УДК 622.83; 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ МАССИВОВ ГОРНЫХ ПОРОД В ОКРЕСТНОСТИ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ. НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Журавков М. А., Круподеров А. В., Гайко Н. В.
(БГУ, г. Минск, Республика Беларусь)

Побудовано розв'язання задач про вплив зосередженого динамічного навантаження в пружному ізотропному просторі зі сферичною порожниною, коли напрям сили збігається з напрямом радіус-вектора точки прикладання, і у пружній ізотропній площині з круговим отвором при довільному напрямі сили.

The point force dynamic solutions were constructed for isotropic elastic space with spherical cavity, when the force direction is parallel to direction to radius-vector of point of attack and for isotropic elastic plane with circle cavity with arbitrary direction of force.

Изучение геомеханического состояния областей массивов горных пород в окрестности выработанного пространства, вследствие воздействия динамических наведенных нагрузок, обусловленных, в свою очередь, процессами естественного и техногенного происхождения, представляет собой класс актуальных задач современной геомеханики.

В данной статье рассматривается решение модельных задач по определению возмущенного напряженно-деформированного состояния (НДС) в массиве горных пород с выработанным пространством в случае действия в массиве динамической нагрузки, имеющей импульсный характер. Первопричины проявления воздействий такого типа могут иметь различную природу (ведение горных работ с переменной скоростью, динамические явления, взрывные работы и др.).

Во многих случаях форму выработанного пространства можно аппроксимировать круговой (при плоской постановке задачи) или сферической поверхностью, а влиянием дневной поверхности можно пренебречь. В соответствии с принципом Сен-Венана, если источник возмущения в породном массиве находится на достаточном расстоянии от выработанного пространства, то его влияние на область породной толщи с выработкой можно моделировать воздействием сосредоточенной силы.

Рассмотрим модельные задачи о динамическом воздействии сосредоточенной силы в упругом изотропном пространстве со сферической полостью, когда направление силы совпадает с радиус-вектором ее точки приложения, и в упругой изотропной плоскости с круговым отверстием. Пусть радиус выработки составляет R единиц, а точка приложения силы расположена на расстоянии aR от центра выработки, где a – безразмерный параметр. Систему координат в трехмерном случае выбираем следующим образом: начало координат − в центре сферы, ось x_3 совмещена с радиус-вектором точки приложения силы, остальные две оси выбираются произвольно перпендикулярно третьей оси. Соответственно в двумерном случае: начало координат располагаем в центре отверстия, а ось x_1 совмещаем с радиус-вектором точки приложения силы, ось x_2 – перпендикулярно ей.

Система разрешающих уравнений для сформулированных модельных задач включает:

- уравнения равновесия Ламе:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\mu\Delta u_i+f(t)\delta_{i3}\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3-aR),\quad i=1,2,3 \qquad (1)$$

для пространственного случая и

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\mu\Delta u_i+f(t)\delta_{ij}\delta(x_1-aR)\delta(x_2),\quad i=1,2 \qquad (2)$$

для двумерного случая (индекс j указывает направление силы);

- граничные условия (записанные в сферических (r,φ,β) и полярных координатах (r,α)):

$$\begin{cases} \alpha_1 u_r |_{r=R} + \beta_1 \sigma_{rr} |_{r=R} = q_1(\beta), \\ \alpha_2 u_\beta |_{r=R} + \beta_2 \sigma_{\beta\beta} |_{r=R} = q_2(\beta), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u_r |_{r=R} + \beta_1 \sigma_{rr} |_{r=R} = q_1(\alpha), \\ \alpha_2 u_\alpha |_{r=R} + \beta_2 \sigma_{r\alpha} |_{r=R} = q_2(\alpha). \end{cases} \tag{4}$$

- на бесконечности должны выполняться условия затухания решения:

$$u_\beta, u_r \underset{r\to\infty}{\to} 0,\ n=3;\quad u_\alpha, u_r \underset{r\to\infty}{\to} 0,\ n=2. \tag{5}$$

- кроме того, принимаем, что начальные возмущения отсутствуют:

$$\begin{aligned} &u_\beta |_{t=0} = 0, u_r |_{t=0} = 0, \dot{u}_\beta |_{t=0} = 0, \dot{u}_r |_{t=0} = 0, n=3, \\ &u_\alpha |_{t=0} = 0, u_r |_{t=0} = 0, \dot{u}_\alpha |_{t=0} = 0, \dot{u}_r |_{t=0} = 0, n=2. \end{aligned} \tag{6}$$

Вначале строим решение задач о воздействии сосредоточенной силы в неограниченном пространстве (плоскости). Такие модельные задачи описываются уравнения (1), граничными условия (3) и начальными условиями (4). Компоненты перемещений полученных решений таких задач обозначим как u_i^1.

На следующем шаге рассматриваем задачу о распространении граничных возмущений от полости в неограниченных пространстве и плоскости при отсутствии массовых сил со специальным видом граничных условий. Компоненты перемещений этих решений в свою очередь обозначим как u_i^2.

Данная задача описывается уравнениями:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i^2}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\frac{\partial \theta^2}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i^2, i = 1,2,3. \tag{7}$$

и граничными условиями(на примере плоской задачи):

$$\begin{cases} \alpha_1 u^2{}_r |_{r=R} + \beta_1 \sigma^2{}_{rr} |_{r=R} = q_1(\alpha) - \alpha_1 u_r^1 |_{r=R} - \beta_1 \sigma^1{}_{rr} |_{r=R}, \\ \alpha_2 u^2{}_\alpha |_{r=R} + \beta_2 \sigma^2{}_{\alpha\alpha} |_{r=R} = q_2(\alpha) - \alpha_2 u^1{}_\alpha |_{r=R} - \beta_2 \sigma^1{}_{r\alpha} |_{r=R}. \end{cases} \tag{8}$$

К этой системе уравнений следует еще добавить ограничения в виде (3) и начальные условия.

В итоге решение исходной модельной задачи представляется в виде суперпозиции решений первой и второй задач:

$$u_i = u_i^1 + u_i^2. \tag{9}$$

Решение первой из дополнительных модельных задач является динамическим аналогом фундаментального решения Кельвина [1] и в общем виде может быть представлено следующим образом [2]:

$$u_i^1(x_1,x_2,x_3,t)=U_i^1(x_1,x_2,x_3-aR,t), n=3,\ u_i^1(x_1,x_2,t)=U_i^1(x_1-aR,x_2,t),\ n=2. \tag{10}$$

Здесь для случая $n = 3$

$$U_i^1(x_1,x_2,x_3,t) = f_+(\tau) * G_i(x_1,x_2,x_3,t),$$

$$G_i = \frac{1}{4\pi r\rho}\left(\left(\frac{x_i x_3}{c_1^2 r^2}\delta\left(t-\frac{r}{c_1}\right)+\frac{1}{c_2^2}\left(\delta_{i3}-\frac{x_i x_3}{r^2}\right)\delta\left(t-\frac{r}{c_2}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{t}{r^2}\left(\delta_{i3}-\frac{3x_i x_3}{c_1^2 r^2}\right)\left(H\left(t-\frac{r}{c_1}\right)-H\left(t-\frac{r}{c_2}\right)\right)\right),$$

$f_+(t) = f(t)H(t)$, $c_1 = \sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}$, $c_2 = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$, $H(t)$ – функция Хевисайда.

Вычисляя свертки, находим:

$$U_i^1 = -\frac{x_i x_3}{4\pi\rho r^3}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left(\frac{1}{c_j^2}f_+\left(t-\frac{r}{c_j}\right)+\frac{3}{r^2}\left(f_2\left(t-\frac{r}{c_j}\right)+\frac{r}{c_j}f_3\left(t-\frac{r}{c_j}\right)\right)\right),\quad i=\overline{1,2};$$

$$U_3^1 = \frac{1}{4\pi\rho r}\left(\frac{x_3^2}{c_1^2 r^2}f_+\left(t-\frac{r}{c_1}\right)+\frac{1}{c_2^2}\left(1-\frac{x_3^2}{r^2}\right)f_+\left(t-\frac{r}{c_2}\right)+\right. \tag{11}$$

$$\left.+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{3x_3^2}{r^2}\right)\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left(f_2\left(t-\frac{r}{c_j}\right)+\frac{r}{c_j}f_3\left(t-\frac{r}{c_j}\right)\right)\right);$$

$$f_2(t)=f_+(t)\cdot t_+,\quad t_+=tH(t),\qquad f_3(t)=f_+(t)\cdot H(t).$$

При $n = 2$ для (10) имеем:

$$U_{ij}^{1}=-\frac{\delta_{ij}}{2\pi}\left(\frac{\delta_{ij}}{c_1 r^2}N_{11}(r,t)-\frac{\delta_{ij}}{c_2}\left(\frac{1}{r^2}N_{12}(r,t)+N_{-12}(r,t)\right)+,\right.$$

$$\left.+\frac{x_i x_j}{r^2}\sum_{j=1}^{2}\frac{(-1)^j}{c_j}\left(\frac{2}{r^2}N_{1j}(r,t)+N_{-1j}(r,t)\right)\right)$$

$$\begin{aligned}N_{-1j}(r,t)&=H(c_j\tau-r)\int_{r/c_j}^{t}\frac{f(t-\tau)}{\sqrt{c_j^2\tau^2-r^2}}d\tau,\\ N_{1j}(r,t)&=H(c_j\tau-r)\int_{r/c_j}^{t}f(t-\tau)\sqrt{c_j^2\tau^2-r^2}\,d\tau.\end{aligned}\tag{12}$$

Математическая постановка второй модельной задачи в новых координатах выглядит следующим образом:
при $n = 3$

$$\begin{aligned}\eta^2\frac{\partial^2\tilde{u}_r^2}{\partial\tau^2}&=(\eta^2-1)\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial r}+\left(\Delta\tilde{u}_r^2-\frac{2}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}(\tilde{u}_\beta^2\sin\beta)\right)+\tilde{u}_r\right),\\ \eta^2\frac{\partial^2\tilde{u}_\beta^2}{\partial\tau^2}&=(\eta^2-1)\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\beta}+\left(\Delta\tilde{u}_\beta^2+\frac{1}{r^2}\left(2\frac{\partial\tilde{u}_r^2}{\partial\beta}-\frac{\tilde{u}_\beta^2}{\sin^2\beta}\right)\right).\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{cases}\tilde{\alpha}_1\,\tilde{u}_r^2\,|_{r=1}+\tilde{\beta}_1\tilde{\sigma}_{rr}^2\,|_{r=1}=\tilde{q}_1(\beta)-\tilde{\alpha}_1\,\tilde{u}_r^1\,|_{r=1}-\tilde{\beta}_1\tilde{\sigma}^1{}_{rr}\,|_{r=1},\\ \tilde{\alpha}_2\,\tilde{u}_\beta^2\,|_{r=1}+\tilde{\beta}_2\tilde{\sigma}_{r\beta}^2\,|_{r=1}=\tilde{q}_2(\beta)-\tilde{\alpha}_2\,\tilde{u}_\beta^1\,|_{r=1}-\tilde{\beta}_2\tilde{\sigma}^1{}_{r\beta}\,|_{r=1},\end{cases}$$

$$\tilde{\alpha}_1=\alpha_1 R,\ \tilde{\beta}_1=\beta_1(\lambda+2\mu),$$

$$\tilde{q}_1(\beta)=q_1(\beta)-\tilde{\alpha}_1\,\tilde{u}_r^1\,|_{r=1}-\tilde{\beta}_1\tilde{\sigma}^1{}_{rr}\,|_{r=1},$$

$$\tilde{q}_2(\beta)=q_2(\beta)-\tilde{\alpha}_2\,\tilde{u}_\beta^1\,|_{r=1}-\tilde{\beta}_2\tilde{\sigma}^1{}_{r\beta}\,|_{r=1}.$$

$$\tilde{u}_\beta^2,\tilde{u}_r^2\underset{r\to\infty}{\to}0.$$

$$\tilde{u}_\beta^2\,|_{\tau=0}=0,\tilde{u}_r^2\,|_{\tau=0}=0,\dot{\tilde{u}}_\beta^2\,|_{\tau=0}=0,\dot{\tilde{u}}_r^2\,|_{\tau=0}=0.$$

и при $n = 2$

$$\eta^2 \frac{\partial^2 \widetilde{u}_r^2}{\partial \tau^2} = (\eta^2 - 1)\frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial r} + \left(\Delta \widetilde{u}_r^2 - \frac{1}{r^2}\left(2\frac{\partial \widetilde{u}_\alpha^2}{\partial \alpha} + \widetilde{u}_r^2 \right)\right),$$

$$\eta^2 \frac{\partial^2 \widetilde{u}_\alpha^2}{\partial \tau^2} = (\eta^2 - 1)\frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \beta} + \left(\Delta \widetilde{u}_\alpha^2 + \frac{1}{r^2}\left(2\frac{\partial \widetilde{u}_r^2}{\partial \alpha} - \widetilde{u}_\alpha^2 \right)\right).$$

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_1 \tilde{u}_r^2 |_{r=1} + \tilde{\beta}_1 \tilde{\sigma}_{rr}^2 |_{r=1} = \tilde{q}_1(\alpha), \\ \tilde{\alpha}_2 \tilde{u}_\alpha^2 |_{r=1} + \tilde{\beta}_2 \tilde{\sigma}_{r\alpha}^2 |_{r=1} = \tilde{q}_2(\alpha), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 R, \tilde{\beta}_1 = \beta_1(\lambda + 2\mu), \\ &\tilde{q}_1(\alpha) = q_1(\alpha) - \tilde{\alpha}_1 \tilde{u}_r^1 |_{r=1} - \tilde{\beta}_1 \tilde{\sigma}_{rr}^1 |_{r=1}, \\ &\tilde{q}_2(\alpha) = q_2(\alpha) - \tilde{\alpha}_2 \tilde{u}_\alpha^1 |_{r=1} - \tilde{\beta}_2 \tilde{\sigma}_{r\alpha}^1 |_{r=1}. \end{aligned} \tag{14}$$

$$\tilde{u}_\alpha^2, \tilde{u}_r^2 \underset{r \to \infty}{\to} 0.$$

$$\widetilde{u}_\alpha^2 |_{\tau=0} = 0, \widetilde{u}_r^2 |_{\tau=0} = 0, \dot{\widetilde{u}}_\alpha^2 |_{\tau=0} = 0, \dot{\widetilde{u}}_r^2 |_{\tau=0} = 0.$$

Процедура построения решения сформулированных математических задач (13) описана в [2]. В свою очередь, преобразование Лапласа от решения систем (13) имеет следующий вид ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \eta$):

При n = 3

$$u_r^{2L} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r^{n+2}} \sum_{j,k=1}^{2} U_{njk}^L(r,s) \widetilde{q}_{kn}^L(s) e^{-\gamma_j (r-1)s} \right) P_n(\cos\beta), \tag{15}$$

$$u_\beta^{2L} = -\sin\beta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r^{n+2}} \sum_{j,k=1}^{2} V_{njk}^L(r,s) \widetilde{q}_{kn}^L(s) e^{-\gamma_j (r-1)s} \right) C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta). \tag{16}$$

$$\tilde{q}_1^L(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{q}_{1n}^L(s) P_n(\cos\beta), \qquad \tilde{q}_2^L(s) = -\sin\beta \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}_{2n}^L(s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta).$$

Здесь $P_n, C_{n-1}^{3/2}$ – полиномы Лежандра и Гегенбаура (остальные обозначения см. в [2]).

При n=2

$$u_r^{2L} = \frac{1}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j,k=1}^{2} u_{nj}^L(\gamma_j rs) Y_{njk}(s) \widetilde{q}_{kn}^L(s) \right) e^{in\alpha}, \tag{17}$$

$$u_{\alpha}^{2L} = \frac{1}{r}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j,k=1}^{2} v_{nj}^{L}(\gamma_j rs) Y_{njk}(s)\widetilde{q}_{kn}^{L}(s)\right)e^{in\alpha}. \tag{18}$$

$$\tilde{q}_1^L(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{q}_{1n}^L(s)e^{in\alpha}, \qquad \tilde{q}_2^L(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{q}_{2n}^L(s)e^{in\alpha}.$$

Остальные обозначения в [2].

Процедура получения решений второй из сформулированных модельных задач выглядит следующим образом. Сначала находятся коэффициенты рядов Фурье $\widetilde{q}_{kn}(t)$. Аналитическое получение этих коэффициентов для плоской задачи является весьма затруднительным, поэтому вначале определяются численные значение коэффициентов в точках, а затем выполняется интерполяция. Для задачи для пространства можно получить аналитические выражения коэффициентов с помощью систем компьютерной алгебры. Далее производится обращение преобразования Лапласа коэффициентов при $\widetilde{q}_{kn}(t)$ в формулах (15) и (16). Опять же для плоского случая аналитическое обращение преобразования Лапласа получить невозможно, поэтому производится приближенное обращение с помощью формул, указанных в [3]. В итоге, на основании свойств преобразования Лапласа ([2]), полное обращение формул (15) и (16) производится с помощью вычисления сверток.

При решении приведенных далее задач используются безразмерные параметры.

Пример 1. Рассмотрим действие на массив со сферической полостью сосредоточенной силы, функциональная зависимость которой от времени представлена следующим выражением:

$$f(\tau) = 10^{12}((4 + (-16 + 16(t - 1/2))(t - 1/2))t^2)(H(\tau) - H(\tau - 1)).$$

В качестве исходных данных были взяты величины, соответствующие массиву калийных солей: радиус полости $R = 3 м$; упругие приведенные свойства массива $E = 10^{10}\,Па$, $\nu = 0{,}3$; плотность среды $\rho = 2200\, кг/м^3$. Точка приложения силы находится на расстоянии 10 радиусов сферы от ее центра. В данном случае рассмотрим случай полости с жесткой вставкой, т.е. случай, когда материал «внутренней заделки» имеет жесткость, в несколько раз превышающую жесткость самого массива. В этом случае можно принять, что выполняются условия жесткого закрепления на границе сферы. В качестве исходных данных взяты такие же значения, что и в первом примере.

В рассматриваемом случае, согласно исходным данным, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $q_1 \equiv 0, q_2 \equiv 0$.

На рис. 1 приведены картины напряжений на границе полости (первые три графика) и на расстоянии двух радиусов от центра полости (следующие три графика) при различных значениях угла β.

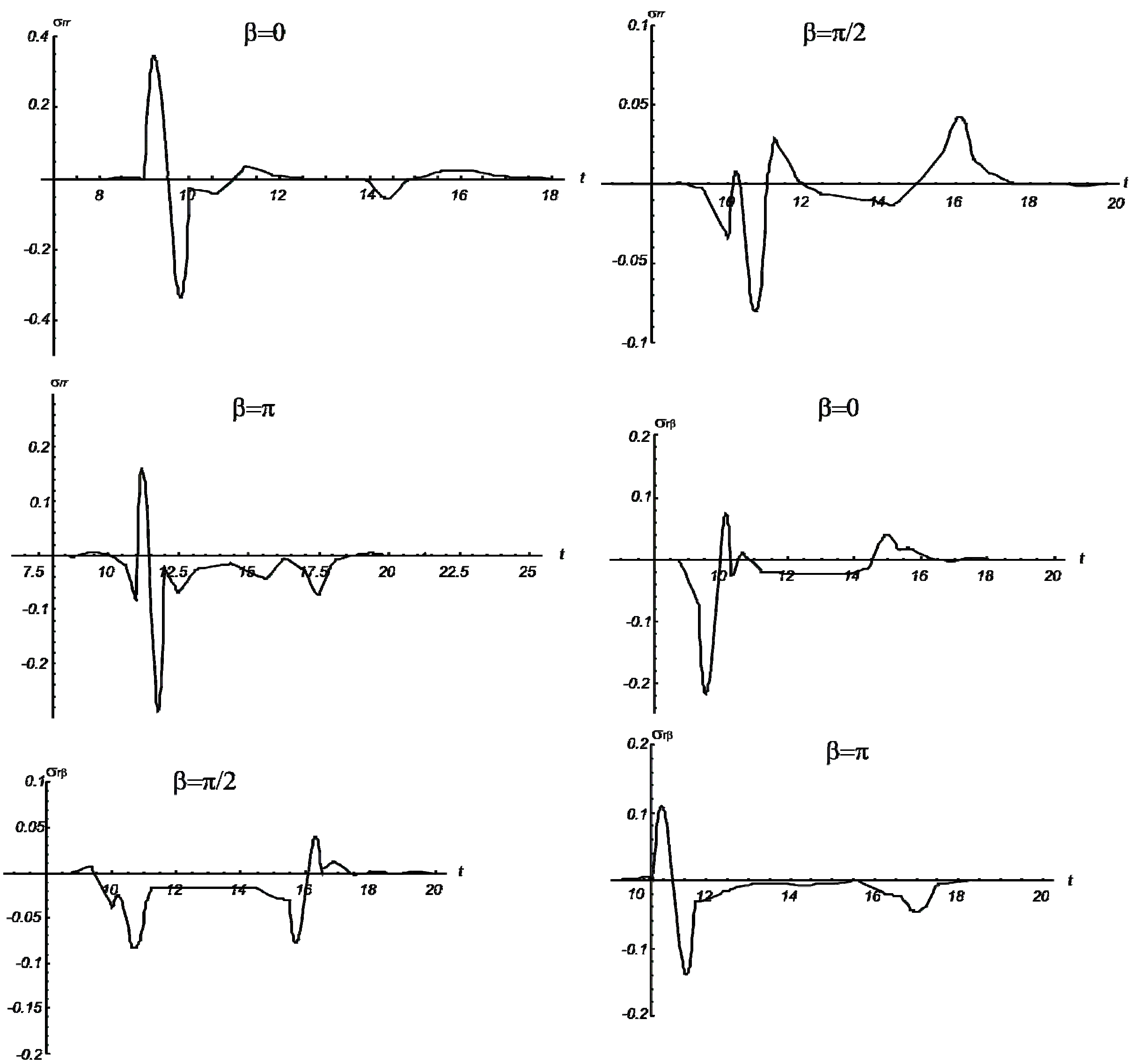

Рис. 1. Графики напряжений в массиве

Исследуем возможность появления зон разрушения в массиве с выработанным пространством при указанном виде силового воздействия. Существуют различные типы критериев динамического разрушения [4]. В данном случае используем обобщение простейшего критерия $\sigma_p = const$ в следующем виде: $\max\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \mathrm{const}$. В качестве указанной константы возьмем статический предел на растяжение, его безразмерная величина равняется 0,00032.

Воспользуемся указанным критерием применительно к результатам расчетов второй модельной задачи. При $\beta = 0$ напряжение σ_{rr} является главным. На рис. 2 показаны график напряжения σ_{rr} на контуре выработки и константа $1000\sigma_p$.

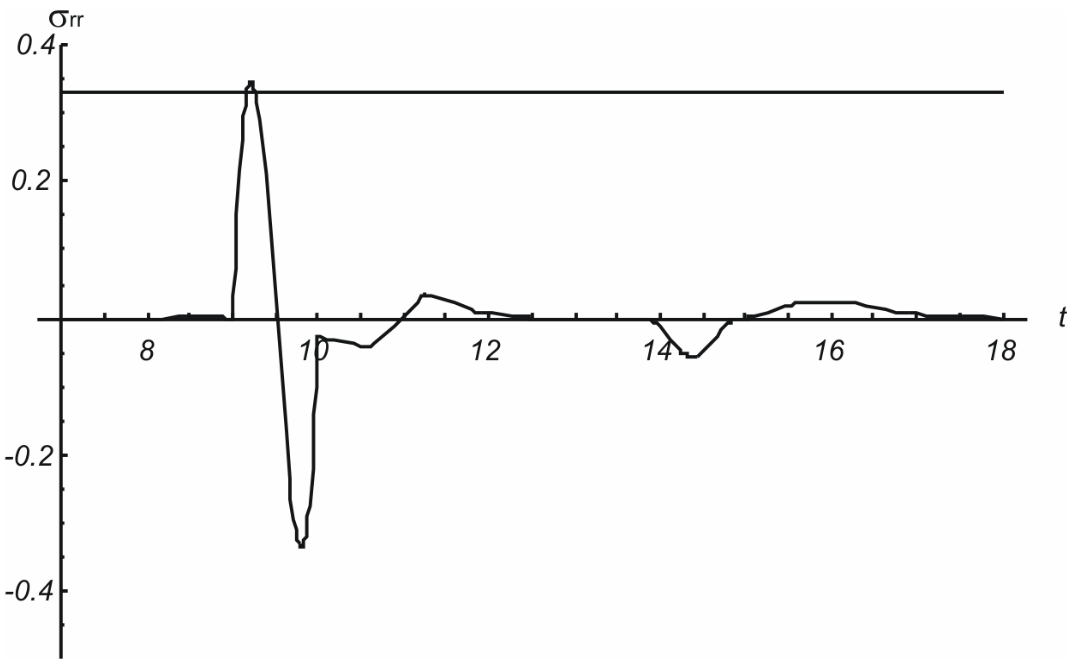

Рис. 2. Нарушение критерия разрушения

Таким образом, можно сделать вывод, что при величине нагрузки, в тысячу раз меньшей величины нагрузки, взятой в примере, т.е. 10^9 Н на контуре выработки произойдет разрушение. Проанализировав напряженное состояние массива в области между источником разрушения и выработкой, можно заключить, что разрушение также будет происходить и в этой области.

Очевидно, что даже рассмотренные здесь модельные задачи имеют широкую сферу применения. Современные масштабы и характер инженерной деятельности в области освоения и эксплуатации недр обуславливают серьезные нарушения динамического равновесия окружающей среды. Поэтому построение моделей, адекватно описывающих данные явления, является весьма важной задачей.

СПИСОК ССЫЛОК

1. Журавков М. А. Фундаментальные решения теории упругости и некоторые их применения в геомеханике, механике грунтов и оснований/ М. А. Журавков – Минск: БГУ, 2008. С 50-56.
2. Горшков А. Г. Волны в сплошных средах/ А. Г. Горшков [и др.] – Москва: Физматлит, 2004.
3. J. Abate A unified framework for numerically inverting Laplace transform/J.Abate, W. Whitt // [Электронный ресурс]. – 2006. – Режим доступа: http://www.columbia.edu/~ww2040/JoC.pdf. – Дата доступа: 13.05.2009/
4. Новиков С. А. Разрушение материалов при воздействии интенсивных ударных нагрузок / С. А. Новиков // Соросовский образовательный журнал. 1999, № 8. С 116-121.