
НОВЫЕ МЕТОДЫ И ПРОГРЕССИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ЛИТЬЯ

УДК 621.771

А. В. Ноговицын, И. Р. Баранов

Физико-технологический институт металлов и сплавов НАН Украины, Киев

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ МЕТАЛЛА ПРИ ВАЛКОВОЙ РАЗЛИВКЕ

Предложена математическая модель течения расплава металла в межвалковом зазоре при валковой разливке. Жидкий металл рассмотрен как линейная вязкая среда. Методом конечных разностей решена система, состоящая из уравнения Лапласа для функции тока и уравнения Пуассона для напряженности вихря, преобразованная для бицилиндрических координат. Приведены результаты расчета скоростей течения. Установлено наличие попятного течения на мениске расплава, скорость которого возрастает с увеличением диаметра валков и угла мениска.

Ключевые слова: валковая разливка металла, уравнения Лапласа и Пуассона, бицилиндрическая система координат, метод конечных разностей.

Запропоновано математичну модель течії розплаву металу в міжвалковому зазорі при валковій розливці. Рідкий метал розглядано як лінійну в'язку середу. Методом скінченних різниць вирішено систему, що складається з рівняння Лапласа для функції струму та рівняння Пуассона для напруженості вихору, яка перетворена для біциліндричних координат. Наведено результати розрахунку швидкостей течії. Встановлено наявність поп'ятної течії на мениску розплаву, швидкість якого зростає зі збільшенням діаметру валків і кута мениска.

Ключові слова: валкова розливка металу, рівняння Лапласа і Пуассона, біциліндрична система координат, метод скінченних різниць.

There is offered a mathematical model of the flow of molten metal in the roll gap in the roll casting. The liquid metal is considered as a linear viscous medium. By finite difference method was solved the system consisting of the Laplace equation for the stream function and the Poisson equation for the strength of the vortex, converted to bicylindrical coordinates. The results of the calculation of the flow velocity are described. It was found out the presence of retrograde flow on the meniscus of the melt, the rate of which increases with the diameter of the rolls and the angle of the meniscus.

Keywords: roller casting metal, Laplace and Poisson equation, bicylindrical coordinate system, the method of finite differences.

При валковой разливке стальной полосы жидкий металл заливают сверху в зазор между валками-кристаллизаторами. Жидкий металл увлекается в сильно сужающийся межвалковый зазор ("комиль-зону") вращающимися валками, что дает основание полагать о наличии в нем достаточно сложного по характеру те-

чения. Критический анализ работ [1], посвященных теоретическому описанию параметров тепломассопереноса в расплаве между вращающимися валками-кристаллизаторами, указывает на отсутствие установленных закономерностей течения металла в межвалковом зазоре и предполагает актуальность дальнейшего исследования процесса валковой разливки.

От мениска начинается кристаллизация жидкого металла, на рабочих поверхностях обоих валков формируются две твердые корки металла, которые при определенном угле ($\alpha_{кр}$) соприкасаются между собой, подвергаясь в дальнейшем пластической деформации ($\alpha_{об}$), рис. 1. Для геометрически подобных «комильзон» картину течения расплава определяют, в основном, такие параметры, как угол контакта металла с валком α и отношение толщины полосы на выходе из валков h_n и радиуса валка R . В настоящей работе исследовали течение металла в межвалковом зазоре при валковой разливке-прокатке стальной полосы толщиной 3 мм в валках диаметром 500, 1000, 1500 мм. Параметры разливки-прокатки рассчитаны по разработанной методике [2] и представлены в таблице. Из данных, приведенных в таблице, прежде всего, видно, что диаметр валков и угол мениска существенным образом определяют скорость разливки, которая практически прямо пропорционально зависит от этих параметров.

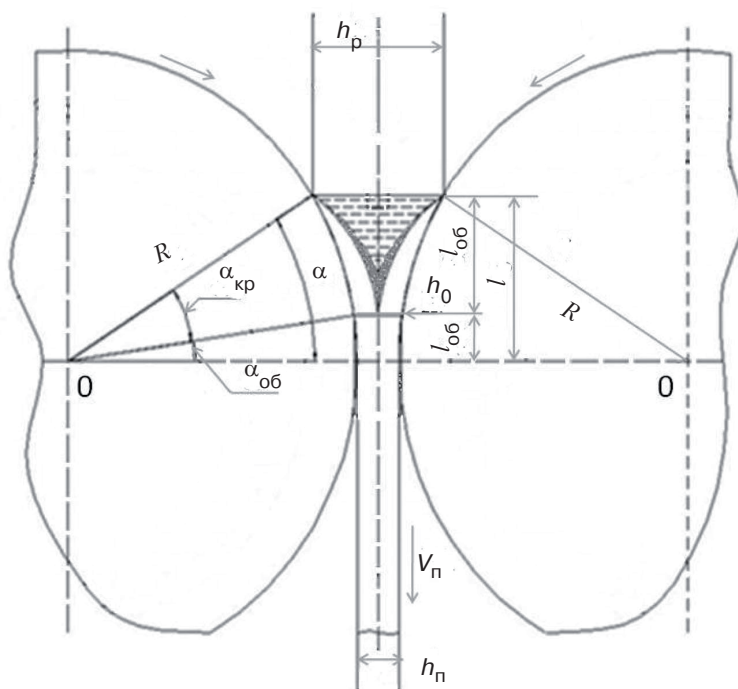


Рис. 1. Схема поперечного сечения непрерывной валковой при разливке-прокатке: R – внешний радиус валка; l – общая длина зоны кристаллизации (деформации); α – угол контакта металла с валком; $l_{кр}$ – длина зоны кристаллизации; $\alpha_{кр}$ – угол области кристаллизации; $l_{об}$ – длина зоны деформации; $\alpha_{об}$ – угол области деформации (участок прокатки); h_p – поперечный размер ванны жидкого металла; h_0 – толщина полосы в начале зоны деформации; h_n – толщина полосы на выходе из валков; V_n – скорость выхода полосы из валков

Параметры валковой разливки-прокатки стальной полосы толщиной 3 мм при различных диаметрах валков и углах мениска α

Диаметр валков, мм	Угол мениска, α , град	Скорость литья, мм/с	Угол кристаллизации $\alpha_{кр}$, град	Угол деформации $\alpha_{об}$, град	Высота налива, l , мм	Ширина ванны, h_p , мм	Относительное обжатие, ϵ , %
500	10	240	7,6	2,4	45	11	14
	20	550	17,1	2,9	90	34	19
	30	850	27,1	2,9	135	71	19
1000	10	500	8,3	1,7	90	19	18
	20	1150	18,3	1,7	180	66	17
	30	1750	28,6	1,4	270	139	10
1500	10	850	8,6	1,4	135	27	15
	20	1750	18,3	1,7	270	97	24
	30	2600	28,6	1,4	400	203	14

Для исследования параметров течения использовали метод численного моделирования на основе метода конечных разностей.

Применение бицилиндрической системы координат

Для случая валковой разливки наиболее подходящей криволинейной системой координат является бицилиндрическая. Окружности валков-кристаллизаторов могут являться координатными линиями этой системы. Бицилиндрическая система координат в работах [3-5] применялась для исследования параметров вязкопластического течения в очаге деформации при плоской прокатке и показала ряд преимуществ перед декартовой системой координат.

Представим «комиль-зону» в бицилиндрических координатах ξ и η (рис. 2).

Связь декартовых координат X и Y с бицилиндрическими ξ и η выражается следующими соотношениями:

$$X = \frac{a \cdot \sin \xi}{ch\eta - \cos \xi}; \quad Y = \frac{a \cdot sh\eta}{ch\eta - \cos \xi}, \quad (1)$$

где a – расстояние от начала декартовых координат по оси X до полюса F . Линии $\xi = \text{const}$ являются окружностями, включающими хорду FF_1 , а линии $\eta = \text{const}$ – ортогональными окружностями, уравнения которых имеют вид

$$(X - a \cdot cth\eta)^2 + Y^2 = \frac{a^2}{sh^2\eta}. \quad (2)$$

Из этого уравнения следует, что радиусы упомянутых окружностей выражаются формулой

$$r = \pm \frac{a}{sh\eta}, \quad (3)$$

а их центры лежат на оси X на расстоянии b от начала координат, где

$$b = a \cdot cth\eta. \quad (4)$$

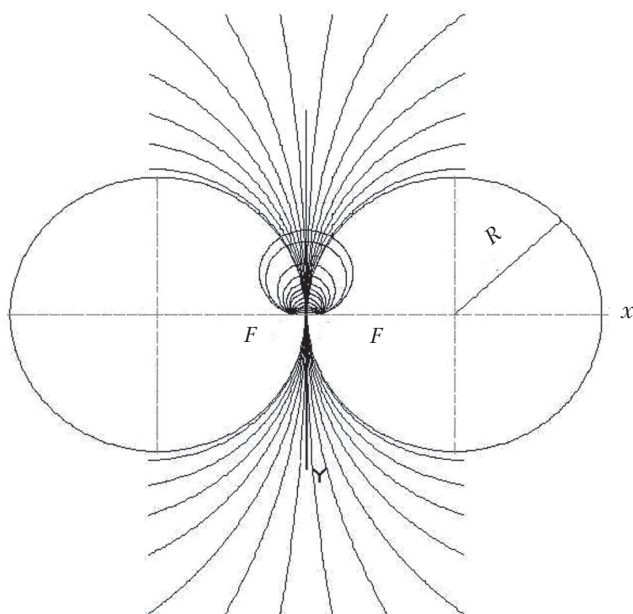


Рис. 2. Схема валковой разливки в бицилиндрической системе координат

«Комиль-зона» со стороны входа ограничена координатой ξ_0 , со стороны выхода – координатой ξ_1 . Окружности валков с радиусом R являются координатными линиями $\pm\eta_0$. Центр окружности валка расположен на расстоянии $b = R + H_1$ от начала координат, где H_1 – половина толщины полосы на выходе из валков-кристаллизаторов.

Плоская «комиль-зона» в бицилиндрической системе координат представляет собой криволинейную ортогональную область $\{0 < \eta < \eta_0; -\pi \leq \xi \leq \xi_0\}$.

Уравнения вязкого течения в бицилиндрических координатах

Для перевода дифференциальных уравнений течения сплошной среды в частных производных для вязкой жидкости из декартовой системы координат (x, y) в ортогональную криволинейную систему (ξ, η) имеются установленные соотношения.

Для скоростей деформаций

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\xi\xi} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial V_\xi}{\partial \xi}; & \dot{\epsilon}_{\eta\eta} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta}; \\ \dot{\gamma}_{\xi\eta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{V_\eta}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\xi}{H_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Для условия несжимаемости

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (H_2 V_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (H_1 V_\eta) = 0. \quad (6)$$

Для составляющих скорости

$$V_\xi = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}; \quad V_\eta = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \quad (7)$$

Для напряженности вихря

$$\omega = \frac{1}{2H_1H_2} \left[\frac{\partial(H_1V_\eta)}{\partial\xi} - \frac{\partial(H_2V_\xi)}{\partial\eta} \right]. \quad (8)$$

Для уравнения связи между напряженностью вихря и функцией тока

$$-\frac{1}{2H_1H_2} \left[\frac{\partial}{\partial\xi} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \right) \right] = \omega. \quad (9)$$

Для уравнения напряженности вихря

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial\xi} \left(\omega \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \right) - \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\omega \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \right) - \frac{\partial}{\partial\xi} \left[\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial\xi} (v\omega) \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial\eta} (v\omega) \right] = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где v – кинематическая вязкость разливаемого металла.

В системе бицилиндрических координат параметры Ляме H_1 и H_2 принимают следующие значения:

$$H_1 = H_2 = H = \frac{a}{ch\eta - \cos\xi}. \quad (11)$$

При $v = \text{const}$ и с учетом большой вязкости жидкого металла основная система кинематических уравнений (9)–(10) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial\Psi^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial\Psi^2}{\partial\eta^2} + 2H^2\omega = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} = 0. \quad (13)$$

Для перехода к безразмерной задаче введем безразмерные координаты

$$\bar{\xi} = \frac{\xi + \pi}{\xi_0 + \pi}; \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\xi_0 + \pi}; \quad \bar{H} = \frac{H}{a}.$$

Это позволяет область интегрирования преобразовать в прямоугольник со сторонами

$$0 < \bar{\xi} < 1; \quad 0 < \bar{\eta} < \eta_0.$$

Безразмерные скорости течения металла представим в отношении к скорости вращения вала V_B

$$\bar{V}_\xi = \frac{V_\xi}{V_B}; \quad \bar{V}_\eta = \frac{V_\eta}{V_B}.$$

Тогда уравнения (12) и (13) примут вид

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} + 2\bar{H}^2 \bar{\omega} = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \bar{\eta}^2} = 0, \quad (15)$$

где

$$\bar{\Psi} = \frac{\Psi}{aV_B(\xi_0 + \pi)}; \quad \bar{\omega} = \frac{a(\xi_0 + \pi)}{V_B} \omega.$$

Граничные условия для кинематической задачи

Дифференциальные уравнения в частных производных (14)-(15) представляют собой математическую модель внутреннего механизма изучаемых процессов и дают сравнительно мало информации о решении. Так, все многообразие течений сплошных сред (газов, жидкостей, металлов) описывается решениями одних и тех же дифференциальных уравнений. Различные течения (то есть решения) отличаются только граничными и начальными условиями, а также такими параметрами динамического и реологического подобий, как число Рейнольдса для вязкой среды. Опыт показывает, что на достоверность решения рассматриваемой задачи решающее влияние оказывает правильное задание кинематических граничных условий [3, 4].

Область интегрирования представляет собой половину “комиль-зоны”, которая ограничена координатными линиями $\eta = 0$ (ось симметрии), $\eta = \eta_0$ (дуга окружности валка-кристаллизатора), $\xi = \xi_0$ (входное сечение “комиль-зоны”), $\xi = -\pi$ (выходное сечение “комиль-зоны”).

Определим значения и выражение для функции тока Ψ и напряженности вихря на указанных границах.

Линия симметрии ($\eta = 0$).

Естественно предположить, что функция тока вдоль оси симметрии течения имеет постоянное значение, поскольку с физической точки зрения она представляет собой расход металла между линиями тока. Для выбранной системы отсчета получаем, что

$$\Psi|_{\eta=0} = 0. \quad (16)$$

Граничное условие для вихря имеет также очень простой вид

$$\omega|_{\eta=0} = 0.$$

Линия контакта с валком ($\eta = \eta_0$).

Задание граничного значения для функции тока здесь также не представляет серьезных затруднений. Если учесть, что поверхность валка непроницаема для разливаемого металла, то значение функции тока на ней должно соответствовать половине расхода металла (Q) в данном сечении (ξ) «комиль-зоны»

$$\Psi|_{\eta=\eta_0} = -\frac{1}{2}Q(\xi). \quad (17)$$

Выведем формулу для расчета вихря на границе металла с валком с учетом наличия зон прилипания и скольжения. Разложение функции тока Ψ в окрестности точки (ξ, η_0) запишем

$$\psi(\xi, \eta_0 - d) \approx \psi(\xi, \eta_0) + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Big|_{\xi, \eta_0} d + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \Big|_{\xi, \eta_0} \cdot d^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} d^3.$$

С учетом того, что
$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = HV_{\xi}; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2H^2\omega;$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2H^2\omega \right); \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta_0 \partial \xi^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (-HV_{\eta}),$$

в разностной форме получим

$$\begin{aligned} \omega_{i,m} = & \frac{3}{2H_{i,m}^2 d^2} (\psi_{i,m-1} - \psi_{i,m}) - \frac{3}{2H_{i,m} d} V_{\xi_{i,m}} + \\ & + \frac{3}{4H_{i,m}} \frac{\psi_{i+1,m} - 2\psi_{i,m} + \psi_{i-1,m}}{h} + \\ & + \frac{d}{4H_{i,m}^2} \frac{(HV_{\eta})_{i+1,m} - 2(HV_{\eta})_{i,m} + (HV_{\eta})_{i-1,m}}{h^2} - \frac{\omega_{i,m-1}}{2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Граничное условие (18) решающим образом определяет характер пластического течения в очаге деформации, достоверность которого зависит от правильности задания скорости $V_{\xi_{i,m}}$ на линии контакта металла с валком [4]. Очевидно лишь, что в зоне прилипания относительное скольжение металла отсутствует и $V_{\xi_{i,m}} = 0$.

Входное и выходное сечения ($\xi = \xi_0; \xi = \xi_1$).

При постановке кинематических граничных условий в сечении входа в «комиль-зону» применили так называемые «свободные» условия, рекомендуемые П. Рочем [6]

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0. \quad (19)$$

На выходе металла из валков-кристаллизаторов предположили, что закристаллизовавшийся металл является твердым телом, то есть скорость V_{η} металла равна нулю, а V_{ξ} – постоянная по толщине полосы. В этом случае

$$\psi = \int_0^h HV_{\xi} \cdot d\eta; \quad \omega = 0. \quad (20)$$

Систему уравнений (14)-(15) решали конечно-разностным методом. Для решения системы разностных уравнений использовали итерационный метод Зейделя [7], сущность которого заключается в том, что на очередном итерационном шаге в правой части уравнений наряду со значениями Ψ^p и ω^p ,

полученными в предыдущем итерационном цикле, используются значения Ψ^{P+1} и ω^{P+1} , рассчитанные на данном итерационном шаге.

Итерационный процесс решения начинается с задания первого приближения для функции тока и напряженности вихря. Для рассматриваемого случая за первое приближение приняли линейное распределение функции тока вдоль координаты ξ от значения Ψ и ω на границах $\eta = 0$ до значений $\Psi = \Psi(\xi, \eta_0)$, $\omega = \omega(\xi, \eta_0)$.

Расчет заканчивается после выполнения условия сходимости

$$\frac{1}{M+N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left(\frac{\Psi_{i,j}^P - \Psi_{i,j}^{P+1}}{\Psi_{i,j}^P} \right) + \left(\frac{\omega_{i,j}^P - \omega_{i,j}^{P+1}}{\omega_{i,j}^P} \right) < \Delta. \quad (21)$$

При размере сетки 20x20 мм и точности 0,01 количество итераций счета одного варианта с заданными граничными кинематическими условиями составляет около 100 итераций.

Результаты расчета параметров течения металла в «комиль-зоне» для случая разливки-прокатки стальной полосы в валках-кристаллизаторах диаметром 500 мм представлены на рис. 3 в виде эпюр распределения продольных (а) скоростей \dot{V}_z течения металла и напряженности вихря $\bar{\omega}$ (б) в поперечных сечениях (номера сечений обозначены цифрами) «комиль-зоны».

Анализ расчетных данных показывает на значительную неравномерность распределения скоростей течения в поперечных сечениях «комиль-зоны». В слоях металла, прилегающих к валку, наблюдаются значительные градиенты продольной скорости течения и напряженности вихря (завихренности). Жидкий металл центральной части верхней половины «комиль-зоны» отстает от окружной скорости валка и находится в состоянии, близком к застойному. С увеличением угла α свыше 20° на поверхности мениска появится тенденция к попятному движению металла из межвалкового зазора, что может вызывать бурление металла и выброс его частиц из «комиль-зоны». При $\alpha = 30^\circ$ скорость попятного движения металла имеет величину, соответствующую 20 % скорости вращения валка-кристаллизатора, то есть 170 мм/с. Напряженность вихря частиц металла у поверхности валка (затвердевшей корочки металла) в этом случае достигает значения 320 с^{-1} .

С увеличением диаметра валков-кристаллизаторов характер течения металла не изменяется (рис. 4).

Однако в связи с ростом скорости разливки (см. таблицу) абсолютные скорости попятного течения существенно возрастают и проявляются уже при меньших углах мениска. Зависимость размерной скорости попятного течения металла, соответствующей экстремуму эпюры во входном сечении «комиль-зоны», от диаметра валков приведена на рис. 5.

Из приведенных результатов расчета следует, что скорости попятного течения металла на мениске «комиль-зоны» могут достигать весьма больших значений (до 520 мм/с) в случае применения валков большого диаметра (1500 мм). Такое интенсивное обратное течение расплава на поверхности мениска «комиль-зоны» может вызывать бурление и выбросы расплава из межвалкового зазора, что нетехнологично с точки зрения получения качественной полосы. Можно предположить, что для каждого диаметра валков-кристаллизаторов и каждой толщины разливаемой полосы существует некоторый («критический») угол мениска, превышать который не следует. Причем, чем больше диаметр валков, тем меньше «критический» угол мениска.

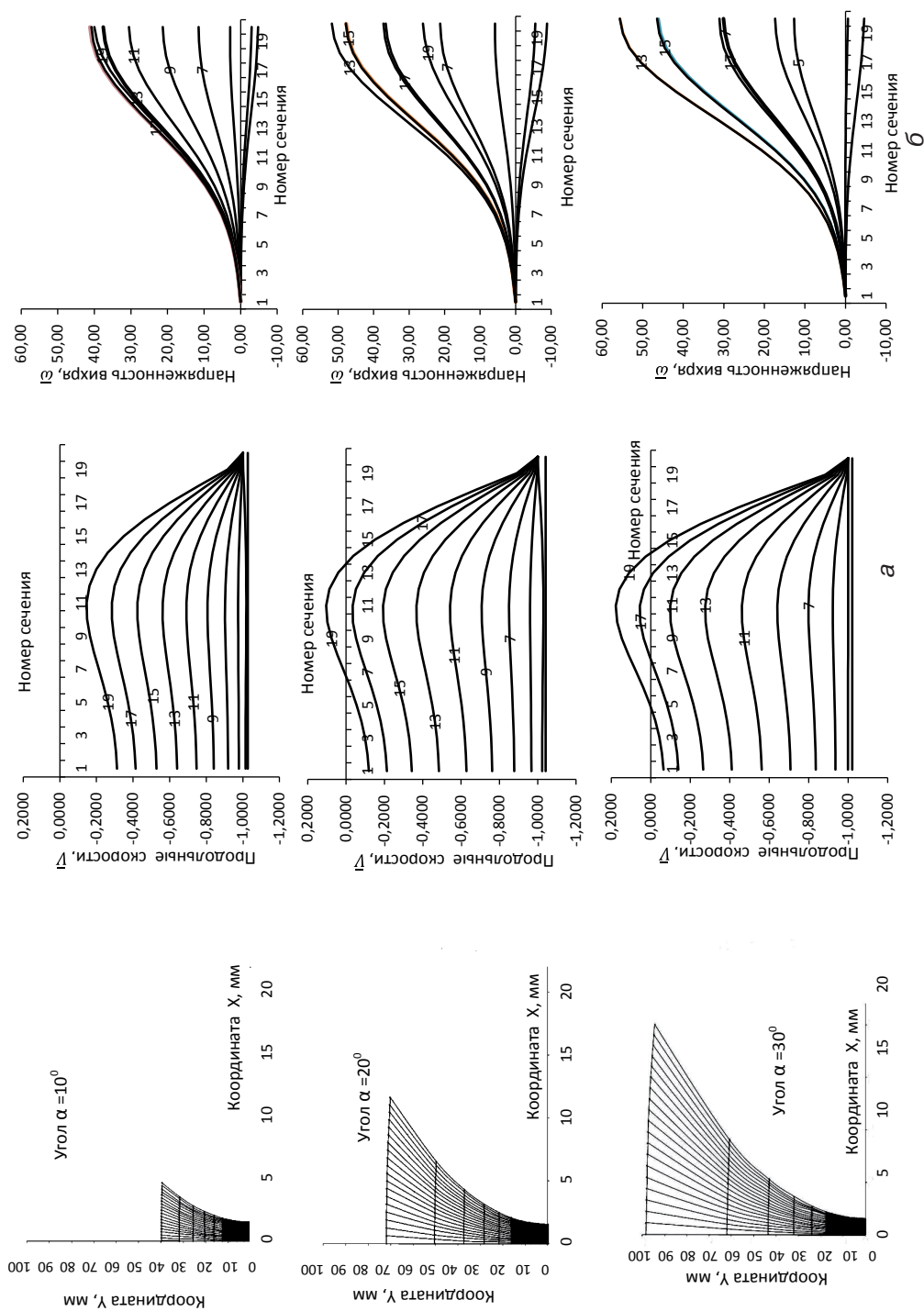


Рис. 3. Результаты расчета распределения продольных V_z (а) скоростей течения металла и напряженности вихря $\bar{\omega}$ (б) в поперечных сечениях (номера сечений обозначены цифрами) "комиль-зоны" при валковой разливке

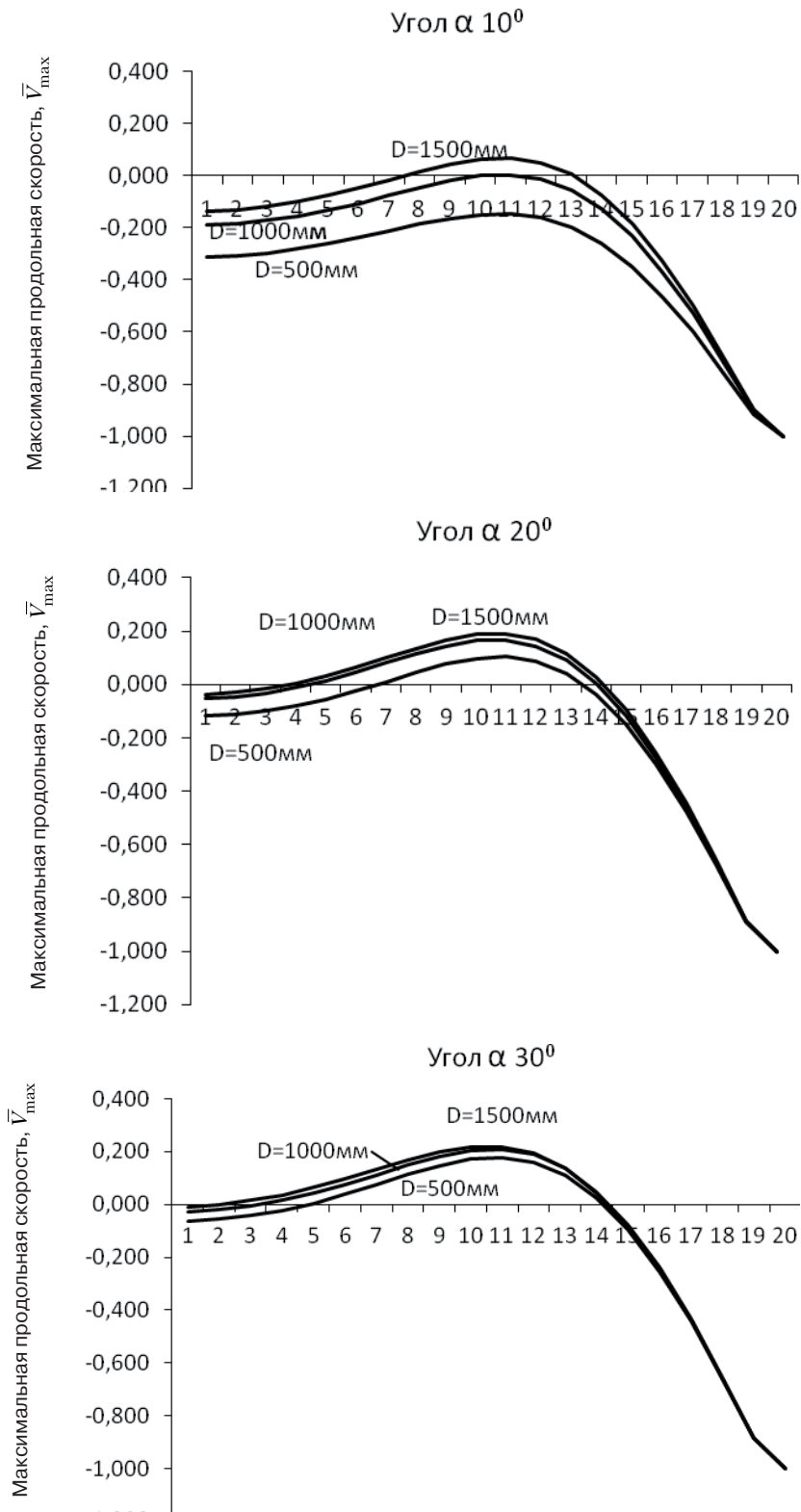


Рис. 4. Эпюры относительной скорости (\bar{v}^{\max}) течения расплава на мениске "комиль-зоны" при различных углах (α) мениска и диаметрах (D) валков-кристаллизаторов

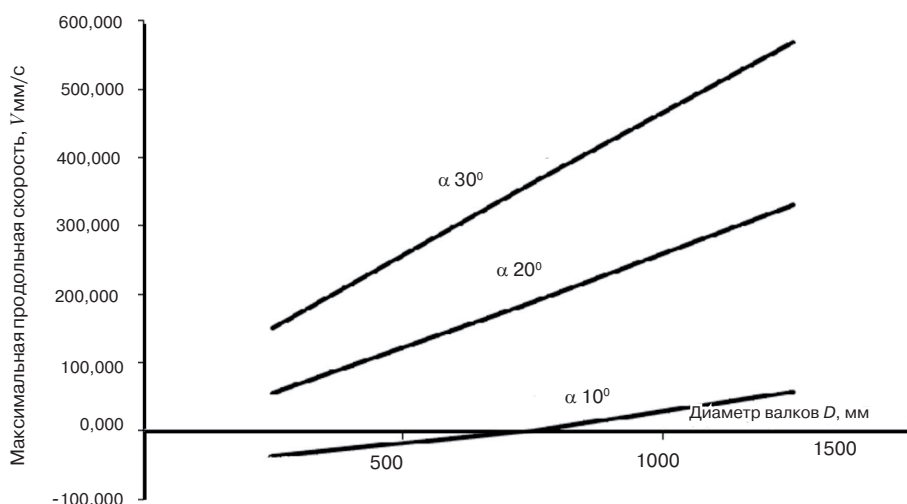


Рис. 5. Расчетная зависимость скорости попятного течения металла на мениске "комиль-зоны" от диаметра валков-кристаллизаторов (D) и угла мениска (α)

Выводы

Создана математическая модель гидродинамики металла при валковой разливке, а также путем численной реализации ее на ЭВМ изучены закономерности течения стали между вращающимися валками-кристаллизаторами в зависимости от основных технологических параметров процесса. На основании численных расчетов получены графические зависимости параметров течения расплава при валковой разливке металла от угла мениска. Расчетным путем установлена и проведена количественная оценка попятного течения металла на поверхности расплава. Предполагено, что для каждого диаметра валков-кристаллизаторов и каждой толщины разливаемой полосы существует некоторый («критический») угол мениска, превышать который не следует.



Список литературы

1. Ноговицын А. В., Баранов И. Р. Метод расчета протяженности зон кристаллизации и деформации при валковой разливке-прокатке // *Обработка металлов давлением*. – 2013. – № 1 (34). – С. 170-176.
2. Гридин А. Ю. Математическое моделирование температурного поля металла и валков в процессе валковой разливки-прокатки // *Там же*. – 2009. – № 1 (20). – С. 75-83.
3. Ноговицын А. В. Исследование вязкопластического течения металла при плоской прокатке // *Изв. АН СССР. Металлы*. – 1986. – № 3. – С. 88-96.
4. Ноговицын А. В. Влияние кинематических граничных условий на напряженно-деформированное состояние при плоской прокатке // *Изв. вузов. Чер. металлургия*. – 1988. – № 7. – С. 50-55.
5. Ноговицын А. В. Прогнозирование напряженно-деформированного и структурного состояния стали при горячей прокатке // *Чер. металлы*. – 2000. – № 9. – С. 16-20.
6. Роуч П. *Вычислительная гидродинамика*. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
7. Годунов С. К., Рябенький В. С. *Разностные схемы*. – М.: Наука, 1977. – 440 с.

Поступила 25.11.2013