

М. Ф. Селиванов, Ю. А. Черноиван

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КОНТАКТИРУЮЩИХ БЕРЕГОВ
ТРЕЩИНЫ В ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова, 3,
03057, Киев, Украина; e-mail: fract@inmech.kiev.ua*

Abstract. In the fracture mechanics when the possible contact between crack faces is taken into account, the including only normal displacements boundary conditions are known to describe an interpenetration of plane crack faces what is impossible physically. To eliminate this contradiction, the boundary condition is proposed that takes into account both components of displacement vector of crack faces points. It is shown that this assumption allows to avoid an interpenetration of crack faces. An algorithm of solving the problems with contacting crack faces in anisotropic bodies is proposed. An effectiveness of this algorithm is demonstrated on a few examples of determination of crack faces displacements and the contact zone sizes.

Key words: fracture, crack face contact, mixed mode loading, nonpenetration conditions, orthotropic plate.

Введение.

Важность вычисления параметров, характеризующих имеющуюся в элементе конструкции трещину, дала толчок развитию многочисленных аналитических и численных методов механики разрушения. Основными характеристиками трещины являются коэффициент интенсивности напряжений (КИН) и раскрытие берегов трещины [9]. Независимо от типа трещины (криволинейная или прямолинейная, простого режима нагружения или смешанного) в большинстве случаев задача решается в предположении отсутствия взаимодействия берегов, т.е. для открытой трещины. Даже если КИН трещины нормального отрыва K_I отличен от нуля (отрицательный K_I свидетельствует о перекрытии берегов трещины в окрестности вершины), возможно частичное перекрытие берегов на некоторых участках, не содержащих вершины. Очевидным является факт влияния образованного участка контакта на характеристики трещины.

Известно, что незначительные контактные напряжения имеют место в решении задачи даже при приложении сдвиговых напряжений в бесконечно удаленных точках пластины с трещиной [7]. Использование граничных условий с нулевым скачком нормальных перемещений приводит к отсутствию контактных напряжений в этой задаче.

В данной работе используется граничное условие, содержащее вертикальные и горизонтальные перемещения берегов трещины и производные от функции срединной линии трещины. Это условие можно сформулировать следующим образом: точки берегов трещины при деформации остаются на средней линии трещины (линия, каждая точка которой делит на две равные части отрезок между соседними до деформации точками берегов). Использование этого граничного условия проиллюстрировано решением задач для прямолинейной трещины в анизотропной пластине с простейшими схемами нагружения: а) растягивающее и сдвиговое на бесконечности; б) сосредоточенные силы в окрестности трещины.

Для построения решений в данной работе используем классические потенциалы Мусхелишвили [3]. Контактное напряжение фигурирует в этих потенциалах в виде кусочно-линейной функции с неизвестными напряжениями в узлах [8, 10]. Для определения этих напряжений на основе рассмотренного граничного условия строим систему нелинейных уравнений, которую легко можно линеаризовать.

§1. Условие контакта берегов трещины.

Если выражения для перемещений берегов трещины представить в форме

$$u^\pm(x) = u_0(x) \pm u_1(x); \quad v^\pm(x) = v_0(x) \pm v_1(x), \quad (1.1)$$

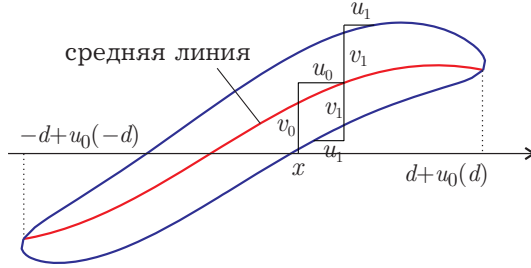


Рис. 1

то средняя линия деформированной трещины описывается уравнением $f(x+u_0) = v_0$ (обозначения приведены на рис. 1).

Выберем вектор, направление которого совпадает с направлением нормали к f в точке $x+u_0$,

$$\vec{n} = \left(-1, \frac{1}{f'(x+u_0)} \right);$$

$$f'(x+u_0) = \frac{v'_0}{1+u'_0}. \quad (1.2)$$

Условие перекрытия берегов можно записать в форме $\cos(\vec{n}, \vec{a}) < 0$, $\vec{a} = (u_1, v_1)$ или, согласно (1.2)

$$v_1(1+u'_0) - u_1v'_0 < 0. \quad (1.3)$$

Уравнение для определения контактных напряжений запишем в соответствии с равенством

$$v_1(1+u'_0) - u_1v'_0 = 0. \quad (1.4)$$

Это уравнение решим в узлах сетки на отрезке расположения трещины. Контактные напряжения определим в форме кусочно-линейной функции

$$\sigma(x) - \alpha\tau(x) = \frac{(b_k - x)(\sigma_{k-1} - \alpha\tau_{k-1}) + (x - b_{k-1})(\sigma_k - \alpha\tau_k)}{\Delta b_k} \quad x \in (b_{k-1}, b_k) \quad (1.5)$$

с напряжениями $\sigma_k - \alpha\tau_k$ в точках сетки b_k , $k = 1, \dots, n$ ($b_0 = -\xi d$, $b_n = \xi d$, $\xi = 1 - \varepsilon$, ε – малая величина).

Обозначим σ и τ векторы-столбцы с элементами σ_k и τ_k , соответственно, которые являются значениями нормальных и сдвиговых контурных напряжений в узлах b_k . Тогда, полагая $\tau = k_{tr}\sigma$ (k_{tr} – коэффициент трения между берегами трещины), значение выражения левой части уравнения (1.4) в узловых точках можно представить в виде

$$\frac{LY}{4\pi^2\alpha_y}; \quad Y = V_1 \circ U_0 - V_0 \circ U_1,$$

$$V_1 = q_{22} - A\sigma; \quad U_0 = 2\pi e + L_2(q_{11} - \pi\sigma);$$

$$V_0 = L_2(q_{21} + \pi\alpha_y k_{tr}\sigma); \quad U_1 = q_{12} - \alpha_y k_{tr} A\sigma, \quad (1.6)$$

где e – вектор-столбец размерности $n+1$ с единичными элементами; $a \circ b$ – произведение Адамара; α_y и L_2 – упругие постоянные. Величины q_{ij} соответствуют перемещениям, обусловленным действием сил вне контура трещины; матрица A содержит геометрические параметры контактного взаимодействия берегов трещины.

Приравнявая Y нулю, получаем систему для определения контактных напряжений σ в узлах сетки. Система $Y(\sigma) = 0$ является нелинейной, но можно легко записать ее якобиан:

$$A \circ [(\alpha_y k_{tr} V_0 - U_0) \mathbf{y}] - \pi L_2 (V_1 + \alpha_y k_{tr} U_1) \mathbf{y},$$

где \mathbf{y} – вектор-строка размерности $n+1$ с единичными элементами.

§2. Анизотропная пластина с трещиной.

Определим решение задачи о напряжении и деформации в линейно-упругой анизотропной пластине с трещиной.

Обобщенный закон Гука для главных направлений u и v представим в виде

$$\varepsilon_u = \frac{1}{E_{11}} \sigma_u - \frac{\nu_{21}}{E_{11}} \sigma_v; \quad \varepsilon_v = -\frac{\nu_{21}}{E_{11}} \sigma_u + \frac{1}{E_{22}} \sigma_v; \quad \gamma_{uv} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{uv}. \quad (2.1)$$

В работе [4] показано, что задачу двумерной теории упругости анизотропного тела можно сформулировать в терминах двух аналитических функций φ и ψ обобщенных комплексных переменных $z_1 = x + s_1 y$ и $z_2 = x + s_2 y$, соответственно. Комплексные параметры анизотропии s_1 и s_2 являются корнями характеристического уравнения основного дифференциального уравнения плоской задачи теории упругости. В случае, когда анизотропный материал имеет три плоскости упругой симметрии, и в случае совпадения осей координат и главных осей анизотропии это уравнение имеет вид

$$s^4 + m_a s^2 + k_a^2 = 0 \quad (m_a = E_{11}/G_{12} - 2\nu_{21}; \quad k_a = \sqrt{E_{11}/E_{22}}). \quad (2.2)$$

Коэффициенты k_a и n_a в (2.2) являются параметрами обобщенного плоского напряженного состояния ортотропной пластины и служат мерой ее анизотропии (для изотропного случая $k_a = 1$, $n_a = 2$). Для большинства материалов с тремя плоскостями упругой симметрии $s_1 = i\beta_1$ и $s_2 = i\beta_2$ ($0 < \beta_1 < \beta_2$).

Компоненты напряжений и перемещений [2] определяем уравнениями

$$\sigma_x = 2\operatorname{Re}\{s_1^2 \Phi(z_1) + s_2^2 \Psi(z_2)\}; \quad \sigma_y = 2\operatorname{Re}\{\Phi(z_1) + \Psi(z_2)\}; \quad (2.3)$$

$$\tau_{xy} = -2\operatorname{Re}\{s_1 \Phi(z_1) + s_2 \Psi(z_2)\};$$

$$u = 2\operatorname{Re}\{p_1 \varphi(z_1) + p_2 \psi(z_2)\}; \quad v = 2\operatorname{Re}\{q_1 \varphi(z_1) + q_2 \psi(z_2)\}, \quad (2.4)$$

где приняты обозначения:

$$p_k = a_{11} s_k^2 + a_{12}; \quad q_k = a_{12} s_k + \frac{a_{22}}{s_k}; \quad (2.5)$$

$$\varphi(z) = \int \Phi(z) dz; \quad \psi(z) = \int \Psi(z) dz. \quad (2.6)$$

Для больших $|z|$ имеем такие формулы:

$$\Phi(z) = \Gamma + \frac{A}{z} + O(z^{-2}); \quad \Psi(z) = \Gamma' + \frac{B}{z} + O(z^{-2}); \quad (2.7)$$

постоянные $\Gamma = B^* + i \cdot 0$ и $\Gamma' = B'^* + i C'^*$ определяются условиями на бесконечности из (2.3):

$$\begin{aligned} s_1^2 \Gamma + s_2^2 \Gamma' + \bar{s}_1^2 \bar{\Gamma} + \bar{s}_2^2 \bar{\Gamma}' &= \sigma_x^\infty; \\ \Gamma + \Gamma' + \bar{\Gamma} + \bar{\Gamma}' &= \sigma_y^\infty; \\ s_1 \Gamma + s_2 \Gamma' + \bar{s}_1 \bar{\Gamma} + \bar{s}_2 \bar{\Gamma}' &= -\tau_{xy}^\infty \end{aligned} \quad (2.8)$$

(далее для краткости используем σ_∞ и τ_∞ вместо σ_y^∞ и τ_{xy}^∞ , соответственно).

Для формулировки задачи Гильберта – Привалова вводим функции [6];

$$\begin{aligned}\Theta(z) &= \Phi(z) + \frac{1 + \alpha s_2}{1 + \alpha s_1} \Psi(z); \quad \Omega(z) = \bar{\Phi}(z) + \frac{1 + \alpha \bar{s}_2}{1 + \alpha \bar{s}_1} \bar{\Psi}(z); \\ \theta(z) &= \varphi(z) + \frac{p_2 + \alpha q_2}{p_1 + \alpha q_1} \psi(z); \quad \omega(z) = \bar{\varphi}(z) + \frac{\bar{p}_2 + \alpha \bar{q}_2}{\bar{p}_1 + \alpha \bar{q}_1} \bar{\psi}(z).\end{aligned}\quad (2.9)$$

Параметр α является корнем квадратного уравнения

$$\frac{1 + \alpha s_2}{1 + \alpha s_1} = \frac{p_2 + \alpha q_2}{p_1 + \alpha q_1}. \quad (2.10)$$

Это соотношение вместе с (2.6) и (2.9) обеспечивает равенство

$$\theta(z) = \int \Theta(z) dz.$$

Равенство

$$\omega(z) = \int \Omega(z) dz \quad (2.11)$$

следует из того, что $\bar{\alpha}$ также является корнем квадратного уравнения (2.10), откуда

$$\frac{1 + \bar{\alpha} s_2}{1 + \bar{\alpha} s_1} = \frac{p_2 + \bar{\alpha} q_2}{p_1 + \bar{\alpha} q_1} \quad \text{и} \quad \frac{1 + \alpha \bar{s}_2}{1 + \alpha \bar{s}_1} = \frac{\bar{p}_2 + \alpha \bar{q}_2}{\bar{p}_1 + \alpha \bar{q}_1},$$

что и обеспечивает (2.11).

Образует комбинации напряжений и перемещений

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha \equiv \sigma_y - \alpha \tau_{xy} &= (1 + \alpha s_1) \Theta(z_1) + (1 + \alpha \bar{s}_1) \Omega(\bar{z}_1) + (1 + \alpha s_2) [\Psi(z_2) - \Psi(z_1)] + \\ &+ (1 + \alpha \bar{s}_2) [\bar{\Psi}(z_2) - \bar{\Psi}(z_1)];\end{aligned}\quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}u_\alpha \equiv u + \alpha v &= (p_1 + \alpha q_1) \theta(z_1) + (\bar{p}_1 + \alpha \bar{q}_1) \omega(\bar{z}_1) + (p_2 + \alpha q_2) [\psi(z_2) - \psi(z_1)] + \\ &+ (\bar{p}_2 + \alpha \bar{q}_2) [\bar{\psi}(z_2) - \bar{\psi}(z_1)],\end{aligned}\quad (2.13)$$

соответственно.

Перемещение берегов трещины –

$$u_\alpha^\pm(x) = (p_1 + \alpha q_1) \theta^\pm(x) + (\bar{p}_1 + \alpha \bar{q}_1) \omega^\mp(x). \quad (2.14)$$

Соотношение (2.8) приводит к

$$\sigma_\alpha^\infty \equiv \sigma_\infty - \alpha \tau_\infty = (1 + \alpha s_1) \Gamma + (1 + \alpha s_2) \bar{\Gamma} + (1 + \alpha \bar{s}_1) \Gamma' + (1 + \alpha \bar{s}_2) \bar{\Gamma}'. \quad (2.15)$$

Функции, присутствующие в выражениях для напряжений (2.3) и перемещений (2.4), принимают вид:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{\Theta(z) + \bar{\Omega}(z)}{2}; \quad \Psi(z) = \frac{1 + \alpha s_1}{1 + \alpha s_2} \frac{\Theta(z) - \bar{\Omega}(z)}{2}; \\ \varphi(z) &= \frac{\theta(z) + \bar{\omega}(z)}{2}; \quad \psi(z) = \frac{1 + \alpha s_1}{1 + \alpha s_2} \frac{\theta(z) - \bar{\omega}(z)}{2}.\end{aligned}$$

На действительной оси комплексной плоскости, когда y стремится к нулю сверху или снизу из (2.12) соответственно получим

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha^+(x) &= (1 + \alpha s_1) \Theta^+(x) + (1 + \alpha \bar{s}_1) \Omega^-(x); \\ \sigma_\alpha^-(x) &= (1 + \alpha s_1) \Theta^-(x) + (1 + \alpha \bar{s}_1) \Omega^+(x).\end{aligned}\quad (2.16)$$

Добавляя и вычитая правые и левые части уравнений (2.16), имеем две граничные задачи Гильберта – Привалова:

$$\begin{aligned}
1) [(1 + \alpha s_1)\Theta(x) + (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(x)]^+ + [(1 + \alpha s_1)\Theta(x) + (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(x)]^- &= \\
&= \sigma_\alpha^+(x) + \sigma_\alpha^-(x); \\
2) [(1 + \alpha s_1)\Theta(x) - (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(x)]^+ - [(1 + \alpha s_1)\Theta(x) - (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(x)]^- &= \\
&= \sigma_\alpha^+(x) - \sigma_\alpha^-(x).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Решение этих задач имеет вид

$$(1 + \alpha s_1)\Theta(z) \pm (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(z) = \left\{ \frac{1}{\pi i X(z)} \int_{L''} \frac{\sigma_\alpha^+(x) X^+(x)}{x - z} dx + \frac{2(C_0 z + C_1)}{X(z)} \right\}_{-\Gamma_2}. \tag{2.18}$$

Постоянные C_0 и Γ_2 определяются условиями на бесконечности, а постоянная C_1 – условием однозначности перемещений.

§3. Напряженно-деформированное состояние в результате приложения сосредоточенной силы в окрестности трещины и напряжения на бесконечности.

Сосредоточенная сила $P_x + iP_y$, приложенная в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ ($x_0, y_0 > 0$, рис. 2), обуславливает поле напряжений с потенциалами

$$\Phi(z) = \frac{\Lambda_1}{z_1 - z_0^1}; \quad \Psi(z) = \frac{\Lambda_2}{z_2 - z_0^2}$$

$$(\Lambda_k = -(p_k P_x + q_k P_y) / (2\pi i a_{11} \bar{s}_k), \quad k = 1, 2);$$

величины p_k и q_k определены в (2.5), а $\bar{s}_1 = (s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)$; $\bar{s}_2 = (s_2 - s_1) \times (s_2 - s_3)(s_2 - s_4)$; $z_k = x + s_k y$; $z_0^k = x_0 + s_k y_0$; $s_3 = \bar{s}_1$; $s_4 = \bar{s}_2$.

Напряжение, обусловленное действием сосредоточенной силы, принимает на линии расположения трещины следующее значение:

$$\sigma_0 - \alpha \tau_0 = \sum_{k=1}^4 \frac{\Lambda_k (1 + \alpha s_k)}{x - z_0^k} \quad (\Lambda_3 = \bar{\Lambda}_1; \quad \Lambda_4 = \bar{\Lambda}_2). \tag{3.1}$$

Определим напряженно-деформированное состояние в окрестности трещины при наличии в точке $z = x_0 + iy_0$ ($y_0 > 0$) сосредоточенной силы (P_x, P_y).

Рассмотрим контурные условия $(\sigma_y - \alpha \tau_{xy})^\pm = -[\sigma_0(x) - \alpha \tau_0(x)] - [\sigma(x) - \alpha \tau(x)]$, $x \in (-d, d)$, и условия на бесконечности: $\sigma_y(z) = \sigma_\infty$, $\tau_{xy}(z) = \tau_\infty$, $z \rightarrow \infty$.

Напряжение на линии расположения трещины $\sigma_0 - \alpha \tau_0$ в теле без трещины, которое возникает в результате действия сосредоточенной силы, определено в (3.1). Напряжение $\sigma(x) - \alpha \tau(x)$ отлично от нуля в случае контакта берегов трещины. Эти напряжения будем определять в форме кусочно-линейной функции (1.5) в процессе решения задачи.

Решение задач Гильберта – Привалова (2.17) для функций $(1 + \alpha s_1)\Theta(z) \pm (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(z)$, получим при помощи (2.18):

$$(1 + \alpha s_1)\Theta(z) \pm (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(z) = \frac{1}{\pi} [-H_1(z) - H_2(z) + H_3(z)] - \Gamma_2, \tag{3.2}$$

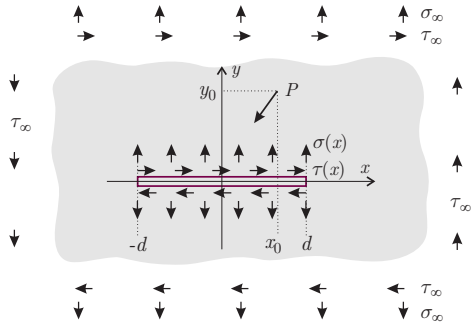


Рис. 2

$$\begin{aligned}
H_1(z) &= \frac{1}{iX(z)} \int_{-d}^d \frac{\sigma_0(x) - \alpha\tau_0(x)}{x-z} X(x) dx; \\
H_2(z) &= \frac{1}{iX(z)} \int_{-d}^d \frac{\sigma(x) - \alpha\tau(x)}{x-z} X(x) dx; \quad H_3(z) = 2\pi \frac{C_0 z + C_1}{X(z)};
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$X(x)$ – значение функции $X(z) = \sqrt{z^2 - d^2}$ на верхнем берегу разреза ($X(x) = X^+(x)$).

Из условия однозначности перемещений устанавливаем, что $C_1 = 0$. Далее определим постоянные C_0 и Γ_2 . При $|z| \rightarrow \infty$, согласно (2.7), имеем

$$\begin{aligned}
\Theta(z) &= \Gamma + \frac{1 + \alpha s_2}{1 + \alpha s_1} \Gamma' + \left(A + \frac{1 + \alpha s_2}{1 + \alpha s_1} B \right) \frac{1}{z} + O(z^{-2}); \\
\Omega(z) &= \bar{\Gamma} + \frac{1 + \alpha \bar{s}_2}{1 + \alpha \bar{s}_1} \bar{\Gamma}' + \left(\bar{A} + \frac{1 + \alpha \bar{s}_2}{1 + \alpha \bar{s}_1} \bar{B} \right) \frac{1}{z} + O(z^{-2}),
\end{aligned}$$

причем Γ и Γ' определяются условиями (2.8). Уравнения для определения C_0 и Γ_2 :

$$(1 + \alpha s_1)\Gamma + (1 + \alpha s_2)\Gamma' \pm (1 + \alpha \bar{s}_1)\bar{\Gamma} + (1 + \alpha \bar{s}_2)\bar{\Gamma}' = \begin{cases} 2C_0 \\ -\Gamma_2 \end{cases},$$

откуда, используя обозначения (2.15), получаем:

$$C_0 = \frac{1}{2} \sigma_\alpha^\infty; \tag{3.4}$$

$$\Gamma_2 = -(1 + \alpha s_1)\Gamma - (1 + \alpha s_2)\Gamma' + (1 + \alpha \bar{s}_1)\bar{\Gamma} + (1 + \alpha \bar{s}_2)\bar{\Gamma}'.$$

Подставим (3.1) в первое из выражений (3.3), а (1.5) – во второе. Интегрируя, получим, соответственно,

$$\begin{aligned}
H_1(z) &= \frac{i}{2X(z)} \sum_{k=1}^4 (D_k P_y - iE_k P_x)(R(z, z_0^k) - 1); \\
H_2(z) &= \sum_{k=0}^n (\sigma_k - \alpha\tau_k) \left[ih_k(z) - \frac{N_{0k}\Delta b + N_{1k}z - N_{2k}z^2 / \Delta b}{X(z)} \right],
\end{aligned}$$

где функции R и h_k определены следующим образом:

$$R(z, \zeta) = \frac{X(z) - X(\zeta)}{z - \zeta}; \quad \hat{X}(z) = -iX(z) = \sqrt{(z-c)(d-z)}; \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
h_0(z) &= Q_1'(z) + C_0(z); \quad h_i(z) = Q_{i+1}'(z) - Q_i'(z) \quad (i = 1, \dots, n-1); \\
h_n(z) &= -Q_n'(z) - C_n(z); \quad Q_k'(z) = \frac{Q_k(z) - Q_{k-1}(z)}{\Delta b};
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$Q_k(z) = (z - b_k)C_k(z); \quad C_k(z) = C(z, b_k); \tag{3.7}$$

для коэффициентов N имеем формулы:

$$\begin{aligned}
N_{00} &= \Delta S_1; \quad N_{0k} = \Delta S_{k+1} - \Delta S_k; \quad N_{0n} = -\Delta S_n; \\
N_{10} &= \Delta R_1 - I_0; \quad N_{1k} = \Delta R_{k+1} - \Delta R_k; \quad N_{1n} = -\Delta R_n + I_n; \\
N_{20} &= \Delta I_1; \quad N_{2k} = \Delta I_{k+1} - \Delta I_k; \quad N_{2n} = -\Delta I_n;
\end{aligned} \tag{3.8}$$

σ_k и τ_k – контактные напряжения в узлах кусочно-линейной функции (1.5);

$$\begin{Bmatrix} D_k \\ E_k \end{Bmatrix} = \frac{a_k(1 + \alpha s_k)}{a_{11} \tilde{s}_k} \begin{Bmatrix} q_k \\ p_k \end{Bmatrix} \quad (k = 1, \dots, 4); \quad a_1 = a_2 = 1; \quad a_3 = a_4 = -1. \tag{3.9}$$

В случае совпадения направления оси анизотропии и оси координат упругие постоянные в (3.9) можно записать в форме

$$D_{1,3} = \frac{1}{2} \left[\mp 1 + \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \right] \frac{\beta_2^2 + \nu_{21}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}; \quad D_{2,4} = \frac{1}{2} \left[\pm 1 - \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \right] \frac{\beta_1^2 + \nu_{21}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}, \tag{3.10}$$

$$E_{1,3} = \frac{1}{2\beta_1} \left[-1 \pm \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \right] \frac{\beta_1^2 + \nu_{21}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}; \quad E_{2,4} = \frac{1}{2\beta_2} \left[1 \mp \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \right] \frac{\beta_2^2 + \nu_{21}}{\beta_2^2 - \beta_1^2},$$

где верхний знак следует принять для первого из нижних индексов, а нижний – для второго.

В этом случае имеем формулы:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^4 D_k &= c_x; \quad \sum_{k=1}^4 E_k = \alpha_y c_x; \quad c_x = L_2 L^{-1}; \quad \alpha_x = 0; \quad \alpha_y = k_a^{-12}; \\
L &= 2n_a k_a^{12} a_{11}; \quad L_2 = 2(a_{12} + k_a a_{11}); \quad \Gamma_2 = \gamma \sigma_\infty - i \beta_2^{-1} \tau_\infty; \quad \gamma = k_a^{12} n_a^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Интегрированием в (3.2) получаем

$$2\pi \begin{Bmatrix} (1 + \alpha s_1)\theta(z) \\ (1 + \alpha \bar{s}_1)\omega(z) \end{Bmatrix} = - \int [H_1(z) + H_2(z)] dz + \pi \left[\sigma_\alpha^\infty X(z) \mp \Gamma_2 z \right]; \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
\int H_1(z) dz &= \frac{i}{2} \sum_{k=1}^4 (D_k P_y - i E_k P_x) \left[\ln(z - z_0^k) - C(z_0^k, z) + iI(z) \right]; \\
\int H_2(z) dz &= \sum_{k=0}^n (\sigma_k - \alpha \tau_k) \left[J_k(z) - \sum_{s=0}^2 F_s(z) N_{sk} (\Delta b)^{1-s} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} C(z, \zeta) = \ln \frac{\check{X}(z) - \check{X}(\zeta)}{\check{X}(z) + \check{X}(\zeta)}; \quad I(z) = 2\check{X}(z); \quad \check{X}(z) = \sqrt{(z-c)/(d-z)}; \end{Bmatrix} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
J_0(z) &= T_1'(z) + K_0(z); \quad J_i(z) = T_{i+1}'(z) - T_i'(z) \quad (i = 1, \dots, n-1); \\
J_n(z) &= -T_n'(z) - K_n(z);
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$T_k'(z) = \frac{T_k(z) - T_{k-1}(z)}{\Delta b}; \quad T_k(z) = \frac{1}{2} \left\{ (z - b_k)^2 C_k(z) + \hat{X}(b_k) [\hat{X}(z) + b_k I(z)] \right\}; \tag{3.15}$$

$$F_0(z) = -I(z); \quad F_1(z) = \hat{X}(z); \quad F_2(z) = \frac{1}{2} \left[d^2 I(z) - z \hat{X}(z) \right]. \tag{3.16}$$

Тогда, используя (3.12), можно определить перемещение берегов в форме (1.1):

$$\frac{2\pi}{L} \begin{pmatrix} u'_0 & u_1 \\ \alpha_y v'_0 & \alpha_y v_1 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^3 W_k \quad (3.17)$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} c_{\times} q_{11} & q_{12} \\ c_{\times} q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}; \quad W_3 = \pi \begin{pmatrix} -\gamma \sigma_{\infty} & \alpha_y \tau_{\infty} \hat{X} \\ \beta_2^{-1} \tau_{\infty} & \sigma_{\infty} \hat{X} \end{pmatrix}; \quad W_2 = - \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} \pi c_{\times} \sigma_k h_{ky} & \alpha_y \tau_k A_k \\ -\alpha_y \pi c_{\times} \tau_k h_{ky} & \sigma_k A_k \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Элементы функциональной матрицы W_1 , q_{ij} определяем следующим образом:

$$Q = \begin{pmatrix} P_y u_{0y}' - P_x u_{0x}' & -P_y u_{1y} + P_x u_{1x} \\ -P_y v_{0y}' - P_x v_{0x}' & P_y v_{1y} + P_x v_{1x} \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} u_{0y}' \\ v_{1y} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^2 D_{k'} \begin{Bmatrix} \text{Im} f_k \\ \text{Re} g_k \end{Bmatrix}; & \begin{Bmatrix} u_{0x}' \\ v_{1x} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^2 E_{k''} \begin{Bmatrix} \text{Re} f_k \\ \text{Im} g_k \end{Bmatrix}; \\ \begin{Bmatrix} u_{1y} \\ v_{0y}' \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^2 D_{k''} \begin{Bmatrix} \text{Im} g_k \\ \text{Re} f_k \end{Bmatrix}; & \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ v_{0x}' \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^2 E_{k'} \begin{Bmatrix} \text{Re} g_k \\ \text{Im} f_k \end{Bmatrix}, \end{cases} \quad (3.19)$$

где упругие постоянные D и E определены так:

$$D'_1 = -\frac{\beta_2^2 + \nu_{21}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}; \quad D'_2 = \frac{\beta_1^2 + \nu_{21}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}; \quad E'_1 = \frac{D'_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}}; \quad E'_2 = \frac{D'_1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}};$$

$$D''_1 = -\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} D'_1; \quad D''_2 = -\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} D'_2; \quad E''_1 = -\frac{D'_2}{\beta_1}; \quad E''_2 = -\frac{D'_1}{\beta_2}; \quad (3.20)$$

$$\left[2f_k(x) = 1/(x - z_0^k); \quad 2g_k(x) = C_x(z_0^k, x) - iI(x); \quad C_x(z_0^k, x) = \text{Re}\{C^+(z_0^k, x)\} \right].$$

Элементы матрицы W_2 определяются функциями $h_{ky}(x) = \text{Im}\{h_k^+(x)\}$ и $A_k(x) = J_{kx}(x) - \sum_{s=0}^2 F_s(x) N_{sk}$, где $J_{kx}(x) = \text{Re}\{J_k^+(x)\}$, а $F_s(x)$ – значения функции $F_s(z)$ на верхнем берегу разреза.

Отдельно запишем перемещения средней линии трещины вследствие действия контактных напряжений:

$$\frac{2\pi}{L} \begin{pmatrix} u_0 \\ \alpha_y v_0 \end{pmatrix} = c_{\times} \sum_{k=0}^n J_{ky} \begin{pmatrix} \sigma_k \\ -\alpha_y \tau_k \end{pmatrix},$$

где $J_{ky}(x) = \text{Im}\{J_k^+(x)\}$. Перемещение средней линии в точках сетки

$$\frac{2\pi}{L} \begin{pmatrix} u'_0 & u_1 \\ \alpha_y v'_0 & \alpha_y v_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \pi c_{\times} \sigma & \alpha_y A \tau \\ -\alpha_y \pi c_{\times} \tau & A \sigma \end{pmatrix}; \quad \frac{2\pi}{L} \begin{pmatrix} u_0 \\ \alpha_y v_0 \end{pmatrix} = c_{\times} J^y \begin{pmatrix} \sigma \\ -\alpha_y \tau \end{pmatrix},$$

где элементы матриц A и J^y определяются следующим образом:

$$J_{mk}^y \equiv J_{ky}(b_m) = -\frac{\pi}{2} \Delta b \cdot j_{mk}; \quad A_{mk} = A_k(b_m);$$

$$j_{m0} = \begin{cases} 0, & m=0 \\ 1, & m>0 \end{cases}; \quad j_{mk} = \begin{cases} 0, & m < n \\ 1, & m = n \\ 2, & m > n \end{cases}; \quad j_{mn} = \begin{cases} 0, & m < n \\ 1, & m = n \end{cases}.$$

Таким образом, матрица, содержащая геометрические параметры контактного взаимодействия берегов, введенная в (1.6), определяется в форме $A = \Delta b \cdot (J^x - FN)$, где элементы матриц J^x и F , соответственно,

$$J_{mk}^x = J_{kx}(b_m); F_{m1} = -I_m; F_{m2} = \hat{X}_m; F_{m3} = S_m;$$

J^x – имеет размерность $(n+1) \times (n+1)$ и такие элементы:

$$J_{m0} = \Delta T_{m1} + K_{m0}; J_{mk} = \Delta T_{m(k+1)} - \Delta T_{mk}; \quad (k=1, \dots, n-1); \quad (3.21)$$

$$J_{mn} = -\Delta T_{mn} - K_{mn}$$

$$T_{mk} = \frac{1}{2} \left[(m-k)^2 C_{mk} + \hat{X}_m \hat{X}_k + \left(k - \frac{n}{2} \right) \hat{X}_k I_m \right]; C_{mk} = \ln \left| \frac{\check{X}_m - \check{X}_k}{\check{X}_m + \check{X}_k} \right|;$$

$$K_{m0} = m C_{m0} - \hat{X}_0 I_m; K_{mn} = (m-n) C_{mn} - \hat{X}_n I_m; \Delta T_{mk} = T_{mk} - T_{m(k-1)};$$

F – размерность $(n+1) \times 3$, $N = 3 \times (n+1)$, а коэффициенты I_m , \hat{X}_m и S_m – таковы:

$$\check{X}_k = \sqrt{\frac{n_\xi(1-\xi)+k}{n_\xi(1+\xi)-k}}; \hat{X}_m = \check{X}_m [n_\xi(1+\xi) - m]; \quad (3.22)$$

$$S_m = \frac{1}{2} \left[n_\xi^2 I_m - \left(m - \frac{n}{2} \right) \hat{X}_m \right]; n_\xi = \frac{n}{2\xi}, I_m = 2\check{X}_m.$$

В случае полного контакта берегов трещины с равномерным распределением контактных напряжений (при $n=1$, $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma$, $\tau_0 = \tau_1 = \tau$) получаем

$$W_2 = \pi \begin{pmatrix} -c_{xz} \sigma & \alpha_y \tau \hat{X} \\ \alpha_y c_{xz} \tau & \sigma \hat{X} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

§4. Определение контактных напряжений, обусловленных нагрузкой на бесконечности.

Рассмотрим сначала задачу при отсутствии сосредоточенных сил. Комплексные потенциалы определяются соотношениями

$$2 \left\{ \begin{matrix} (1 + \alpha s_1) \Theta(z) \\ (1 + \alpha \bar{s}_1) \Omega(z) \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_\alpha^\infty z}{X(z)} \mp \Gamma_2; \quad 2 \left\{ \begin{matrix} (1 + \alpha s_1) \theta(z) \\ (1 + \alpha \bar{s}_1) \omega(z) \end{matrix} \right\} = \sigma_\alpha^\infty X(z) \mp \Gamma_2 z,$$

а перемещение берегов трещины –

$$2 \begin{pmatrix} u^\pm \\ v^\pm \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \pm \hat{X} \\ x \end{pmatrix},$$

где элементами матрицы B являются:

$$b_{11} = -\text{Im}(L\sigma_\alpha^\infty) - \alpha_x b_{21}; \quad b_{21} = \alpha_y^{-1} \text{Re}(L\sigma_\alpha^\infty);$$

$$b_{12} = -\text{Re}(L\Gamma_2) - \alpha_x b_{22}; \quad b_{22} = -\alpha_y^{-1} \text{Im}(L\Gamma_2).$$

В случае совпадения осей координат и главных осей анизотропии величина L является действительной; $\alpha_x = 0$ и для $\sigma_\alpha^\infty = -\sigma_\infty + i\alpha_y \tau_\infty$ ($\sigma_\infty, \tau_\infty \geq 0$) согласно (3.17),

получим $\frac{2\pi}{L} \begin{pmatrix} u'_0 & u_1 \\ \alpha_y v'_0 & \alpha_y v_1 \end{pmatrix} = -W_3$, где W_3 определена в (3.18).

Левая часть (1.3) примет вид

$$v_1(1+u'_0) - u_1v'_0 = -\frac{L^2 \hat{X}}{4\alpha_y} \left[\sigma_\infty(2L^{-1} + \gamma\sigma_\infty) + \alpha_y \beta_2^{-1} \tau_\infty^2 \right],$$

условия перекрытия берегов трещины:

$$\sigma_\infty(2L^{-1} + \gamma\sigma_\infty) + \alpha_y \beta_2^{-1} \tau_\infty^2 > 0.$$

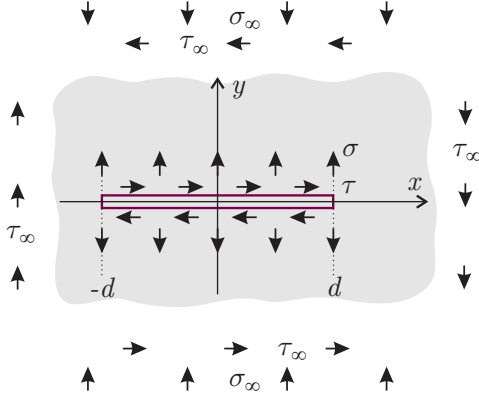


Рис. 3

В случае отсутствия нормального напряжения на бесконечности ($\sigma_\infty = 0$) получим контакт берегов трещины. Можно выяснить какое минимальное растягивающее усилие следует приложить, чтобы исключить контакт. Решая относительно σ_∞ уравнение, полученное с последнего неравенства, запишем

$$\sigma_\infty = (L\gamma)^{-1} \left[1 - \sqrt{1 - L^2 \gamma \alpha_y \beta_2^{-1} \tau_\infty^2} \right].$$

Решение задачи со сдвиговыми напряжениями на бесконечности и обусловленными ими контактными напряжениями (рис. 3) представим согласно (3.17):

$$\frac{2\pi}{L} \begin{pmatrix} u'_0 & u_1 \\ \alpha_y v'_0 & \alpha_y v_1 \end{pmatrix} = W_2 - W_3, \quad (4.1)$$

где значение W_2 определено в (3.23), а W_3 – в (3.18).

Уравнение для определения контактных напряжений на основании (1.4) примет вид

$$(\sigma - \sigma_\infty)(2L^{-1} - c_x \sigma + \gamma\sigma_\infty) - \alpha_y (\tau - \tau_\infty)(c_x \alpha_y \tau - \beta_2^{-1} \tau_\infty) = 0.$$

Полагая $\tau = k_{tr} \sigma$, определим нормальное контактное напряжение:

$$\sigma = (2a)^{-1} (b - \sqrt{b^2 - 4ac})$$

$$\left[a = c_x (1 + \alpha_y^2 k_{tr}^2); c = (2L^{-1} + \gamma\sigma_\infty)\sigma_\infty + \alpha_y \beta_2^{-1} \tau_\infty^2; \right.$$

$$\left. b = 2L^{-1} + (\gamma + c_x)\sigma_\infty + k_{tr} (\alpha_y \beta_2^{-1} + \alpha_y^2 c_x) \tau_\infty \right].$$

Например, при $k_{tr} = 0$ и $\sigma_\infty = 0$ получим:

$$\sigma = L_2^{-1} \left[1 - \sqrt{1 - LL_2 \alpha_y \beta_2^{-1} \tau_\infty^2} \right] \approx \left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \frac{\tau_\infty^2}{E_{11}}.$$

Поскольку в таком случае $\sigma = O(\tau_\infty)$ при $\tau_\infty \rightarrow 0$, контактными напряжениями, возникающими вследствие деформирования средней линии трещины, при незначительных уровнях внешней сдвиговой нагрузки можно пренебречь

§5. Числовой пример.

Рассмотрим задачу для двух сил, приложенных симметрично вдоль линии, проходящей через середину трещины (рис. 4), напряжение в бесконечно удаленных точках отсутствуют. В этом случае происходит полный контакт берегов трещины.

Перемещение берегов трещины определим при помощи (3.17). При определении W_1 в выражениях (3.19) следует принять:

$$2f_k(x) = (x - z_0^k)^{-1} - (x + z_0^k)^{-1};$$

$$2g_k(x) = C_x(z_0^k, x) - C_x(-z_0^k, x).$$

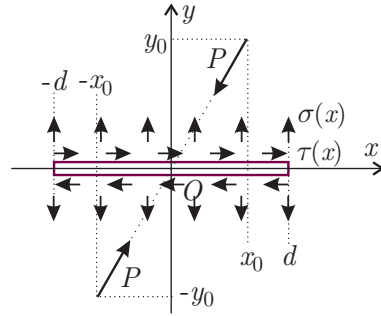


Рис. 4

Упругие постоянные получим путем моделирования материала пластины ортотропной средой с эффективными характеристиками. Эти характеристики найдем при помощи результатов механики композитных материалов [1] в виде функций механических характеристик изотропных материалов компонент композита (материала армирующих элементов и материала наполнителя) и их объемного содержания (c_1 – армирования, $c_2 = 1 - c_1$ – наполнителя).

Технические постоянные в законе Гука (2.1), согласно результатам [1], можно рассматривать как функции модулей сдвига (G_i) и коэффициентов Пуассона (ν_i) изотропных материалов компонент композита (индекс $i=1$ для механических характеристик соответствует материалу армирования, $i=2$ – наполнителя):

$$E_{11} = c_1 E_1 + c_2 E_2 + \frac{8G_1 c_1 c_2 (\nu_1 - \nu_2)}{d_1};$$

$$E_{22} = \left[\frac{\nu_{21}^2}{E_1} + \frac{\varkappa_2 + 1}{8G_2} \left(\frac{2 + (\varkappa_1 - 1)\tilde{G}}{d_1} - \frac{2c_1(1 - \tilde{G})}{d_2} \right) \right]^{-1};$$

$$G_{12} = G_{12}^0 \left\{ 1 + n^2(n-1) \frac{G_{12}^0}{G_2} \left(\frac{\tilde{G} - 1}{c_2 \tilde{G} + 1 + c_1} \right)^2 \frac{\sin^n \alpha_n}{\pi^n} \left[c_1^2 - c_1^{2n} \left(\frac{\tilde{G} - 1}{\tilde{G} + 1} \right)^2 \right] \right\};$$

$$G_{12}^0 = G_2 \frac{1 + c_1 + c_2 \tilde{G}}{c_2 + (1 + c_1)\tilde{G}}; \quad G_{23} = G_2 \frac{d_2}{c_2 \varkappa_2 + (1 + \varkappa_2 c_1)\tilde{G}}; \quad \nu_{21} = \nu_2 - \frac{(\varkappa_2 + 1)(\nu_2 - \nu_1)c_1}{d_1}$$

$$\left[d_1 = 2 + c_1(\varkappa_2 - 1) + c_2(\varkappa_1 - 1)\tilde{G}; \quad d_2 = \varkappa_2 + c_1 + c_2 \tilde{G}; \right.$$

$$\left. E_i = 2G_i(1 + \nu_i); \quad \varkappa_i = 3 - 4\nu_i; \quad \tilde{G} = G_2 / G_1 \right];$$

в выражении для модуля $G_{12} - \alpha_n = 2\pi/n$, n – число, определяющее тип упаковки волокон (например, $n=4$ отвечает тетрагональной упаковке).

Приведенные выше числовые значения упругих параметров ортотропной пластины E_{11} , $\beta_{1,2}$ и ν_{21} , получены для композита со следующими объемными и сдвиговыми модулями материалов компонент: $K_1 = 85,8$ ГПа, $G_1 = 29,3$ ГПа; $K_2 = 5,41$ ГПа, $G_2 = 2,51$ ГПа концентрации $c_1 = 0,2$ для случая, когда направление армирования совпадает с прямой расположения трещины.

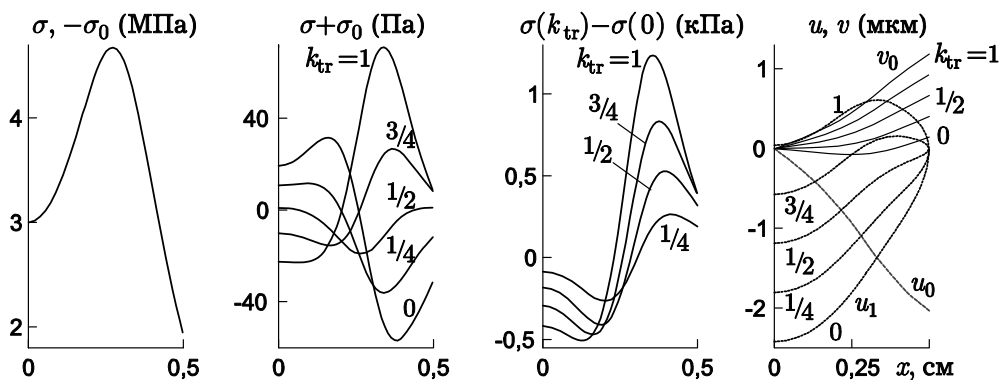


Рис. 5

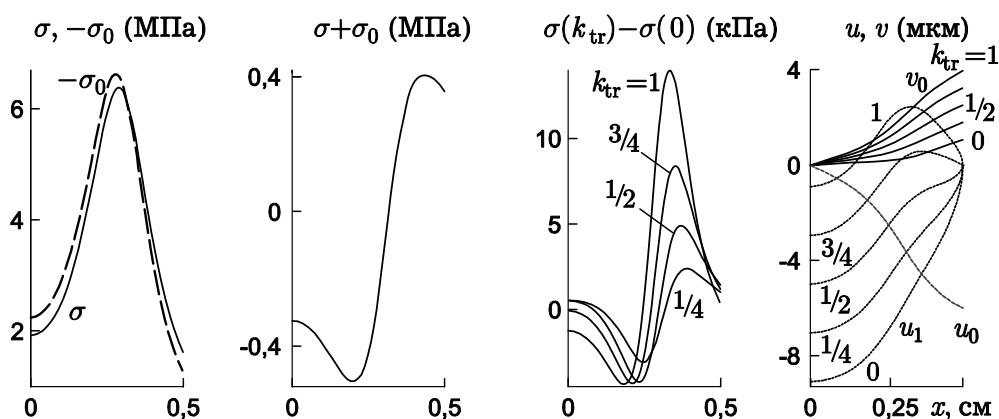


Рис. 6

На рис. 5 приведены характеристики деформированной линии трещины при армировании вдоль трещины. На первом блоке приведены контактное напряжение σ и напряжение на отрезке расположения трещины в теле без трещины с противоположным знаком, $-\sigma_0$. На втором блоке приведены разности напряжений σ и $-\sigma_0$. На третьем блоке приведены разности контактных напряжений для обозначенных ненулевых коэффициентов трения и напряжения, вычисленного при отсутствии трения. На четвертом блоке приведены составляющие компонент перемещений берегов трещины. На рис. 6 приведены аналогичные характеристики деформированной линии трещины при армировании вдоль нормали к трещине. Если в первом численном примере (рис. 5) влияние коэффициента трения на контактные напряжения незначительно (в пределах 0,1 %), то во втором (рис. 6) это влияние измеряется одним процентом.

Заключение.

В работе получено решение ряда задач теории упругости для прямолинейных трещин с контактирующими берегами. В случае, когда при деформировании средняя линия трещины не остаётся на прямой ее первоначального положения, использовано граничное условие, которое учитывает малые искривления или повороты средней линии. Определено влияние изменения основного направления ортотропии материала (вдоль или по нормали к трещине) и коэффициента трения между берегами на распределение напряжений. Представлен анализ числовых результатов, приведенных в виде графиков.

РЕЗЮМЕ. У задачі механіки руйнування із врахуванням можливого контакту між берегами тріщини використання у граничних умовах на берегах тріщини лише нормальних переміщень призводить до взаємопроникнення берегів тріщини у розв'язку. З метою усунути цю суперечність у роботі використано граничну умову, в якій враховано обидві компоненти вектора зміщень точок берега тріщини. Показано, що така умова надає змогу уникнути взаємопроникнення берегів. Запропоновано алгоритм розв'язування задач із контактом берегів тріщини в анізотропних тілах. Ефективність алгоритму для визначення переміщень берегів тріщини та розмірів зони контакту продемонстровано на декількох числових прикладах.

1. Ван Фо Фы Г.А. Композиционные материалы волокнистого строения. – К.: Наук. думка, 1970. – 404 с.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
4. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
5. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
6. Azhdari, A., Nemat-Nasser, S., Obata, M. Alternative solution methods for crack problems in plane anisotropic elasticity, with examples // Int. J. Solids and Struct. – 2000. – **37**, – P. 6433 – 6478.
7. Becker, W. Gross, D. About the Dugdale crack under mixed mode loading // Int. J. of Fract. – 1988. – **37**, – P. 163 – 170.
8. Gross, D., Heimer, St. Crack closure and crack path prediction for curved cracks under thermal load. // Eng. Fract. Mech. – 1993. – **46**, – P. 633 – 640.
9. Kaminsky A.A., Kurchakov E.E. Influence of Tension along a Mode I Crack in an Elastic Body on the Formation of a Nonlinear Zone // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 130 – 148.
10. Lauterbach, B., Gross, D. Crack growth in brittle solids under compression // Mech. Mater. – 1998. – **29**, P. 81 – 92.
11. Mikhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Elastic State of a Sliding Short Fiber Inclusion in a Three-Dimensional Matrix // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 6. – P. 640 – 647.

Поступила 08.09.2016

Утверждена в печать 14.03.2017