

УДК 539.375

МИНИМИЗАЦИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СТРИНГЕРНОЙ ПЛАСТИНЫ С ОТВЕРСТИЕМ И ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

М. В. Мир-Салим-заде,
канд. физ.-мат. наук
minavar.mirsalimzade@imm.az
ORCID: 0000-0003-4237-0352

Институт математики и
механики НАН
Азербайджана,
Азербайджан, AZ1141, г. Баку,
ул. Б. Вахабзаде, 9

Как известно, тонкие пластины с отверстиями являются одним из широко распространенных элементов конструкций. Для повышения надежности и срока службы представляет интерес нахождение такого контура отверстия, который обеспечивает минимальное окружное напряжение на контуре отверстия, а также препятствует росту возможных трещин в пластине. В данной статье рассматривается задача минимизации напряженного состояния на контуре отверстия в неограниченной изотропной стрингерной пластине, ослабленной двумя прямолинейными трещинами. Берега трещин считаются свободными от нагрузок. Определяется оптимальная форма отверстия, такая, что рост трещин не происходит, а максимальное окружное напряжение на контуре минимально. Используется минимаксный критерий. За параметр, характеризующий напряженное состояние в окрестности вершин трещин, согласно теории квазихрупкого разрушения Ирвина-Орвана принимается коэффициент интенсивности напряжений. Пластина подвергается на бесконечности однородному растяжению вдоль стрингеров. Полагается, что пластина и стрингеры выполнены из различных упругих материалов. Действие стрингеров заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в точках их соединения с пластиной. Для их определения используется закон Гука. Применяв метод малого параметра, теорию аналитических функций и метод прямого решения сингулярных уравнений, была построена замкнутая система алгебраических уравнений, обеспечивающая в зависимости от механических и геометрических параметров пластины и стрингеров минимизацию напряженного состояния на контуре отверстия и равенство нулю коэффициентов интенсивности напряжений в окрестностях вершин трещин. Поставленная задача минимизации сводится к задаче линейного программирования. Применен метод симплексного алгоритма.

Ключевые слова: стрингерная пластина, минимизация напряженного состояния, трещины, оптимальная форма отверстия, минимаксный критерий.

Введение

Одним из широко распространенных элементов конструкций являются тонкие пластины. Зачастую пластины имеют технологические отверстия. Поскольку отверстия являются концентраторами напряжений и могут привести к преждевременному разрушению, задачи по минимизации напряженного состояния на контуре отверстия представляют большой интерес [1–15]. В работе [1] на основе метода конечных элементов (МКЭ) разработана итерационная методика оптимизации формы отверстия для одновременной минимизации касательных напряжений на нескольких участках вокруг границы отверстия. Показано, что такая оптимальная форма отверстия позволяет значительно снизить пиковое напряжение во всех областях вокруг границы отверстия по сравнению с типичными неоптимальными круговыми отверстиями. В статье [2] находится кусочно-гладкая оптимальная форма, минимизирующая локальные напряжения при удаленном сдвиге, для одиночного, свободного от усилий отверстия в упругой пластине. Используются методы конформного отображения и генетического алгоритма. Численно показано, что найденная форма отверстия обеспечивает касательное напряжение на 30% ниже, чем коэффициент концентрации напряжений для обычно используемых круговых отверстий. В [6] рассмотрены три отверстия для случая, когда два одинаковых боковых отверстия отличаются по форме и площади от центрального. По сравнению с одним отверстием взаимодействующие оптимальные отверстия создают на 15–19% меньше энергии в зависимости от расстояния между ними и формы центрального отверстия. Решение обратной упругой задачи об определении оптимальной формы контура отверстия для изотропной среды с системой инородных поперечных прямолинейных включений (неограниченной пластины, усиленной регулярной системой стрингеров) дано в работе [3]. Критерием, определяющим оптимальную форму, было условие отсутствия концентрации напряжений на поверхности отверстия или требование зарождения пластической области сразу по всей поверхности отверстия. В работе [5] получено решение обратной упруго-пластической задачи об определении оптимальной формы

контуров отверстий для клепаной перфорированной пластины. В статье [4] исследована смешанная задача теории упругости для прямоугольника, ослабленного равнопрочными отверстиями. Полагалось, что касательные напряжения на внешней границе прямоугольника равны нулю, а нормальные смещения постоянны, при этом касательные напряжения на контурах отверстий равны нулю, а нормальные напряжения постоянны. Найдены границы отверстий, для которых тангенциальное нормальное напряжение постоянно. Оптимизация формы расположенных в шахматном порядке отверстий, свободных от усилий, проведена в статье [7]. В статье [8] приводятся распространённые простейшие равнопрочные тела и элементы конструкций. Даны равнопрочные формы стреловидного крыла самолета. Найдены некоторые новые равнопрочные формы для упругих тел с любым числом бесконечных ветвей, вытягиваемых из тела, в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния. В работе [9] рассмотрена задача об отыскании равнопрочной формы отверстия в вершине трещины и ее влиянии на рост трещины. Полученное решение задачи оптимального проектирования позволяет выбирать оптимальные геометрические параметры тела, обеспечивающие эффективное торможение трещины. В работе [10] представлен эволюционный метод оптимизации конструкций, основанный на смещении контрольных точек вдоль границы элементов. Определяется оптимальная форма элемента, т.е. такая, для которой коэффициент концентрации напряжений снижен. В статье [11] проведена минимизация концентрации напряжений вокруг края отверстия в ортотропной пластине. Исследованы оптимальные отверстия и распределение напряжений при различных нагрузке, модуле Юнга и направлении волокна в пластине. В работе [12] проведено полуаналитическое исследование периодических и двоякопериодических нестандартно расположенных равнопрочных отверстий в бесконечной пластине при заданной объемной нагрузке. Основное внимание уделено периодическим структурам, обладающим некоторой вращательной симметрией. Теоретический анализ по определению формы выработки в горном массиве, обеспечивающей максимальную прочность, проведен в работе [13]. В статье [14] предложены критерий и метод решения обратной задачи по предотвращению разрушения изотропной упругой пластины, ослабленной отверстием и произвольной системой трещин при действии заданной системы внешних нагрузок. Выполнялись принцип равнопрочности и минимизация коэффициентов интенсивности напряжений. В работе [15] оптимальная форма отверстия в изотропной упругой пластине, ослабленной произвольной системой трещин, определялась на основе минимаксного критерия.

Для повышения срока службы и надежности конструкции важно учитывать возможность наличия трещин, т.е. определять такой контур отверстия, при котором рост трещин не произойдет [9, 13–15].

Рассматриваемая задача состоит в отыскании такого контура отверстия в стрингерной пластине, ослабленной двумя прямолинейными трещинами, при котором рост трещин не произойдет, а максимальное окружное напряжение на контуре будет минимально.

Постановка задачи

Рассмотрим неограниченную тонкую пластину, усиленную регулярной системой стрингеров (рис. 1). Пластина и стрингеры приняты изотропными и выполненными из различных упругих материалов. На бесконечности усиленная пластина подвергается однородному растяжению вдоль стрингеров напряжением $\sigma_y^\infty = \sigma_0$. Пластина толщиной h ослаблена отверстием и двумя прямолинейными трещинами.

Принимаются следующие допущения: при деформации толщина стрингеров неизменна, а напряженное состояние – одноосное. Стрингеры не подвергаются изгибу и работают только на растяжение; в пластине реализуется плоское напряженное состояние; система стрингеров ферменного типа, ослабление стрингеров за счет постановки точек крепления не учитывается; точки крепления одинаковы, их радиус a_0 (площадка сцепления) мал по сравнению с их шагом $2L$ и другими характерными размерами; пластина и стрингеры взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепления.

Считается, что крепления стрингеров расположены дискретным образом с постоянным шагом y_0 по всей длине стрингера, симметрично относительно поверхности пластины. Действие точек крепления моделируется действием сосредоточенных сил, приложенных в точках, соответствующих центрам точек крепления: $z = \pm(2m+1)L \pm iky_0$ ($m=0, 1, 2, \dots$; $k=1, 2, \dots$). Действие стрингеров заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в точках их соединения с пластиной. Величины сосредоточенных сил определяются в ходе решения задачи.

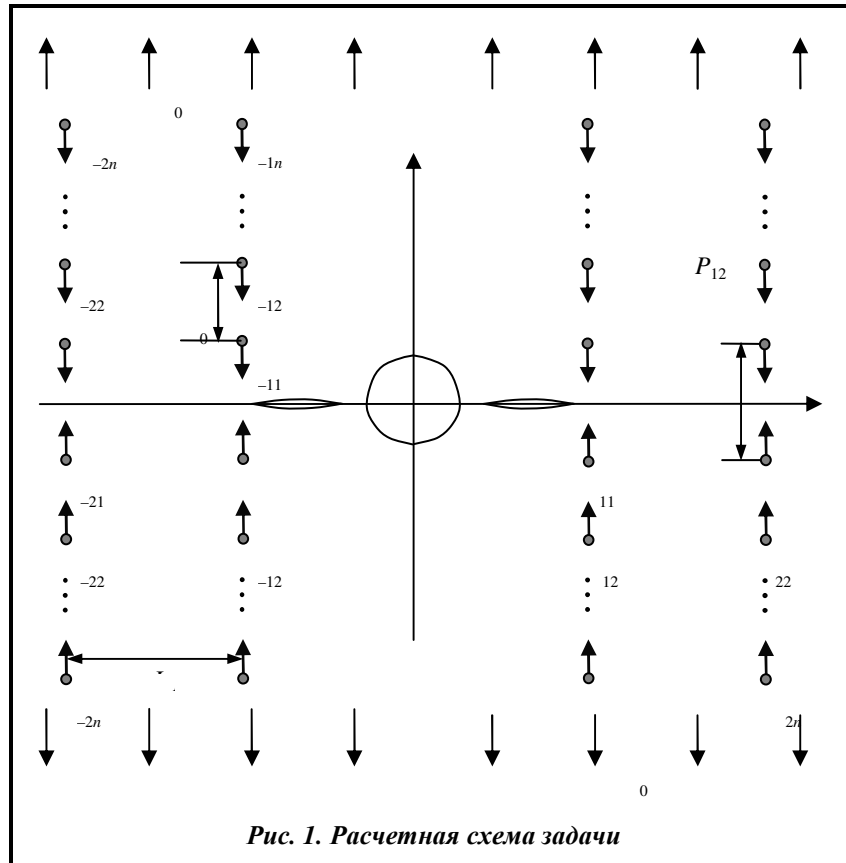


Рис. 1. Расчетная схема задачи

На неизвестном контуре L_0 отверстия граничные условия имеют вид

$$\sigma_n = 0, \quad \tau_{nt} = 0;$$

на берегах трещин

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad a \leq |x| \leq b.$$

Здесь n и t – касательная и нормаль к контуру отверстия.

Требуется найти такую форму отверстия, при которой не будет происходить рост трещин, а тангенциальное нормальное напряжение σ_t , действующее на контуре, будет минимально. Согласно теории квазихрупкого разрушения Ирвина-Орована за параметр, характеризующий напряженное состояние в окрестности вершин трещин, принимается коэффициент интенсивности напряжений. Таким образом, необходимо, чтобы выполнялись условия минимизации максимального окружного напряжения σ_t на контуре отверстия и равенства нулю коэффициентов интенсивности напряжений в окрестностях вершин трещин:

Следовательно, требуем, чтобы выполнялись условия

$$\min_{\eta \in C} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \sigma_t(\theta, \eta) \tag{1}$$

$$K_I^a = 0, \quad K_I^b = 0. \tag{2}$$

Здесь C – набор ограничений, подлежащий определению; η – проектные параметры; K_I^a , K_I^b – коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности вершин трещин. Так как в рассматриваемой задаче трещины расположены симметрично, $K_I^a = K_I^{-a}$, $K_I^b = K_I^{-b}$.

Поставленная задача состоит в определении такого контура отверстия, при котором максимальное окружное напряжение σ_t будет минимально, а коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности вершин трещин равны нулю, а также в определении величин сосредоточенных сил P_{mn} и напряженно-деформированного состояния усиленной пластины.

Решение краевой задачи

Будем искать неизвестный заранее контур L_0 отверстия в классе контуров, близких к круговым. Представим неизвестный контур L_0 в виде

$$r = \rho(\theta) = R + \varepsilon H(\theta),$$

где $\varepsilon = R_{\max}/R$ – малый параметр; R_{\max} – наибольшая высота неровности профиля контура L_0 отверстия от окружности $r = R$; функция $H(\theta)$ подлжит определению в процессе решения обратной задачи.

Не уменьшая общности рассматриваемой задачи, принимаем, что искомая функция $H(\theta)$ симметрична относительно координатных осей и может быть представлена в виде ряда Фурье

$$H(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k} \cos 2k\theta.$$

Искомые функции (напряжения, перемещения, сосредоточенные силы P_{mn} и коэффициенты интенсивности напряжений) будем искать в виде разложений по малому параметру ε

$$\sigma_n = \sigma_n^{(0)} + \varepsilon \sigma_n^{(1)} + \dots, \quad \sigma_t = \sigma_t^{(0)} + \varepsilon \sigma_t^{(1)} + \dots, \quad \tau_{nt} = \tau_{nt}^{(0)} + \varepsilon \tau_{nt}^{(1)} + \dots,$$

$$u_n = u_n^{(0)} + \varepsilon u_n^{(1)} + \dots, \quad v_n = v_n^{(0)} + \varepsilon v_n^{(1)} + \dots,$$

$$P_{mn} = P_{mn}^{(0)} + \varepsilon P_{mn}^{(1)} + \dots,$$

$$K_I = K_I^{(0)} + \varepsilon K_I^{(1)} + \dots$$

в которых пренебрегаем для упрощения членами, содержащими ε степени выше первой.

Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений плоской задачи теории упругости.

Значения компонент тензора напряжений при $r=\rho(\theta)$ получим, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $r=R$. Воспользовавшись известными формулами [16] для компонент напряжений σ_n и τ_{nt} , краевые условия задачи записываем в виде

для нулевого приближения

$$\text{на контуре } r=R \quad \sigma_r^{(0)} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0; \tag{3}$$

$$\text{на берегах трещин } \sigma_x^{(0)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0 \quad a \leq |x| \leq b. \tag{4}$$

для первого приближения

$$\text{на контуре } r=R \quad \sigma_r^{(1)} = N, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = T;$$

$$\text{на берегах трещин } \sigma_x^{(1)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0 \quad a \leq |x| \leq b.$$

Здесь $N = -H(\theta) \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}^{(0)}}{R} \frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta}$, $T = -H(\theta) \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(0)}}{\partial r} + \frac{\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}}{R} \frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta}$.

На основании формул Колосова-Мусхелишвили [16] и граничных условий (3)–(4) на контуре отверстия и берегах трещин задача в нулевом приближении сводится к определению двух аналитических функций $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$ из краевого условия

$$\Phi^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} - e^{2i\theta} \left[\tau \Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau) \right] = 0 \quad \text{при } \tau = Re^{i\theta}, \tag{5}$$

$$\Phi^{(0)}(x) + \overline{\Phi^{(0)}(x)} + x \overline{\Phi^{(0)'(x)}} + \overline{\Psi^{(0)}(x)} = 0 \quad a \leq |x| \leq b. \tag{6}$$

Решение краевой задачи (5)–(6) ищем в виде ($k=0$)

$$\Phi^{(k)}(z) = \Phi_0^{(k)}(z) + \Phi_1^{(k)}(z) + \Phi_2^{(k)}(z), \quad \Psi^{(k)}(z) = \Psi_0^{(k)}(z) + \Psi_1^{(k)}(z) + \Psi_2^{(k)}(z). \tag{7}$$

Потенциалы $\Phi_0^{(0)}(z)$, $\Psi_0^{(0)}(z)$ описывают поле напряжений и деформаций в сплошной пластине под действием системы сосредоточенных сил $P_{mn}^{(0)}$ и напряжения σ_0 и определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(0)}(z) &= \frac{1}{4}\sigma_0 - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left[\frac{1}{z-mL+iny_0} - \frac{1}{z-mL-iny_0} \right], \\ \Psi_0^{(0)}(z) &= \frac{1}{2}\sigma_0 - \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left[\frac{1}{z-mL+iny_0} - \frac{1}{z-mL-iny_0} \right] + \\ &+ \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left[\frac{mL-iny_0}{(z-mL+iny_0)^2} - \frac{mL+iny_0}{(z-mL-iny_0)^2} \right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$; ν – коэффициент Пуассона материала пластины; штрих у знака суммы указывает на то, что при суммировании исключается индекс $m=n=0$.

Функции $\Phi_1^{(0)}(z)$ и $\Psi_1^{(0)}(z)$ ищем в виде

$$\Phi_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \frac{g^{(0)}(t)}{t-z} dt, \quad \Psi_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{1}{t-z} - \frac{t}{(t-z)^2} \right] g^{(0)}(t) dt, \tag{9}$$

где $L_1=[a, b]+[-a, -b]$; $g^{(0)}(x) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} [v^+(x,0) - v^-(x,0)]$; μ – модуль сдвига материала пластины.

Неизвестная функция $g^{(0)}(x)$ и потенциалы $\Phi_2^{(0)}(z)$ и $\Psi_2^{(0)}(z)$ должны быть определены из краевых условий (5)–(6). Представим граничное условие (6) в виде

$$\Phi_2^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi_2^{(0)}(\tau)} - e^{2i\theta} \left[\tau \Phi_2^{(0)\prime}(\tau) + \Psi_2^{(0)}(\tau) \right] = -\Phi_*^{(0)}(\tau) - \overline{\Phi_*^{(0)}(\tau)} + e^{2i\theta} \left[\tau \Phi_*^{(0)\prime}(\tau) + \Psi_*^{(0)}(\tau) \right] \tag{10}$$

где $\Phi_*^{(0)}(\tau) = \Phi_0^{(0)}(\tau) + \Phi_1^{(0)}(\tau)$, $\Psi_*^{(0)}(\tau) = \Psi_0^{(0)}(\tau) + \Psi_1^{(0)}(\tau)$.

Для решения краевой задачи (10) (определения потенциалов $\Phi_2^{(0)}(z)$ и $\Psi_2^{(0)}(z)$) воспользуемся решением Н. И. Мухелишвили [16]. В результате имеем

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(0)}(z) &= \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{1-t^2}{t(1-tz)} + \frac{z-t}{(1-tz)^2} \right] g^{(0)}(t) dt - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \times \\ &\times \sum'_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left\{ \frac{(mL-iny_0)(mL+iny_0)-1}{(mL-iny_0)[z(mL-iny_0)-1]^2} - \frac{(mL+iny_0)(mL-iny_0)-1}{(mL+iny_0)[z(mL+iny_0)-1]^2} \right\} +; \\ &+ \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left\{ \frac{1}{z[z(mL-iny_0)-1]} - \frac{1}{z[z(mL+iny_0)-1]} \right\}; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(0)}(z) &= \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{\Phi_2^{(0)}(z)}{z^2} - \frac{\Phi_2^{(0)\prime}(z)}{z^2} + \frac{1}{2\pi z} \int_{L_1} \left[\frac{2}{tz} - \frac{t}{z(1-tz)} + \frac{t^2 z - z - t}{z(1-tz)^2} - \frac{2t(z-t)}{(1-tz)^3} \right] g^{(0)}(t) dt + \\ &+ \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)z} \times \sum'_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left\{ \frac{1}{z(mL-iny_0)-1} - \frac{1}{z(mL+iny_0)-1} + \frac{1}{z(mL-iny_0)} - \frac{1}{z(mL+iny_0)} \right\}. \end{aligned}$$

В формулах (11) все линейные размеры отнесены к радиусу кругового отверстия R .

Требуя, чтобы функции (7) при $k=0$ удовлетворяли краевому условию (6) на берегах трещин, получим сингулярное интегральное уравнение относительно $g^{(0)}(x)$

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{g^{(0)}(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} K(t,x) g^{(0)}(t) dt = F(x), \tag{12}$$

$$K(t,x) = \frac{x-t}{xt(1-tx)^2} + \frac{1}{x^2 t} + \frac{1}{2} \left[\frac{2t(x-t)(x^2-1)}{x(1-tx)^3} + \frac{2x^3-x-2t+2t^2x-x^3t^2}{x^2(1-tx)^2} \right],$$

$$F(x) = f_0^{(0)}(x) + f_1^{(0)}(x),$$

$$f_0^{(0)}(x) = -\sigma_0 + \frac{\kappa + 2}{\pi h(1 + \kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(0)} n y_0 \left[\frac{1}{(x - mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] + \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{mn}^{(0)} n y_0 \left[\frac{1}{(x + mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] \right\} -$$

$$- \frac{1}{\pi h(1 + \kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}^{(0)} n y_0 \frac{(x - mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x - mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(0)} n y_0 \frac{(x + mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x + mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} \right\},$$

$$f_1^{(0)}(x) = -\frac{1}{2\pi(1 + \kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(0)} n \left\{ \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) \times \right.$$

$$\times \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1)[x^2(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)[(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]} + \frac{2\kappa}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right\rangle +$$

$$+ \left(\kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{[x^3(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 6x^2 mL + 3x]}{[(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} - \right.$$

$$- 4\kappa \frac{mL + x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \left. \right\rangle - 2 \left[\frac{1}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left. \right\} -$$

$$- \frac{1}{2\pi(1 + \kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{mn}^{(0)} \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1)[x^2(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)[(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \right.$$

$$+ \frac{2\kappa_0}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \left. \right\rangle + \left(\kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \times \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{x^3(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 6x^2 mL + 3x}{[(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} + \right.$$

$$+ 4\kappa \frac{mL - x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \left. \right\rangle - 2 \left[\frac{1}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left. \right\} - \frac{\sigma_0}{2x^2} - \frac{3\sigma_0}{2x^4}.$$

Для построения решения сингулярного интегрального уравнения (12) используем метод прямого решения сингулярных уравнений [17, 18]. Переходя к безразмерным переменным, решение представим в виде

$$g^{(0)}(\eta) = \frac{g_0^{(0)}(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}},$$

где $g_0^{(0)}(\eta)$ – ограниченная функция, непрерывная на отрезке $[-1, 1]$; она заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным по чебышевским узлам.

Используя процедуру алгебраизации [17, 18], сингулярное интегральное уравнение (12) при дополнительном условии, которое обеспечивает однозначность перемещений при обходе контуров трещин

$$\int_a^b g_0^{(0)}(t) dt = 0, \quad \int_{-a}^{-b} g_0^{(0)}(t) dt = 0,$$

сводится к системе M линейных алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g^{(0)}(\tau_m)$ ($m=1, 2, \dots, M$)

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^M A_{mk} g_k^{(0)} = f_0^{(0)}(\eta_m) + f_1^{(0)}(\eta_m) \\ \sum_{k=1}^M g_k^{(0)}(\eta_m) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

где $m=1, 2, \dots, M-1$; $A_{mk} = \frac{1}{M} \left[\frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-k|} \theta_k}{2} + K_0(\eta_m, \tau_k) \right]$; $g_k^{(0)} = g^{(0)}(\tau_k)$; $\eta_m = \cos \theta_m$;
 $\theta_m = \frac{2m-1}{2M} \pi$; $\eta_m = \cos \theta_m$; $\tau_k = \eta_k$.

Для определения неизвестных сосредоточенных сил $P_{mn}^{(0)}$ используем закон Гука, согласно которому величина сосредоточенной силы $P_{mn}^{(0)}$, действующей на каждую точку крепления со стороны стрингера, будет

$$P_{mn}^{(0)} = \frac{E_s A_s}{2y_0 n} \Delta v_{mn}^{(0)} \quad (m, n=1, 2, \dots), \quad (14)$$

где E_s – модуль Юнга материала стрингера; A_s – поперечное сечение стрингера; $2y_0 n$ – расстояние между точками крепления; $\Delta v_{mn}^{(0)}$ – взаимное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Примем [19] естественное допущение о том, что выполняется условие совместности перемещений, т.е. взаимное упругое смещение точек $mL+i(ny_0-a_0)$ и $mL-i(ny_0-a_0)$ в рассматриваемой задаче теории упругости равно взаимному смещению точек крепления $\Delta v_{mn}^{(0)}$. Используя формулы Колосова-Мухелишвили [16] и соотношения (7)–(9), (11), найдем взаимное смещение $\Delta v_{mn}^{(0)}$ указанных точек. Ввиду громоздкости эти выражения не приводятся. Решая системы (13) и (14), определим величины сосредоточенных сил $P_{mn}^{(0)}$, приближенные значения $g^{(0)}(\tau_m)$ в узловых точках и тем самым – комплексные потенциалы нулевого приближения.

Для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины при $x=a$ в нулевом приближении имеем

$$K_I^{(0)} = \sqrt{\pi(b-a)} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} g^{(0)}(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi,$$

в окрестности вершины трещины $x=b$

$$K_I^{(0)} = \sqrt{\pi(b-a)} \sum_{m=1}^M (-1)^m g^{(0)}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

По формулам Колосова-Мухелишвили и соотношениям (7) находятся компоненты напряжений в усиленной пластине в нулевом приближении. Зная напряженное состояние в нулевом приближении, находим функции N и T .

После нахождения решения в нулевом приближении переходим к решению задачи в первом приближении. Граничные условия задачи для первого приближения запишутся в виде

$$\Phi^{(1)}(\tau) + \overline{\Phi^{(1)}(\tau)} - e^{2i\theta} \left[\tau \Phi^{(1)'}(\tau) + \Psi^{(1)}(\tau) \right] = N - iT, \quad (15)$$

$$\Phi^{(1)}(x) + \overline{\Phi^{(1)}(x)} + x \overline{\Phi^{(1)'}}(x) + \overline{\Psi^{(1)}(x)} = 0 \quad a \leq |x| \leq b. \quad (16)$$

Решение краевой задачи (15) аналогично нулевому приближению ищем в виде (7) при $k=1$, где потенциалы $\Phi_0^{(1)}(z)$ и $\Psi_0^{(1)}(z)$ описывают поле напряжений и деформаций под действием системы сосредоточенных сил $P_{mn}^{(1)}$ и определяются формулами, аналогичными (8), в которых следует положить σ_0 равными нулю, $P_{mn}^{(0)}$ заменить на $P_{mn}^{(1)}$.

Потенциалы $\Phi_1^{(1)}(z)$ и $\Psi_1^{(1)}(z)$ ищем в виде, аналогичном (9), при этом функцию $g^{(0)}(x)$ следует заменить на $g^{(1)}(x)$.

Функции $\Phi_2^{(1)}(z)$ и $\Psi_2^{(1)}(z)$ находим из граничного условия (15), вновь используя метод Н. И. Мухелишвили

$$\Phi_2^{(1)}(z) = \Phi_*^{(1)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{-2k}, \quad \Psi_2^{(1)}(z) = \Psi_*^{(1)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} z^{-2k}.$$

Здесь $\Phi_*^{(1)}(z)$, $\Psi_*^{(1)}(z)$ определяются формулами, аналогичными (11), в которых следует положить σ_0 равным нулю, $P_{mn}^{(0)}$ заменить на $P_{mn}^{(1)}$, $g^{(0)}(x)$ заменить на $g^{(1)}(x)$. Коэффициенты a_{2k} и b_{2k} находятся по формулам

$$a^{2n} = C_{2n} R^{2n} \quad (n=1, 2, \dots), \quad a_0 = 0, \quad b_{2n} = (2n-1)R^2 a_{2n-2} - R^{2n} a_{-2n+2} \quad (n \geq 2),$$

$$b_0 = 0, \quad b_2 = -C_0 R^2, \quad N - iT = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{2k} e^{-2ki\theta}.$$

Для сосредоточенных $P_{mn}^{(1)}$ имеем

$$P_{mn}^{(1)} = \frac{E_s A_s}{2\gamma_0 n} \Delta v_{mn}^{(1)},$$

где взаимное смещение $\Delta v_{mn}^{(1)}$ определяется аналогично нулевому приближению.

Требую, чтобы функции (7) при $k=1$ удовлетворяли краевому условию (16) на берегах трещин в первом приближении, получим после некоторых преобразований сингулярное интегральное уравнение относительно $g^{(1)}(x)$

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{g^{(1)}(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} K(t,x) g^{(1)}(t) dt = F^{(1)}(x). \quad (17)$$

Как и в нулевом приближении, используя процедуру алгебраизации [17, 18], сингулярное интегральное уравнение (17) при дополнительном условии, обеспечивающем однозначность перемещений при обходе контуров трещин в первом приближении

$$\int_a^b g_0^{(1)}(t) dt = 0, \quad \int_{-a}^{-b} g_0^{(1)}(t) dt = 0,$$

сводим к системе M линейных алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g^{(1)}(\tau_m)$ ($m=1, 2, \dots, M$)

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^M A_{mk} g_k^{(1)} = f_0^{(1)}(\eta_m) + f_1^{(1)}(\eta_m) \\ \sum_{k=1}^M g_k^{(1)}(\eta_m) = 0 \end{cases}$$

где $m=1, 2, \dots, M-1$; $g_k^{(1)} = g^{(1)}(\tau_k)$.

В первом приближении для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины при $x=a$ имеем

$$K_I^{(1)} = \sqrt{\pi(b-a)} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} g^{(1)}(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi,$$

в окрестности вершины трещины $x=b$

$$K_I^{(1)} = \sqrt{\pi(b-a)} \sum_{m=1}^M (-1)^m g^{(1)}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

Полученные системы уравнений первого приближения не являются пока замкнутыми, так как в правые части этих систем входят коэффициенты d_{2k} разложения функции $H(\theta)$ в ряд Фурье.

Для построения недостающих уравнений используем граничное условие (1) при дополнительных ограничениях (2). С помощью полученного решения находим σ_t в поверхностном слое контура $L_0(r=\rho(\theta))$ с точностью до величин первого порядка относительно малого параметра ε

$$\sigma_t = \sigma_t^{(0)}(\theta) \Big|_{r=R} + \varepsilon \left[H(\theta) \frac{\sigma_t^{(0)}(\theta)}{\partial r} + \sigma_t^{(1)}(\theta) \right] \Big|_{r=R}.$$

Находим максимальное значение функции $\sigma_t(\theta, d_{2k})$ на контуре L_0
 $\max \sigma_t(\theta_*, d_{2k}),$

где θ_* есть решение уравнения

$$\frac{d\sigma_t(\theta)}{d\theta} = 0.$$

Для построения недостающих уравнений, позволяющих определить коэффициенты d_{2k} , требуем, чтобы обеспечивалась минимизация максимального окружного напряжения σ_t на контуре отверстия (1) при ограничениях

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m [g^{(0)}(t_m) + \varepsilon g^{(1)}(t_m)] \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad \sum_{m=1}^M (-1)^m [g^{(0)}(t_m) + \varepsilon g^{(1)}(t_m)] \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0,$$

$$\max \sigma_t \leq [\sigma].$$

Здесь $[\sigma]$ – допустимое окружное напряжение, определяемое опытным путем.

Следует распорядиться функцией $H(\theta)$ таким образом, чтобы обеспечивалась минимизация максимального значения напряжения σ_t (минимаксный критерий). Требуется найти такие значения коэффициентов d_{2k} , которые удовлетворяют полученной системе уравнений и обращают в минимум линейную функцию $\max \sigma_t$ (целевую функцию).

Поскольку напряжения $\sigma_t(\theta, d_{2k})$ (показатель качества управления) и $\max \sigma_t$ линейно зависят от искомых коэффициентов d_{2k} , рассматриваемая задача сводится к задаче линейного программирования. В поставленной задаче наиболее эффективным оказался метод симплексного алгоритма.

Расчеты проводились для следующих значений свободных параметров: $a_0/L=0,01$; $y_0/L=0,25$. Считалось, что стрингеры выполнены из композита Al-сталь, пластина – из сплава В95; $E=7,1 \cdot 10^4$ МПа; $E_s=11,5 \cdot 10^4$ МПа. Число стрингеров и точек крепления принималось равным 14, величина $M=72$. Величина M может быть принята другая, но не меньше 20, так как это минимальное значение для хорошей сходимости численного решения сингулярных интегральных уравнений [17, 18]. Для упрощения принималось $A_s/y_0h=1$. Результаты расчетов коэффициентов разложения искомой функции $H(\theta)$ приводятся ниже.

Значения коэффициентов Фурье для оптимального контура

d_2	d_4	d_6	d_8	d_{10}	d_{12}	d_{14}
0,1079	0,0869	0,0558	0,0368	0,0231	0,0014	0,0005

Выводы

Таким образом, решена задача минимизации напряженного состояния на контуре отверстия в стрингерной пластине с двумя прямолинейными трещинами. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая найти оптимальную форму контура отверстия для стрингерной пластины, ослабленной двумя прямолинейными трещинами в зависимости от геометрических и механических характеристик пластины и стрингеров.

Представленное исследование следует продолжить для других критериев оптимизации (равнопрочности и т.д.) и иных типов пластин, имеющих широкое применение, например перфорированных, ослабленных несколькими отверстиями и др.

Литература

1. Waldman W., Heller M. Shape optimisation of holes for multi-peak stress minimization. *Australian J. Mech. Eng.* 2006. Vol. 3. Iss. 1. P. 61–71. <https://doi.org/10.1080/14484846.2006.11464495>
2. Vigdergauz S. The stress-minimizing hole in an elastic plate under remote shear. *J. of Mech. Materials and Structures.* 2006. Vol. 1. No. 2. P. 387–406. <https://doi.org/10.2140/jomms.2006.1.387>
3. Мир-Салим-заде М. В. Обратная упругопластическая задача для клепаной перфорированной пластины. Совр. проблемы прочности, пластичности и устойчивости: сб. статей. Тверь: Тверск. ун-т, 2007. С. 238–246.
4. Bantsuri R., Mzhavanadze Sh. The mixed problem of the theory of elasticity for a rectangle weakened by unknown equi-strong holes. *Proc. of A. Razmadze Math. Institute.* 2007. Vol. 145. P. 23–34.
5. Мир-Салим-заде М. В. Определение формы равнопрочного отверстия в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров. *Материалы, технологии, инструменты.* 2007. Т. 12. №4. С. 10–14.
6. Vigdergauz S. Energy-minimizing openings around a fixed hole in an elastic plate. *J. of Mech. Materials and Structures.* 2010. Vol. 5. No. 4. P. 661–677. <https://doi.org/10.2140/jomms.2010.5.661>
7. Vigdergauz S. Stress-smoothing holes in an elastic plate: From the square lattice to the checkerboard. *Math. and Mech. Solids.* 2012. Vol. 17. Iss. 3. P. 289–299. <https://doi.org/10.1177/1081286511411571>
8. Cherepanov G. P. Optimum shapes of elastic bodies: equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels. *Phys. Mesomechanics.* 2015. Vol. 18. Iss. 4. P. 391–401. <https://doi.org/10.1134/S1029959915040116>
9. Калантарлы Н. М. Равнопрочная форма отверстия для торможения роста трещины продольного сдвига. *Проблемы машиностроения.* 2017. Т. 20. №. 4. С. 31–37. <https://doi.org/10.15407/pmach2017.04.031>
10. Samadi N, Abolbashari M. H., Ghaffarianjam H. R. An effective approach for optimal hole shape with evolutionary structural optimization [online]. 9th Australasian Congress on Appl. Mechanics (ACAM9). Sydney: Engineers Australia, 2017. P. 1–8.
11. Wang S. J., Lu A. Z., Zhang X. L., Zhang N. Shape optimization of the hole in an orthotropic plate. *Mechanics Based Design of Structures and Machines.* 2018. Vol. 46. Iss. 1. P. 23–37. <https://doi.org/10.1080/15397734.2016.126103623>
12. Vigdergauz S. Simply and doubly periodic arrangements of the equi-stress holes in a perforated elastic plane: The single-layer potential approach. *Math. and Mech. Solids.* 2018. Vol. 23. Iss. 5. P. 805–819. <https://doi.org/10.1177/1081286517691807>
13. Мирсалимов В. М. Максимальная прочность выработки в горном массиве, ослабленном трещиной. *Физико-техн. проблемы разработки полезных ископаемых.* 2019. Т. 55. №1. С. 12–21. <https://doi.org/10.15372/FTPPI20190102>
14. Mirsalimov V. M. Inverse problem of elasticity for a plate weakened by hole and cracks. *Math. Problems in Eng.* Vol. 2019. Article ID 4931489, 11 pages. <https://doi.org/10.1155/2019/4931489>
15. Mirsalimov V. M. Minimizing the stressed state of a plate with a hole and cracks. *Engineering Optimization.* 2019. <https://doi.org/10.1080/0305215X.2019.1584619>
16. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
17. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука. 1973. 304 с.
18. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
19. Мирсалимов В. М. Некоторые задачи конструкционного торможения трещины. *Физико-хим. механика материалов.* 1986. Т. 22. № 1. С. 84–88.

Поступила в редакцию 12.05.2019

Мінімізація напруженого стану стрингерної пластини з отвором й прямолінійними тріщинами

Мір-Салім-заде М. В.

Інститут математики і механіки НАН Азербайджану,
Азербайджан, AZ1141, Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9

Як відомо, тонкі пластини з отворами є одним з широко поширених елементів конструкції. Для підвищення надійності і терміну служби становить інтерес знаходження такої контури отвору, який забезпечує мінімальне окружене напруження на контурі отвору, а також перешкоджає росту можливих тріщин у пластині. У цій статті розглядається задача мінімізації напруженого стану на контурі отвору в необмеженій ізотропній стрингерній пластині, ослабленій двома прямолінійними тріщинами. Береги тріщин вважаються вільними від навантажень. Визначається оптимальна форма отвору, така, що зростання тріщин не відбувається, а максимальне окружене напруження на контурі мінімальне. Використовується мінімакний критерій. За параметр, що характеризує напружений стан в околі вершин тріщин, відповідно до теорії квазікрихкого руйнування Ірвіна-Орована приймається коефіцієнт

інтенсивності напружень. Пластина піддається на нескінченності однорідному розтягуванню уздовж стрингерів. Вважається, що пластина і стрингери виконані з різних пружних матеріалів. Дія стрингерів замінюється невідомими еквівалентними зосередженими силами, прикладеними в точках їхнього з'єднання з пластиною. Для їх визначення використовується закон Гука. Застосувавши метод малого параметра, теорію аналітичних функцій і метод прямого розв'язання сингулярних рівнянь, була побудована замкнута система алгебраїчних рівнянь, що забезпечує в залежності від механічних і геометричних параметрів пластики та стрингерів мінімізацію напруженого стану на контурі отвору і рівність нулю коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі вершин тріщин. Поставлена задача мінімізації зводиться до задачі лінійного програмування. Застосовано метод симплексного алгоритму.

Ключові слова: стрингерна пластина, мінімізація напруженого стану, тріщини, оптимальна форма отвору, мінімаксний критерій.