\Pi}(dx)$, $\mathbf{F}(x) = \|\mathrm{P}\{\chi_{kr} < x; x(\zeta_1) = r/x(0) = k\}\|$, χ_{kr} — стрибки $\xi(t)$ у моменти переходу $x(t)$ зі стану k в r, $\mathbf{\Pi}(dx) = \mathbf{\Lambda}d\mathbf{F}_0(x)$, $\mathbf{F}_0(x) = \|\delta_{kr}F_k^0(x)\|$, $F_k^0(x)$ — функції розподілу від'ємних стрибків $\xi(t)$, якщо $x(t) = k$, $\mathbf{\Lambda} = \|\delta_{kr}\lambda_k\|$, $\lambda_k > 0$, $\mathbf{C} = \|\delta_{kr}c_k\|$, $c_k > 0$. Процес $Z(t)$ з такою кумулянтою є майже напівнеперервним знизу процесом (див. [2]).

Позначимо екстремуми $\xi(t)$:

$$\xi^+(t) = \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u), \qquad \xi^+ = \sup_{0 \leqslant u \leqslant \infty} \xi(u); \qquad \overline{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^+(t)$$

та перестрибкові функціонали

$$\tau^+(x) = \inf\{t\colon \xi(t) > x\}, \qquad \gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x;$$

$$\gamma_+(x) = x - \xi(\tau^+(x) - 0), \qquad \gamma_x^+ = \gamma^+(x) + \gamma_+(x) \qquad (x \geqslant 0).$$

Нехай θ_s — показниково розподілена випадкова величина ($\mathrm{P}\{\theta_s > t\} = e^{-st}, t \geqslant 0$), незалежна від $Z(t)$. Позначимо розподіли $\xi^+(\theta_s)$, $\overline{\xi}(\theta_s)$: $\mathbf{P}_+(s,x) = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) < x\}$, $x > 0$; $\mathbf{P}^-(s,x) = \mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s) < x\}$, $x < 0$; $\mathbf{p}_+(s) = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) = 0\}$, $\mathbf{p}^-(s) = \mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s) = 0\}$, $\mathbf{q}^-(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}^-(s)$, $\mathbf{P}_s = s(s\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$. Зауважимо, що розподіли екстремумів для майже напівнеперервних процесів були уточнені в [2]. Якщо позначити $\mathbf{p}_*^-(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^-(s)$, то для $x < 0$

$$\mathbf{P}^-(s,x) = e^{\mathbf{p}^-(s)\mathbf{C}\mathbf{P}_s^{-1}x}\mathbf{q}^-(s) = \mathbf{P}_s e^{\mathbf{R}_*^-(s)x}(\mathbf{I} - \mathbf{p}_*^-(s)), \qquad \mathbf{R}_*^-(s) = \mathbf{p}_*^-(s)\mathbf{C}.$$

Мета цієї роботи — використовуючи уточнення розподілу доповнення до максимуму та формулу для спільної генератриси $\{\tau^+(x), \gamma^+(x), \gamma_+(x), \gamma_x^+\}$, отриману в [1], знайти граничні розподіли пар функціоналів $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$, $\{\tau^+(x), \gamma_+(x)\}$, $\{\tau^+(x), \gamma_x^+\}$ при $x \to \infty$ та $x \to 0$ для процесів з кумулянтою (1). Аналогічні результати для напівнеперервних знизу процесів (процеси, що перетинають нижній рівень неперервним чином) були отримані в [1].

Позначимо $\gamma_1(x) = \gamma^+(x)$, $\gamma_2(x) = \gamma_+(x)$, $\gamma_3(x) = \gamma_x^+$.

$$\mathbf{V}_i(s,x,u) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x) - u\gamma_i(x)}, \tau^+(x) < \infty],$$

$$\mathbf{W}(x,u,v,\mu) = \int_x^\infty e^{(u-v)x - (u+\mu)z} d\mathbf{K}_0(z), \qquad \mathbf{W}_i(x,u_i) = \mathbf{W}(x,u_1,u_2,u_3)\big|_{u_r = 0, r \neq i},$$

$$\overline{\mathbf{K}}_0(x) = \mathbf{W}(x,0,0,0), \qquad \mathbf{G}_i(s,x,u) = \int_{-\infty}^0 d\mathbf{P}^-(s,y)\mathbf{W}_i(x-y,u),$$

де $\mathbf{W}_i(x,u)$ — праві частини інтегральних рівнянь для генератрис $\mathbf{V}_i(s,x,u)$.

Лема 1. *Для процесу $Z(t)$ з кумулянтою (1) має місце співвідношення*

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x) - u\gamma_i(x)}, \tau^+(x) < \infty] = s^{-1}\int_0^x d\mathbf{P}_+(s,y)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{G}_i(s,x-y,u), \tag{2}$$

$$\mathbf{G}_1(s,x,u) = \mathbf{p}^-(s)\int_x^\infty e^{u(x-z)} d\mathbf{K}_0(z) +$$
$$+ \mathbf{p}^-(s)\mathbf{C}(\mathbf{R}_*^-(s) - u\mathbf{I})^{-1}\int_0^\infty [ue^{-uz} - \mathbf{R}_*^-(s)e^{-\mathbf{R}_*^-(s)z}]\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^-(s)\overline{\mathbf{K}}_0(x+z)\,dz;$$

$$\mathbf{G}_2(s,x,v) = \mathbf{p}^-(s)e^{-vx}\overline{\mathbf{K}}_0(x) + \mathbf{p}^-(s)\mathbf{C}\int_0^\infty e^{-(\mathbf{R}_*^-(s) + v\mathbf{I})z}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^-(s)\overline{\mathbf{K}}_0(x+z)\,dz;$$

$$\mathbf{G}_3(s,x,\mu) = \mathbf{P}_s\int_x^\infty e^{-\mu z}(\mathbf{I} - e^{\mathbf{R}_*^-(s)(x-z)}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^-(s))\,d\mathbf{K}_0(z).$$

З формули (2) після обернення по u випливає

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^{+}(x)}, \gamma_i(x) \in dz, \tau^{+}(x) < \infty] = s^{-1}\int\limits_0^x d\mathbf{P}_{+}(s,y)\mathbf{p}_{*}^{-}(s)\, d_z\mathbf{g}_i^{*}(s, x-y, z),$$

$$d_z\mathbf{g}_i^{*}(s,x,z) = d_z\mathbf{w}_i^{*}(x,z) + \mathbf{C}\int\limits_x^{\infty} e^{\mathbf{R}_{*}^{-}(s)(x-y)}(\mathbf{I} - \mathbf{p}_{*}^{-}(s))d_z\mathbf{w}_i^{*}(y,z)\, dy,$$

$$d_z\mathbf{w}_1^{*}(x,z) = d_z\mathbf{K}_0(x+z), \qquad d_z\mathbf{w}_2^{*}(x,z) = d_z I\{z \geqslant x\}\overline{\mathbf{K}}_0(x),$$

$$d_z\mathbf{w}_3^{*}(x,z) = I\{z > x\}d\mathbf{K}_0(z).$$

Позначимо

$$m_1^0 = \sum_{k=1}^{m}\pi_k\sum_{r=1}^{m}\left(\delta_{kr}\left(\int\limits_R x\Pi_k(dx)\right) + \int\limits_R x\nu_k dF_{kr}(x)\right),$$

$$m_2^0 = \sum_{k=1}^{m}\pi_k\sum_{r=1}^{m}\left(\delta_{kr}\int\limits_R x^2\Pi_k(dx) + \int\limits_R x^2\nu_k dF_{kr}(x)\right).$$

Зауважимо, що при $m_1^0 > 0$ $|\mathbf{R}_{*}^{-}(s)| \to |\mathbf{R}_{*}^{-}(0)| \neq 0$ і при $m_1^0 = 0$ $|\mathbf{R}_{*}^{-}(s)| \to |\mathbf{R}_{*}^{-}(0)| = 0$, якщо $s \to 0$. Крім того, $\mathrm{P}\{\tau^{+}(\infty) < \infty\} = 0$, якщо $m_1^0 < 0$; $\mathrm{P}\{\tau^{+}(\infty) < \infty\} = 1$, якщо $m_1^0 \geqslant 0$. Позначимо $\mathbf{m}_{+}(0) = (m_1^0)^{-1}\mathbf{P}_0$,$\mathbf{m}_0(0) = (m_2^0)^{-1}\mathbf{P}_0\mathbf{C}^{-1}$.

Теорема 1. *Якщо* $Z(t)$ *має кумулянту* (1), *то*

1) при $m_1^0 > 0$ *для* $z > 0$

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{\gamma^{+}(\infty) > z\} = \mathbf{m}_{+}(0)\displaystyle\int\limits_z^{\infty}(\mathbf{I} - e^{(z-y)\mathbf{R}_{*}^{-}(0)}(\mathbf{I} - \mathbf{p}_{*}^{-}(0)))\overline{\mathbf{K}}_0(y)\, dy, \\ \mathbf{P}\{\gamma_{+}(\infty) > z\} = \mathbf{m}_{+}(0)\displaystyle\int\limits_z^{\infty}(\mathbf{I} - e^{-\mathbf{R}_{*}^{-}(0)y}(\mathbf{I} - \mathbf{p}_{*}^{-}(0)))\overline{\mathbf{K}}_0(y)\, dy, \\ \mathbf{P}\{\gamma_{\infty}^{+} > z\} = \mathbf{m}_{+}(0)(\mathbf{R}_{*}^{-}(0))^{-1}\displaystyle\int\limits_z^{\infty}((e^{-\mathbf{R}_{*}^{-}(0)y} - \mathbf{I})(\mathbf{I} - \mathbf{p}_{*}^{-}(0)) + \mathbf{R}_{*}^{-}(0)y)\, d\mathbf{K}_0(y); \end{cases} \tag{3}$$

2) при $m_1^0 = 0$, $m_2^0 < \infty$ *для* $z > 0$

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{\gamma^{+}(\infty) > z\} = \mathbf{m}_0(0)\displaystyle\int\limits_z^{\infty}(\mathbf{I} + \mathbf{C}\int\limits_z^{y} e^{\mathbf{R}_{*}^{-}(0)(x-y)}\, dx(\mathbf{I} - \mathbf{p}_{*}^{-}(0)))\overline{\mathbf{K}}_0(y)dy, \\ \mathbf{P}\{\gamma_{+}(\infty) > z\} = \mathbf{m}_0(0)\displaystyle\int\limits_z^{\infty}(\mathbf{I} + y\mathbf{C}e^{-\mathbf{R}_{*}^{-}(0)y}(\mathbf{I} - \mathbf{p}_{*}^{-}(0))\overline{\mathbf{K}}_0(y)\, dy, \\ \mathbf{P}\{\gamma_{\infty}^{+} > z\} = \mathbf{m}_0(0)\displaystyle\int\limits_z^{\infty}\left(y\mathbf{I} - \frac{y^2}{2}\mathbf{C}\boldsymbol{\Pi}_1 + y^2\mathbf{C}e^{-\mathbf{R}_{*}^{-}(0)y}(\mathbf{I} - \mathbf{p}_{*}^{-}(0))\right) d\mathbf{K}_0(y), \end{cases} \tag{4}$$

де $\boldsymbol{\Pi}_1$ — *власний проектор матриці* $-\mathbf{R}_{*}^{-}(0)$;

3) при $m_1^0 < 0$

$$\lim_{\nu\to 0}\mathbf{E}[e^{-u\gamma^+(\theta_\nu)-v\gamma_+(\theta_\nu)-\mu\gamma^+_{\theta_\nu}},\ \tau^+(\theta_\nu)<\infty]=\mathbf{O}.$$

Для випадку $x = 0$ має місце твердження

Теорема 2. *Для процесу* $Z(t)$ *з кумулянтою* (1) *спільний розподіл* $\{\tau^+(0),\gamma_i(0)\}$ *визначається співвідношеннями* $(z>0)$

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(0)},\gamma^+(0)>z,\tau^+(0)<\infty]=$$
$$=s^{-1}\widetilde{\mathbf{P}}^0(s)\left(\overline{\mathbf{K}}_0(z)+\mathbf{C}\int\limits_z^\infty e^{(z-y)\mathbf{R}_*^-(s)}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^-(s)\overline{\mathbf{K}}_0(y)\,dy\right),$$

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(0)},\gamma_+(0)>z,\tau^+(0)<\infty]=s^{-1}\widetilde{\mathbf{P}}^0(s)\mathbf{C}\int\limits_z^\infty e^{-y\mathbf{R}_*^-(s)}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^-(s)\overline{\mathbf{K}}_0(y)\,dy, \tag{5}$$

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(0)},\gamma_0^+>z,\tau^+(0)<\infty]=$$
$$=s^{-1}\widetilde{\mathbf{P}}^0(s)\left(\overline{\mathbf{K}}_0(z)+\mathbf{C}\int\limits_z^\infty\int\limits_0^y e^{-x\mathbf{R}_*^-(s)}dx\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^-(s)\,d\mathbf{K}_0(y)\right),$$

де

$$\widetilde{\mathbf{P}}^0(s)=\mathbf{P}\{\xi(\theta_s)=0\}=s(s\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}-\mathbf{N}(\|p_{kr}\mathrm{P}\{\chi_{kr}=0\}\|-\mathbf{I}))^{-1}.$$

При $m_1^0 < 0$ *та* $\chi_{kr}\equiv 0$

$$\mathbf{P}\{\gamma^+(0)>z,\tau^+(0)<\infty\}=$$
$$=(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q})^{-1}\left(\mathbf{\Lambda}\overline{\mathbf{F}}_0(z)+\mathbf{C}\int\limits_z^\infty e^{(z-y)\mathbf{R}_*^-(0)}(\mathbf{I}-\mathbf{p}_*^-(0))\mathbf{\Lambda}\overline{\mathbf{F}}_0(y)\,dy\right),$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_+(0)>z,\tau^+(0)<\infty\}=(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{C}\int\limits_z^\infty e^{-y\mathbf{R}_*^-(0)}(\mathbf{I}-\mathbf{p}_*^-(0))\mathbf{\Lambda}\overline{\mathbf{F}}_0(y)\,dy,$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_0^+>z,\tau^+(0)<\infty\}=$$
$$=(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q})^{-1}\left(\mathbf{\Lambda}\overline{\mathbf{F}}_0(z)+\mathbf{C}\int\limits_0^\infty e^{-y\mathbf{R}_*^-(0)}(\mathbf{I}-\mathbf{p}_*^-(0))\mathbf{\Lambda}\overline{\mathbf{F}}_0(z\vee y)\,dy\right).$$

З теореми 2 та результатів робіт [3, 4] можна отримати аналог двосторонньої нерівності Лундберга. Припустимо, що $\chi_{kr}=0$, k, $r=\overline{1,m}$. Майже напівнеперервні процеси, що задовольняють такі умови, можна розглядати як надлишкові процеси ризику з випадковими преміями в марковському середовищі. Нехай $k(r)$ — дійсне власне значення з максимальною дійсною частиною (перонів корінь) матриці $\mathbf{K}(r)=\mathbf{\Psi}(-\imath r)$. Нехай γ — розв'язок рівняння

$k(r) = 0$ і $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$, $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_m)'$ — відповідно лівий та правий власні вектори з додатними елементами матриці $\mathbf{K}(\gamma)$ і такі, що $\boldsymbol{\nu}\mathbf{h} = 1$. Позначимо

$$C_+ = \max_{j\in E'} \frac{1}{h_j} \sup_{x\geqslant 0} \frac{\overline{F_j^0}(x)}{\int\limits_x^\infty e^{\gamma(y-x)} F_j^0(dy)}, \qquad C_- = \min_{j\in E'} \frac{1}{h_j} \inf_{x\geqslant 0} \frac{\overline{F_j^0}(x)}{\int\limits_x^\infty e^{\gamma(y-x)} F_j^0(dy)}.$$

Наслідок 1. *При $m_1^0 < 0$ для будь-якого $i \in E'$ та всіх $u \geqslant 0$*

$$C_- h_i e^{-\gamma u} \leqslant \mathrm{P}\{\xi^+ > u/x(0) = i\} \leqslant C_+ h_i e^{-\gamma u}.$$

1. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінчених ланцюгах Маркова та для напівмарківських процесів. – Київ: Інститут математики НАН України, 1998. – 320 с.
2. *Gusak D. V., Karnaukh E. V.* Matrix factorization identity for almost semi-continuous processes on a Markov chain // Theory of Stoch. Processes. – 2005. – **11(27)**, No 1–2. – P. 41–47.
3. *Grigelionis B.* Two-sided Lundberg inequalities in a markovian environment // Liet. Matem. Rink. – 1993. – **33**, No 1. – P. 30–41.
4. *Asmussen S.* Ruin probabilities. – Singapore: World Sci., 2000. – 385 p.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 30.06.2006

УДК 519.872

О. В. Коба, С. В. Пустова

Аналітична модель функціонування call-центру

(Представлено академіком НАН України І. М. Коваленком)

An analytical model of the call center operation is developed as a retrial queueing system M/M/c with abandons. The main characteristics of an effective call center operation are defined, and some graphical dependences and numerical characteristics are given.

У сучасних умовах українського та світового ринку послуг для збільшення ролі задоволення потреб клієнтів важливим фактором є взаємозв'язок із клієнтами засобами телефонного зв'язку, зокрема call-центрами.

У цілому, call-центр — загальний термін, який визначає процес обслуговування за участю людини з використанням телефону. Спочатку call-центри використовувались для обслуговування клієнтів лише за допомогою телефонних апаратів. При цьому інформація передавалась голосом оператора. Проте зараз розпочалася активна інтеграція до call-центру таких технологій, як IP-телефонія, електронна пошта, Інтернет, бази даних, факсимільний зв'язок, чат тощо. Спостерігається повсюдне вбудовування підприємствами до своєї структури call-центрів або укладання договору щодо надання послуг call-центрами стороннім організаціям. Call-центри поступово отримують ознаки широкого поширення і певного стандарту в соціальній сфері та сфері обслуговування.