

В.И. Гуляев¹, П.З. Луговой², Л.В. Шевчук¹

**ДИНАМИКА ПЕРЕКАТЫВАНИЯ ВЫПУКЛОГО ДОЛОТА ПО
КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДНА СКВАЖИНЫ**

¹ *Национальный транспортный университет,
ул. Омеляновича-Павленко, 1, 01010, Киев, Украина; e-mail: valery@gulyayev.com.ua*

² *Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: plugovyy@inmech.kiev.ua*

Abstract. A problem is stated on the dynamical bending of drill string rotating in the cavity of the deep bore hole within the regimes of self-excitation of vibrations of whirling the drill string on the bore hole bottom surface. A mathematical model is elaborated for the rolling the spherical bit on the bottom ellipsoidal surface. The modes of vibrations of whirling the drill string in the fixed and rotating system of coordinates are built. It is shown that the calculated trajectories of bit motion can have the form of spirals that expand (unstable regime) or contract (stable regime) which are observed in a drilling practice. They are characterized by the large values of motion acceleration and then are dangerous for the drilling system.

Key words: drill string, bit, whirling, sliding, rolling, frictional model, nonholonomic model.

Введение.

Исследование квазистатических, колебательных и волновых явлений в упругих протяженных стержневых конструкциях при воздействии различного рода силовых, инерционных и кинематических возмущений составляет одну из классических проблем механики. Ее решения имеют также широкое применение при освоении техники и технологий бурения нефтяных и газовых скважин. Наиболее уязвимым конструктивным элементом бурильного оборудования является бурильная колонна (БК). Она представляет собой очень гибкую трубчатую конструкцию, которая в процессе бурения пребывает в режимах квазистатического напряженного состояния и сложного движения. Эти режимы могут приводить к прихватам БК, эффектам эйлеровой потери устойчивости и выпучиванию колонны, а также к интенсивным колебаниям кручения, изгиба и осевого растяжения-сжатия.

Научные и технические аспекты проектирования конструкций бурильных установок и технологических режимов бурения в наземных условиях и в морских акваториях, а также результаты анализа критических механических эффектов, сопровождающих процессы бурения, рассмотрены в различных публикациях. В работах [1, 6, 11] выполнены исследования процессов осевого перемещения (спуска, подъема, функционирования) БК в криволинейных скважинах; в статье [13] описана задача об изгибной устойчивости БК в вертикальной скважине; работы [2, 3, 10, 12, 14, 20 – 23] посвящены задачам крутильных и изгибных колебаний БК и динамике обсаженных скважин. В связи с большими глубинами современных скважин и сложными воздействиями на БК в процессе бурения комбинаций сил тяжести, крутящих моментов, гироскопических сил инерции вращательного движения БК, сил инерции от внутренних потоков промывочной жидкости, а также из-за неконсервативного характера взаимодействия низа БК с обрабатываемой породой режимы проходки скважин могут сопровождаться нештатными ситуациями. Им могут сопутствовать в том числе и самовоз-

буждение колебаний кружения долота, обусловленные нарушением соосности вращающейся системы. Эти колебания вызваны сложными фрикционными и контактными силами взаимодействия поверхности долота с разрушаемой породой. Они обладают сложной нерегулярной структурой, обусловленной перекачиванием и скольжением долота по поверхности дна скважины, и могут привести к критическим состояниям системы или вызвать нарушения условий эксплуатации элементов БК и стать причиной ее разрушения.

Результатами натурных наблюдений установлено [25], что до 40% общей протяженности всех каналов нефтяных и газовых скважин бурятся в условиях протекания колебаний кружения. Вплоть до настоящего времени отсутствуют методы физического и компьютерного моделирования указанных эффектов и задача выявления критических динамических состояний этих систем далека от завершения. Такая ситуация объясняется высокой сложностью изучаемых явлений, вызванной большой длиной БК, сложной механической схемой рассматриваемой системы, а также условиями фрикционного, контактного и кинематического (неголономного) взаимодействий ее долота с поверхностью дна скважины.

Основной неотъемлемой частью задачи прогнозирования критических состояний БК при ее колебаниях кружения является построение математической модели, которая описывает ее динамику в процессе функционирования и которая может быть использована для прогнозирования ее поведения.

Детальное изучение колебаний кружения началось, по-видимому, с работы Jansen [17]. На основе математической модели «масса – пружина», в которой долото заменено жестким диском, а упругая колонна – пружиной, в этих работах предпринята попытка объяснения колебаний прямого и обратного кружения, при которых в неподвижной системе координат долото перекачивается относительно оси симметрии в направлении её вращения или в обратном, соответственно.

На основе результатов анализа колебаний кружения с помощью дисковой модели в работах [7, 8] предложена новая конструкция долот, в которой динамический эффект смягчен. Следующее усложнение дисковой модель колебаний получила за счет учета упругой податливости трубы колонны в её нижней части [9, 19, 26]. Среди публикаций данного направления особое место занимает статья Kovalyshen [18], в которой впервые отмечено, что форма колебаний кружения в значительной мере зависит от геометрии долота.

Между тем, как отмечено в публикации Stroud [25], колебания кружения являются наиболее типичным динамическим процессом, сопровождающим, как показывают практические наблюдения и статистика, около половины всех пробуренных скважин. При этом частота колебаний кружения может от 5 до 30 раз превышать угловую скорость вращения самой БК, а формы движения долота образовывать сложные нерегулярные фигуры, приводящие к усталости и разрушительному воздействию на конструкции нижней части БК. Учитывая, что в научной литературе эти колебания изучаются с помощью очень упрощенных математических моделей, можно отметить, что проблема разработки более точной математической модели, составленной с учетом действия осевой силы, реальной геометрической формы долота и учета его контактного взаимодействия с дном скважины, является актуальной. Эти вопросы обсуждаются в работах [15, 16]. В них предложена новая модель, в которой рассматривается начальный процесс колебаний кружения. Принято, что БК подвергается малым упругим изгибаниям, а долото отклоняется от своего рабочего состояния на малую величину и скользит по поверхности дна скважины, не вступая в контакт с ее стенкой. При этом осуществляется фрикционное или неголономное взаимодействие между поверхностями долота и плоским или сферическим дном скважины. Ниже рассмотрен случай её эллипсоидальной поверхности.

1. Уравнения упругих поперечных колебаний бурильных колонн.

Ведущее положение в технологии бурения нефтяных и газовых скважин занимает роторный способ, при котором резание породы осуществляется долотом, закрепленным на нижнем конце БК. Непосредственное применение к динамике этих колонн имеет задача об изгибных колебаниях преднатяженных вращающихся стержней. Длины таких колонн достигают до 10 км. В условиях эксплуатации они подвергаются

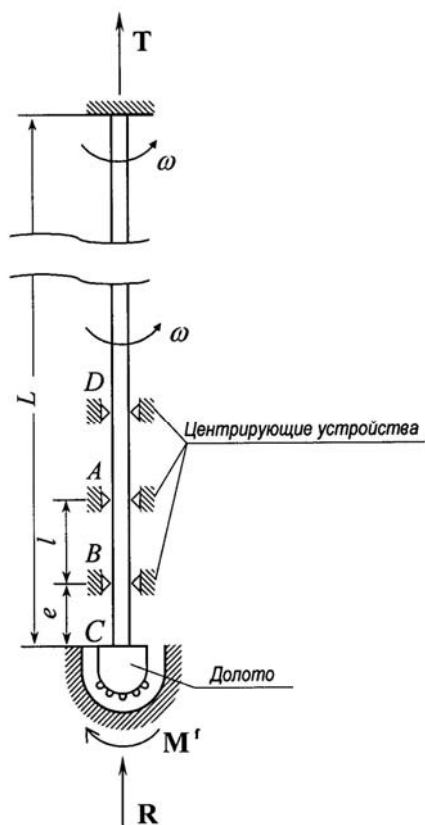


Рис. 1

воздействию продольных сил тяжести, крутящего момента, сил инерции вращательного движения, а также сил инерции внутреннего потока промывочной жидкости. Геометрическая схема колонны показана на рис. 1.

С целью моделирования колебаний кручения системы БК – долото представим колонну как длинный трубчатый упругий стержень, который напряжен продольной силой T и крутящим моментом M_z и вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своей продольной оси в неподвижной системе координат $OXYZ$. В канале трубы БК со скоростью V движется жидкость плотностью $\rho_{ж}$. Исследуем колебания стержня во вращающейся системе координат $Oxyz$ относительно оси Oz , направленной вдоль продольной оси недеформированного стержня.

Для вывода уравнений динамики выделим элемент трубы длиной dz . Уравнения равновесия внутренних моментов относительно осей Oy , Ox имеют вид [2, 12]

$$\begin{aligned} dM_y - Q_x dz - Tdu - M_z d\left(\frac{dv}{dz}\right) &= 0; \\ dM_x - Q_y dz - Tdv + M_z d\left(\frac{du}{dz}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь dM_y , dM_x – малые приращения упругих моментов; $Q_x dz$, $Q_y dz$ – моменты упругих перерезывающих сил Q_x , Q_y , соответственно, с плечами dz ; Tdu , Tdv – моменты внутренней осевой силы T , создаваемые за счет малых перемещений du , dv ; $M_z d(dv/dz)$, $M_z d(du/dz)$ – изгибающие моменты, вызванные изменением ориентации крутящего момента M_z , вследствие приращений $d(dv/dz)$, $d(du/dz)$ углов поворота на отрезке dz .

Равновесие сил, приложенных к элементу dz , в направлениях осей Ox , Oy описывается уравнениями

$$\frac{dQ_x}{dz} + q_x = 0; \quad \frac{dQ_y}{dz} + q_y = 0. \quad (2)$$

В левых частях этих равенств находятся внешние распределенные силы q_x , q_y . Поскольку на БК не действуют активные силы, то в качестве поперечной нагрузки \mathbf{q} , согласно принципу д'Аламбера, необходимо выбрать силы инерции, вызванные движением стержня \mathbf{q}_c и потоком жидкости $\mathbf{q}_{ж}$, т.е. $q = q_c + q_{ж}$.

Распределенная сила инерции $\mathbf{q}_{ж}$ для элемента стержня определяется так: $\mathbf{q}_c = -\rho_c F \mathbf{a}_c$, где ρ_c – плотность материала стержня; F – площадь его поперечного сечения; \mathbf{a}_c – абсолютное ускорение элемента.

Абсолютное ускорение \mathbf{a}_c во вращающейся системе координат $Oxyz$ подсчитывается по формуле Кориолиса $\mathbf{a}_c = \mathbf{a}_c^e + \mathbf{a}_c^r + \mathbf{a}_c^c$, где \mathbf{a}_c^e – вектор переносного ускорения; \mathbf{a}_c^r – вектор относительного ускорения; \mathbf{a}_c^c – вектор кориолисового ускорения.

Вектор \mathbf{a}_c^e вычисляется по формуле $\mathbf{a}_c^e = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ – радиус-вектор элемента стержня в системе координат $Oxyz$.

Выполнив соответствующие векторные операции, получим

$$a_{c,x}^e = -\omega^2 u; \quad a_{c,y}^e = -\omega^2 v; \quad a_{c,z}^e = 0. \quad (3)$$

В направлениях осей системы координат $Oxyz$ составляющие вектора относительного ускорения определяются равенствами

$$a_{c,x}^r = \frac{d^2 u}{dt^2}; \quad a_{c,y}^r = \frac{d^2 v}{dt^2}; \quad a_{c,z}^r = 0. \quad (4)$$

Компоненты вектора кориолисового ускорения \mathbf{a}_c^c подсчитываются по формулам

$$a_{c,x}^c = -2\omega \frac{dv}{dt}; \quad a_{c,y}^c = 2\omega \frac{du}{dt}; \quad a_{c,z}^c = 0. \quad (5)$$

Зная компоненты ускорений (3) – (5), получим составляющие вектора сил инерции вращательного движения элемента стержня

$$q_{c,x}^\omega = -\rho_c F \left(-\omega^2 u - 2\omega \frac{dv}{dt} + \frac{d^2 u}{dt^2} \right); \quad q_{c,y}^\omega = -\rho_c F \left(-\omega^2 v + 2\omega \frac{du}{dt} + \frac{d^2 v}{dt^2} \right). \quad (6)$$

Распределенная сила инерции, действующая на движущийся элемент жидкости, подсчитывается по формуле

$$\mathbf{q}_{жс} = -\rho_{жс} F_{жс} \mathbf{a}_{жс}, \quad (7)$$

где $\rho_{жс}$ – плотность жидкости; $F_{жс}$ – площадь поперечного сечения канала трубы; $\mathbf{a}_{жс}$ – абсолютное ускорение элемента жидкости. Оно состоит из ускорения вращательного движения вместе со стержнем и ускорения от собственного движения в канале трубы.

Учитывая, что жидкость движется внутри трубчатого стержня с постоянной скоростью $V_{жс}$, построим выражения для ускорений, обусловленных ее движением в колеблющейся (но невращающейся) трубе [2],

$$\frac{d^2 u_{жс}}{dt^2} = \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} + 2V_{жс} \frac{\partial^2 u_c}{\partial z \partial t} + V_{жс}^2 \frac{\partial^2 u_c}{\partial z^2}; \quad \frac{d^2 v_{жс}}{dt^2} = \frac{\partial^2 v_c}{\partial t^2} + 2V_{жс} \frac{\partial^2 v_c}{\partial z \partial t} + V_{жс}^2 \frac{\partial^2 v_c}{\partial z^2}, \quad (8)$$

где $u_{жс}$, $v_{жс}$ – поперечные перемещения элемента жидкости; u_c , v_c – поперечные перемещения элемента стержня.

На основе равенств (6) – (8) с помощью соотношений (2) получим уравнения колебаний вращающегося трубчатого стержня, напряженного силой T и крутящим моментом M_z и содержащего поток жидкости

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) - (\rho_c F_c + \rho_{жс} F_{жс}) \omega^2 u - \\ - 2(\rho_c F_c + \rho_{жс} F_{жс}) \omega \frac{\partial v}{\partial t} + V^2 \rho_{жс} F_{жс} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2V \rho_{жс} F_{жс} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + (\rho_c F_c + \rho_{жс} F_{жс}) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\ EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) - (\rho_c F_c + \rho_{жс} F_{жс}) \omega^2 v + 2(\rho_c F_c + \rho_{жс} F_{жс}) \omega \frac{\partial u}{\partial t} + \\ + V^2 \rho_{жс} F_{жс} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2V \rho_{жс} F_{жс} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} + (\rho_c F_c + \rho_{жс} F_{жс}) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку эти уравнения связаны, можно сделать вывод, что БК не может осуществлять плоские колебания и форма ее движений всегда остается пространственной.

Построенные уравнения (9) должны быть дополнены соответствующими условиями на краях выделенного для расчета участка БК и условиями на промежуточных опорах. Граничные уравнения на нижнем конце БК формируются, исходя из условий контактного взаимодействия долота со скальной породой. Для их вывода необходимо рассмотреть качение долота по поверхности дна скважины.

2. Краевые условия на концах БК.

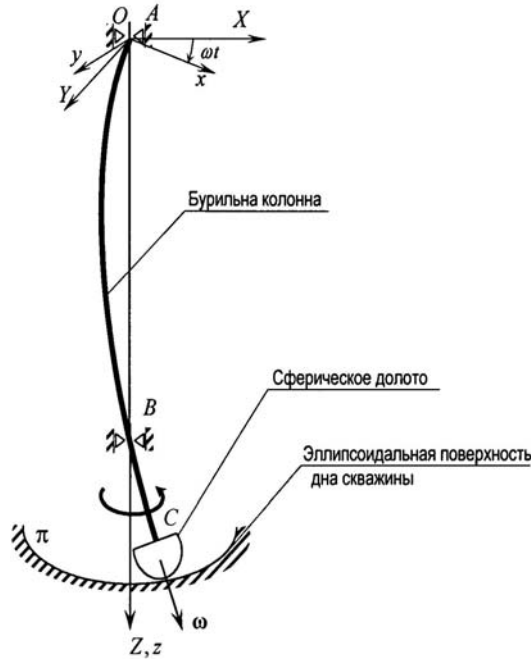


Рис. 2

Колебания кружения долота, вращающегося с угловой скоростью ω , сопровождаются вовлечением в вибраторный процесс также и нижних участков колонны, расположенных между центрирующими устройствами, которые играют роль дополнительных опор (рис. 1). Как правило, число таких опор не превышает пять, а расстояния между ними составляют от 9 до 18 м. Поскольку наиболее интенсивные изгибные колебания БК наблюдаются в пролете, непосредственно примыкающем к долоту, при анализе механизма возбуждения колебаний кружения будем пренебрегать влиянием верхней части БК и выделим ее расчетный фрагмент длиной l между двумя нижними центрирующими опорами A и B , условно отделив его от верхней части БК, и прилегающую к ней консольный участок длиной e с долотом на конце (рис. 2).

При формировании граничных условий на опоре A ($z=0$) примем, что колебания БК в пролетах, прилегающих к этой опоре, происходят в противофазе, поэтому изгибающий момент в точке A равен нулю. Тогда на краю $z=0$ имеем

$$u_A = v_A = 0; \quad \partial^2 u / \partial z^2 \Big|_A = \partial^2 v / \partial z^2 \Big|_A = 0. \quad (10)$$

На опоре B ($z=l$) прогибы балки равны нулю, а углы поворотов являются непрерывными функциями. Эти условия могут быть записаны в виде

$$u_B = v_B = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{l-0} = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{l+0}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{l-0} = \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{l+0}. \quad (11)$$

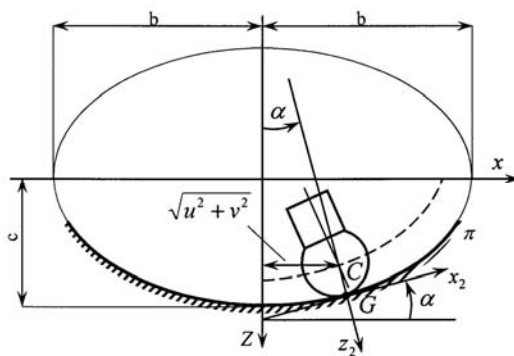


Рис. 3

Для вывода граничных условий на нижнем краю, примем, что процесс возбуждения колебаний кружения только начинается и долото может двигаться в зазоре между ним и стенкой скважины, не доходя до нее (рис. 2). При этом характер качения долота и краевые условия в точке определяются геометрией как самого долота, так и дна скважины.

На зависимость процесса кружения от геометрии контактирующих тел обращено внимание в работе [18]. Обычно на своей режущей поверхнос-

ти долота по форме приближается к сфере или эллипсоиду. В публикациях [15, 16] проведено моделирование качения сферических долот по сферическому дну скважины и эллипсоидальных долот по плоскому дну. В данной работе рассмотрен случай, когда поверхность долота является сферической, а поверхность π скважины имеет форму эллипсоида вращения (удлиненного при $b < c$ или сплюснутого при $b > c$) (рис. 3).

Уравнение сечения эллипсоидальной поверхности скважины представим в форме

$$\frac{X^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1. \quad (12)$$

Уравнение эллипса, проходящего через центр C долота, имеет вид

$$\frac{x^2}{(b-a)^2} + \frac{z^2}{(c-a)^2} = 1, \quad (13)$$

где a – радиус поверхности долота.

Запишем уравнение эллипса в параметрической форме:

$$\begin{cases} X = b \cos \theta; \\ Z = c \sin \theta; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = (b-a) \cos \theta; \\ z = (c-a) \sin \theta. \end{cases} \quad (14)$$

Определим расстояния между точками этих эллипсов с одинаковым значением аргумента θ :

$$(X-x)^2 + (Z-z)^2 = (b-b+a)^2 \cos^2 \theta + (c-c+a)^2 \sin^2 \theta = a^2. \quad (15)$$

Для описания упругого поворота долота введем также жестко связанную с ним систему координат $Cx_1y_1z_1$, оси Cx_1 , Cy_1 которой в исходном положении параллельны осям Ox , Oy , соответственно, а при упругом деформировании БК поворачиваются на углы – $v'|_C$ и $u'|_C$. Здесь штрихом обозначено дифференцирование по переменной z .

Качение долота по поверхности скважины задаем в правой подвижной системе координат $Gx_2y_2z_2$, начало которой совпадает с точкой соприкосновения G , ось Gz_2 является продолжением отрезка CG (рис. 3).

Условие качения долота без скольжения позволяет сформулировать в точке C две группы краевых уравнений. Это два кинематических уравнения, которые задают скорость точки C , и два динамических уравнения, которые определяют динамическое равновесие всех моментов относительно точки G .

Предполагаем, что перемещения u , v и углы $u' = du/dz$, $v' = dv/dz$ малы. Для определения скорости центра C долота выразим абсолютные угловые скорости введенных систем координат через угловую скорость ω вращения системы $Oxyz$, углы u' , v' упругих поворотов долота и угловые скорости \dot{u}' , \dot{v}' этих поворотов.

Абсолютная угловая скорость системы $Oxyz$ по определению равна:

$$\mathbf{\Omega}_{(0)}^{(0)} = \omega \mathbf{k}. \quad (16)$$

Абсолютная угловая скорость системы $Cx_1y_1z_1$ в проекциях на оси этой же системы составляет

$$\mathbf{\Omega}_{(1)}^{(1)} = \mathbf{\Omega}_{(0)}^{(1)} + \dot{u}' \mathbf{j}_1 - \dot{v}' \mathbf{i}_1 = -\dot{v}' \mathbf{i}_1 + \dot{u}' \mathbf{j}_1 + \omega \mathbf{k}_1. \quad (17)$$

Абсолютная угловая скорость системы $Cx_1y_1z_1$ в проекциях на оси системы $Oxyz$ равна

$$\mathbf{\Omega}_{(1)}^{(0)} = (-\dot{v}' + \omega u') \mathbf{i}_1 + (\dot{u}' + \omega v') \mathbf{j}_1 + \omega \mathbf{k}_1. \quad (18)$$

Ориентация системы $Cx_2y_2z_2$ относительно системы $Oxyz$ задана углом α между осями Oz и Gz_2 (рис. 3)

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{c\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{b^2(b-a)^2+(u^2+v^2)(c^2-b^2)}}; \\ \cos \alpha &= \frac{b\sqrt{(b-a)^2-u^2-v^2}}{\sqrt{b^2(b-a)^2+(u^2+v^2)(c^2-b^2)}}.\end{aligned}\quad (19)$$

Исследуем случай, когда долото перекатывается по поверхности дна скважины без проскальзывания. Тогда абсолютная скорость \mathbf{v}_G^{abc} точки G долота равна нулю. Для её определения воспользуемся формулой Эйлера в виде

$$\mathbf{v}_G^{abc} = \mathbf{v}_C^{(0)} - \boldsymbol{\Omega}_{(1)}^{(0)} \times \vec{GC}, \quad (20)$$

где векторы $\mathbf{v}_C^{(0)}$, \vec{GC} вычисляются с помощью соотношений

$$\mathbf{v}_C^{(0)} = (\dot{u} - \omega v)\mathbf{i} + (\dot{v} + \omega u)\mathbf{j}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned}\vec{GC} &= -\frac{acu}{\sqrt{b^2(b-a)^2+(u^2+v^2)(c^2-b^2)}}\mathbf{i} - \\ & - \frac{acv}{\sqrt{b^2(b-a)^2+(u^2+v^2)(c^2-b^2)}}\mathbf{j} - a \cos \alpha \mathbf{k}.\end{aligned}\quad (22)$$

Подставляя правые части соотношений (18), (21), (22) в равенство (20), получим кинематические уравнения качения без проскальзывания сферического долота по эллипсоидальной поверхности дна скважины. Они определяют неголономную связь и используются в качестве первых двух краевых уравнений для системы (9) в точке C

$$\begin{aligned}v_{G,x}^{abc} &= \dot{u} - \omega v - a \cos \alpha \left(-\dot{u}' - \omega v' + \frac{c\omega v}{\sqrt{b^2(b-a)^2+(u^2+v^2)(c^2-b^2)}} \right) = 0; \\ v_{G,y}^{abc} &= \dot{v} + \omega u - a \cos \alpha \left(-\dot{v}' + \omega u' - \frac{c\omega u}{\sqrt{b^2(b-a)^2+(u^2+v^2)(c^2-b^2)}} \right) = 0.\end{aligned}\quad (23)$$

Динамические краевые уравнения в точке C следуют из условия динамического равновесия моментов сил упругости, моментов сил инерции и реакций связей, приложенных к долоту. При их выводе существенное влияние на структуру этих уравнений влияет выбор полюса и системы осей, относительно которых исчисляются моменты, действующие на долото. Обычно, удобнее всего, за полюс выбирать точку соприкосновения контактирующих тел, а за систему отсчета – систему координат, в которой осевые моменты инерции движущегося тела остаются неизменными [4, 5]. Первое условие приводит к исключению из рассмотрения реакции неголономной вязи, второе – к избежанию необходимости дифференцирования моментов инерции тела по времени. В связи с этим выберем точку G за полюс и систему координат $Gx_2y_2z_2$ за систему отсчета. Тогда уравнения движения долота следуют из теоремы об изменении его момента количества движения относительно точки G [10], т.е.

$$\frac{d\tilde{\mathbf{K}}_G^{(2)}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_{(2)}^{(2)} \times \mathbf{K}_G^{(2)} = \mathbf{M}_G^{(2)}, \quad (24)$$

где $\mathbf{K}_G^{(2)}$ – момент количеств движения долота относительно точки G , представленный в системе $Gx_2y_2z_2$; $\mathbf{M}_G^{(2)}$ – действующий на долото момент сил упругости, также записанный в этой же системе.

Однако, если учесть, что долото является пустотелым и его моменты инерции относительно каждой из центральных осей сравнительно малы, то в практических расчетах значениями компонент вектора $\mathbf{K}_G^{(2)}$ в формуле (24) можно пренебречь. В результате получим $\mathbf{M}_G^{(2)} = 0$ и сумма моментов сил упругости относительно каждой из горизонтальных осей равна нулю. Это предположение приводит к двум крайним условиям относительно моментов:

$$\begin{aligned} [u'' + au'''(\cos \alpha + u' \sin \alpha)] \sin \beta + [v'' + av'''(\cos \alpha + v' \sin \alpha)] \cos \beta &= 0; \\ [-u'' - au'''(\cos \alpha + u' \sin \alpha)] \cos \beta + [v'' + av'''(\cos \alpha + v' \sin \alpha)] \sin \beta &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $\sin \beta = v / \sqrt{u^2 + v^2}$, $\cos \beta = u / \sqrt{u^2 + v^2}$, а величины $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ вычисляются по формулам (19).

Соотношения (9) – (11), (23), (25) определяют трёхточечную краевую задачу динамики нижнего пролета БК с долотом. Они дополняются также начальными условиями, которые задают начальное возмущение системы. Числовое решение поставленной задачи осуществляется методом конечных разностей с использованием неявной схемы интегрирования по времени t .

3. Кинематическое возбуждение качения сферического долота по эллипсоидальной поверхности дна скважины.

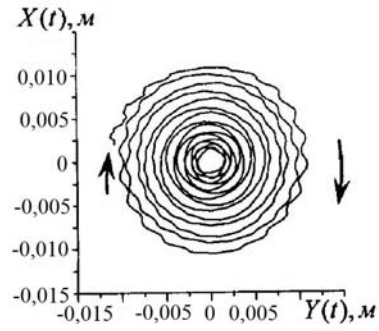
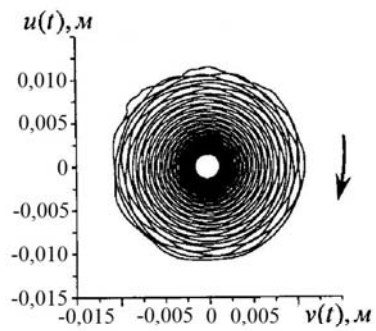
В результате проведенного компьютерного моделирования рассматриваемых динамических процессов установлено, что режим самовозбуждения колебаний кружения и его форма в значительной степени зависят от изгибной жесткости БК, значений T и M_z , а также от геометрии контактирующих поверхностей долота и скважины. В связи с этим можно сделать вывод, что выбирая разные значения этих параметров, можно как стабилизировать, так и дестабилизировать колебания кружения. При этом значительную роль может играть значение угловой скорости ω . Исследования этих эффектов проведены при следующих значениях характерных параметров системы: $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; $F = \pi(r_1^2 - r_2^2) = 5,34 \cdot 10^{-3}$ м²; $F_{жс} = \pi r_2^2 = 2,01 \cdot 10^{-2}$ м²; $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; $\rho_{жс} = 1,5 \times 10^3$ кг/м³; $e = 1$ м; $r_1 = 0,09$ м; $r_2 = 0,08$ м; $I = \pi(r_1^2 - r_2^2) = 1,94 \cdot 10^{-5}$ м⁴. Уравнения (9) с граничными условиями (10), (11), (23), (25) интегрировались с помощью неявной разностной схемы на отрезке времени $0 \leq t \leq t_f$ с шагом $\Delta t = 10^{-4}$ с. Для проверки точности вычислений при некоторых значениях характерных параметров они повторялись с шагом $\Delta t = 10^{-5}$ с. Поскольку результаты расчетов совпадали с точностью до 4^й – 5^й значащей цифры, можно заключить, что достоверность вычислений оказывается достаточной.

По полученным значениям функций прогибов $u(z, t)$, $v(z, t)$ строились формы изгиба БК на выделенных для расчета участках и траектории движения центра C долота в проекции на плоскость $Oxuz$ подвижной системы, вращающейся вместе с системой $Oxuz$ со скоростью ω . С помощью формул

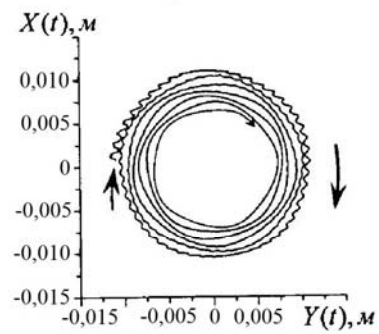
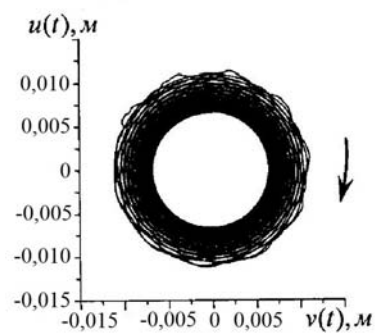
$$X(t) = u \cos \omega t - v \sin \omega t; \quad Y(t) = u \sin \omega t + v \cos \omega t \quad (26)$$

осуществлялся переход к неподвижной системе координат $OXYZ$.

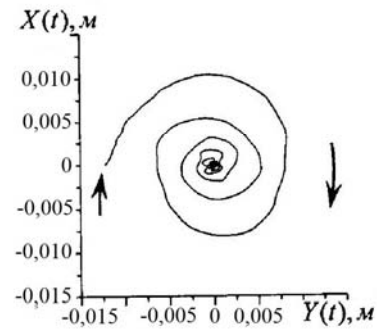
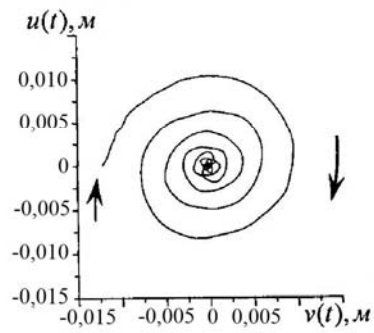
С использованием полученных соотношений динамики качения сферического долота по эллиптической поверхности дна скважины были построены траектории движения центра C долота для случая: $T = -1 \cdot 10^5$ Н; $M_z = -1 \cdot 10^4$ Н·м; $\omega = 5$ рад/с; $a = 0,12$ м; $t_f = 20$ с. Результаты решения представлены на рис. 4. Позиции a и b на



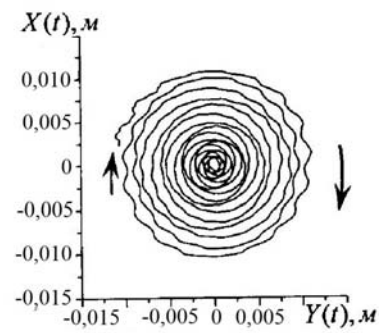
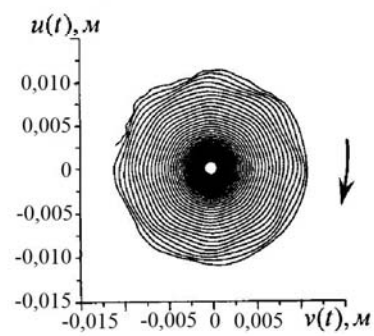
a



б



в



г

Рис. 4

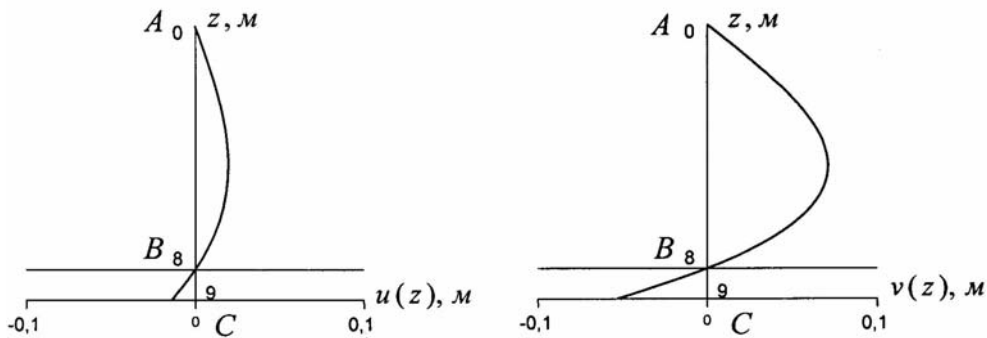
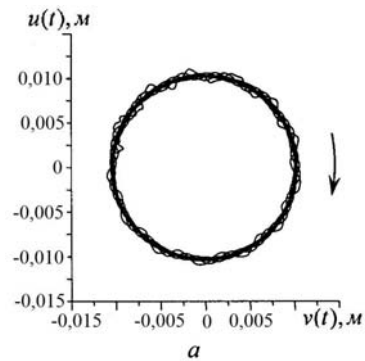


Рис. 5

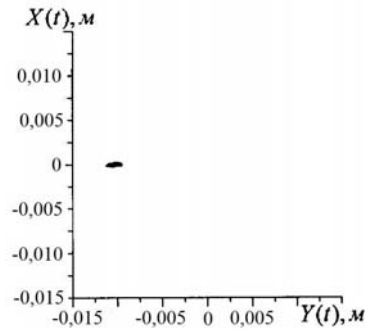
этом рисунке соответствуют значениям полуосей эллипсоидов $b = 0,22$ м; $c = 0,18$ м и $b = 0,3$ м; $c = 0,25$ м (сплюснутые эллипсоиды), позиции θ и z – значениям $b = 0,15$ м; $c = 0,18$ м и $b = 0,25$ м; $c = 0,3$ м (вытянутые эллипсоиды). Левые фрагменты этих диаграмм представляют формы движения во вращающейся системе координат $Oxyz$, правые фрагменты – движение в неподвижной системе $OXYZ$. Как видно, во всех случаях, начиная с некоторого начального возмущенного состояния, долото, в конечном итоге, движется по спиральной кривой в направлении, совпадающем с направлением собственного вращения колонны. В связи с этим такое кружение является прямым. Система стремится к состоянию, в котором БК становится прямолинейной, а долото занимает положение в центральной точке на оси вращения. Поэтому с технической точки зрения такой режим можно считать устойчивым и наиболее благоприятным для осуществления процесса бурения.

При этом графики функций прогибов $u(z)$, $v(z)$ в нижних пролетах имеют простую форму, типичную для двухпролетной балки с одним консольным пролетом BC . На рис. 5 они показаны в увеличенном масштабе.

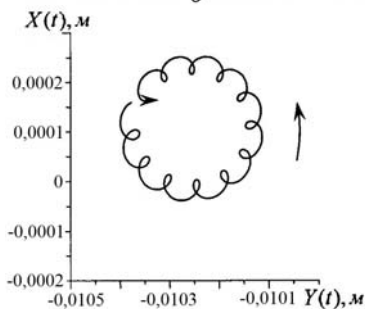
Движение долота становится менее стабильным, когда дно скважины приобретает более плоскую форму, а угловая скорость ω возрастает. На рис. 6 показаны траектории движения для случая, когда $\omega = 5$ рад/с; но дно скважины стало сферическим с радиусом $b = c = 0,67$ м. Здесь берега донного углубления менее крутые, поэтому они в меньшей степени ограничивают движение долота, которое во вращающейся системе отсчета осуществляется почти по круговой траектории (позиция а), а в фиксированной системе (позиция б) замедляется, хотя в увеличенном масштабе долото движется по замкнутой петлеобразной кривой в направлении, обратном вращению колонны. Здесь имеет место обратное кружение, хотя и мелкомасштабное. Повидимому, этот режим является неприемлемым, так как долото начинает вращаться относительно новой точки соприкосновения с поверхностью дна, осуществляя переход к бурению в новом направлении.



а



б



в

Рис. 6

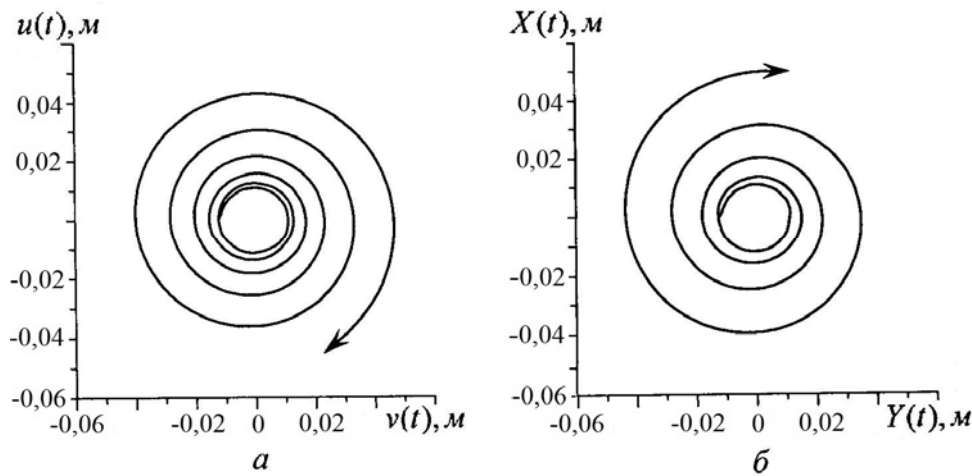


Рис. 7

На рис. 7 представлены формы прямого кружения долота при $b = c = 0,25$ м; $\omega = 20$ рад/с. Движение долота при этой скорости перестает быть стабильным и оно начинает двигаться в режиме расширяющейся спирали. Эти режимы бурения считаются недопустимыми.

Анализ результатов компьютерного моделирования перекачивания вращающегося долота по криволинейной поверхности дна скважины при фрикционном сцеплении между ними в точке контакта позволяет заключить, что для рассматриваемой системы силы трения играют принципиально иную роль по сравнению со случаями простых диссипативных систем. В обычных системах с подвижными трущимися элементами конструкций осуществляется диссипация кинетической энергии в результате ее преобразования в тепловую энергию и дальнейшего отвода из системы. Однако во вращающейся системе БК – долото силы фрикционного сцепления долота и поверхности дна скважины играют иную роль, поскольку они, наоборот, принуждают долото осуществлять вынужденное движение по дну скважины, удаляться от оси вращения и переходить в режим устоявшихся или неустановившихся колебаний кружения относительно оси вращения. В реализуемых случаях эти силы могут способствовать подводу дополнительной энергии от источника вращения БК к долоту и переводить его в режим качения. Такие формы движения можно расценивать как режимы кинематического самовозбуждения колебаний кружения системы за счет подкачки силами трения дополнительной энергии от внешнего источника.

РЕЗЮМЕ. Поставлено задачу про динамічне згинання бурильної колони, що обертається, в порожнині глибокої свердловини у режимах самозбудження коливань кружання її долота на поверхні дна свердловини. Розроблено математичну модель кочення сферичного долота по еліпсоїдальній поверхні дна. Побудовано форми коливань кружання долота в нерухомій і рухомій системах координат. Показано, що розрахункові траєкторії руху долота можуть мати форму спіралей, що розширюються (нестійкий режим) або звужуються (стійкий режим), які спостерігаються в практиці буріння. Вони характеризуються великими значеннями прискорень руху і тому представляють небезпеку для системи.

1. Андрусенко Е.Н., Гуляев В.И., Худолій С.Н. Изгиб бурильной колонны в скважине с несовершенствами осевой линии // Прикладная математика и механика. – 2012. – 76, № 3. – С. 459 – 468.
2. Борц Е.И., Вацлилина Е.В., Гуляев В.И. Спиральные бегущие волны в упругих стержнях // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 2. – С. 143 – 149.
3. Гуляев В.И., Глушакова О.В., Худолій С.Н. Квантованные аттракторы в волновых моделях торсионных колебаний колонн глубокого бурения // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2010. – № 2. – С. 134 – 147.
4. Лобас Л.Г. Неголономные модели колесных экипажей. – К.: Наук. думка, 1986. – 232 с.
5. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. – М.: Наука, 1967. – 519 с.

6. Bao J., Zhang P., Zhu C. Dynamic Analysis of Flexible Hoisting Rope with Time-Varying Length // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 6. – P. 710 – 720.
7. Brett J.F., Warren T.M., Behr S.M. Bit whirl □ a new theory of PDC bit failure // SPE Drilling Engineering. – 1990. – **5**, N 6. – P. 275 – 281.
8. Chen S.L., Blackwood K., Lamine E. Field investigation of the effects of stick-slip, lateral, and whirl vibrations on roller-cone bit performance // SPE Drilling & Completion. – 2002. – **17**. – P. 15 – 20.
9. Christoforou A.P., Yigit A.S. Dynamic modelling of rotating drillstrings with borehole interactions // J. of Sound and Vibration. – 1997. – **206**, N 2. – P. 243 – 260.
10. Ford B.J. The genesis of torsional drillstring vibrations // SPE Drilling Engineering. – 1992. – **7**, September. – P. 168 – 174.
11. Gulyayev V.I., Andrusenko E.N. Theoretical simulation of geometrical imperfections influence on drilling operations at drivage of curvilinear bore-holes // J. Petr. Sci. Eng. – 2013. – **112**. – P. 170 – 177.
12. Gulyayev V.I., Borshch O.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells // J. Petrol. Sci. Eng. – 2011. – **78**, N 3. – P.759 – 764.
13. Gulyayev V.I., Glushakova O.V., Glazunov S.N. Stationary and non-stationary self-induced vibrations in waveguiding systems // J. Mech. Eng. and Automat. – 2014. – **4**, N 3. – P. 213 – 224.
14. Gulyayev V.I., Lugovoi P.Z., Glushakova O.V., Glazunov S.N. Self-Excitation of Torsional Vibrations of Long Drillstring in a Viscous Fluid // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 2. – P. 155 – 164.
15. Gulyayev V.I., Shevchuk L.V. Nonholonomic dynamics of drill string bit whirling in a deep bore-hole // J. of Multi-body Dynamics. – 2013. – **227**, N 3. – P. 234 – 244.
16. Gulyayev V.I., Shevchuk L.V. Drill string bit whirl simulation with the use of frictional and non-holonomic models // Journ. of Vibration and Acoustics. – 2015. – **138**, N 1. – P.011021 – 011021 – 9.
17. Jansen J.D. Whirl and chaotic motion of stabilized drill collars // SPE Drilling Engineering. – 1992. – **7**, N 2. – P. 107 – 114.
18. Kovalyshen Y. A simple model of bit whirl for deep drilling applications // J. of Sound and Vibration. – 2013. – **332**, N 24. – P. 6321 – 6334.
19. Leine R.I., Van Campen D.H., Keultjes W.J.G. Stick-slip whirl interaction in drillstring dynamics // J. Vibr. and Acoust. – 2002. – **124**. – P. 209 – 220.
20. Legeza V.P. Determining the Tuning Parameters for a Roller Damper with Constraints // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 6. – P. 691 – 695.
21. Lugovoi P.Z., Meish V.F. Nonstationary Deformation of Longitudinal and Transversely Reinforced Cylindrical Shells on an Elastic Foundation // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 1. – P. 62 – 72.
22. Lugovoi P.Z., Meish V.F., Meish Yu.A. Nonstationary Dynamics of a Systems Consisting of a Cylindrical Shells and ASoil Medium of Pertiodic Structure // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 350 – 353.
23. Meish Yu.A. Nonstationary Vibrations of Transversely Reinforced Cylindrical Shells on an Elastic Foundation // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 6. – P. 643 – 647.
24. Samuel R. Friction factors: What are they for torque, drag, vibration, bottom hole assembly and transient surge/swab analyses? // J. Petroleum Sci. and Eng. – 2010. – **73**. – P. 258 – 266.
25. Stroud D., Pagett J., Minett-Smith D. Real-time whirl detector improves RSS reliability, drilling efficiency // Hart Exploration & Production Magazine. – 2011. – **84**, N 8. – P. 42 – 43.
26. Yigit A.S., Christoforou A.P. Stick-slip and bit-bounce interaction in oil-well drillstrings // J. of Energy Resources Technology. – 2006. – **128**, N 4. – P. 268 – 274.

Поступила 20.09.2016

Утверждена в печать 14.03.2017