

А. Н. Гузь, А. М. Багно

**ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ НА ДИСПЕРСИЮ
КВАЗИЛЭМБОВСКИХ ВОЛН В СИСТЕМЕ
«УПРУГИЙ СЛОЙ – ВЯЗКИЙ ЖИДКИЙ СЛОЙ»**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e – mail: desc@inmech.kiev.ua*

Abstract. On the base of three-dimensional linearized Navier – Stokes equations for viscous fluid and linear equations of the classical theory of elasticity for the elastic layer, the dispersion curves are constructed and the propagation of quasi-Lamb waves are studied within the wide range of frequencies. An effect of the viscosity of fluid, the thickness of elastic and fluid layers on the phase velocities and attenuation coefficients of quasi-Lamb modes are analyzed for thick fluid layers. It is shown that in the case of a thick fluid layer for all modes, elastic layer of certain thickness exist, for which the effect of viscosity of fluid on the phase velocities and attenuation coefficients of modes is minimal. It is also found that for certain modes, both certain thickness and certain ranges of thickness exist wherein the influence of fluid viscosity on the phase velocities and attenuation coefficients of these modes is significant. It is shown that the viscosity of a fluid contributes to the shift of the lower quasi-Lamb mode to an elastic body. The approach developed and results obtained make it possible to establish the limits for the wave processes within which the model of an ideal compressible fluid can be applied. The numerical results in the form of plots are analyzed.

Key words: elastic layer, layer of viscous compressible fluid, harmonic waves.

Введение.

Использование закономерностей распространения поверхностных акустических волн при разработке ультразвуковых неразрушающих методов выявления дефектов и определения напряжений в материалах и элементах конструкций из них [7, 8, 13, 14, 19, 20, 22 – 26, 28 – 30] ставит задачу более полного учета свойств, присущих реальным средам [2, 3 – 12, 15 – 18, 21, 27 и др.]. Вязкость жидкости является одним из таких параметров. В связи с этим возникает интерес к изучению влияния усиливающего связь между упругим телом и жидкостью фактора на волновой процесс в гидроупругой системе. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом этого свойства жидкости, приведены в [2 – 5, 7 – 12, 15 – 18, 21, 27].

В данной работе для исследования распространения волн в системе «слой жидкости – упругий слой» привлечена модель вязкой сжимаемой ньютоновской жидкости. При этом использованы трехмерные линеаризованные уравнения Навье – Стокса для жидкости и линейные уравнения классической теории упругости для твердого тела. Предполагается, что жидкость находится в состоянии покоя и тепловые эффекты не учитываются. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости и упругого тела, предложенные в работах [3 – 9, 15 – 18].

§1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, состоящей из изотропного упругого слоя и вязкого сжимаемого жидкого слоя. Решение получим с привлечением трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений Навье – Стокса

для жидкости, находящейся в состоянии покоя. В рамках принятых моделей основные соотношения для системы «упругое тело – вязкая сжимаемая жидкость» принимают такой вид:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0; \quad \sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu^* \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{1}{3} \nu^* \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0; \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2; \quad a_0 = \text{const};$$

$$P_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mu^* \left(\frac{\partial v_i}{\partial z_j} + \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \right); \quad \lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*. \quad (1.3)$$

Здесь введены следующие обозначения: u_i – компоненты вектора перемещений твердого тела \mathbf{u} ; ρ – плотность материала упругого слоя; λ и μ – константы Ляме материала твердого тела; v_i – составляющие вектора возмущений скорости жидкости \mathbf{v} ; ρ^* и p – возмущения плотности и давления в жидкости; ν^* и μ^* – кинематический и динамический коэффициенты вязкости жидкости; ρ_0 и a_0 – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя; P_{ij} и σ_{ij} – составляющие напряжений, соответственно, в жидкости и упругом теле.

Равенства (1.1) описывают поведение упругого тела. Малые колебания вязкой сжимаемой жидкости, находящейся в состоянии покоя и без учета тепловых эффектов, описывают соотношения (1.2), (1.3).

Далее предположим, что упругое тело занимает объем $(-\infty < z_1 < \infty, -h_2 \leq z_2 \leq 0, -\infty < z_3 < \infty)$ и контактирует со слоем вязкой сжимаемой жидкости, заполняющей объем: $(-\infty < z_1 < \infty, 0 \leq z_2 \leq h_1, -\infty < z_3 < \infty)$. Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси oz_3 . В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости oz_1z_2 . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений (1.1) – (1.3) при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{12} \Big|_{z_2=0} = P_{12} \Big|_{z_2=0}; \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=0} = P_{22} \Big|_{z_2=0}; \quad \sigma_{12} \Big|_{z_2=-h_2} = 0; \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=-h_2} = 0; \quad (1.4)$$

$$P_{12} \Big|_{z_2=h_1} = 0; \quad P_{22} \Big|_{z_2=h_1} = 0; \quad v_1 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{z_2=0}; \quad v_2 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{z_2=0}. \quad (1.5)$$

§2. Методика решения.

В дальнейшем для решения задачи гидроупругости воспользуемся представлениями общих решений линеаризованных уравнений для упругих тел и вязкой сжимаемой жидкости, предложенными в работах [3 – 9, 15 – 18]

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t},$$

где введенные потенциалы χ_i являются решениями следующих уравнений:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

$$\left[\left(1 + \frac{4\nu^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0; \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu^* \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0.$$

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений определяем в классе бегущих волн $\chi_i = X_i(z_2) \times \exp[i(kz_1 - \omega t)]$ ($i = \overline{1, 3}$), где k ($k = \beta + i\gamma$) – волновое число; γ – коэффициент затухания волны; ω – круговая частота; $i^2 = -1$.

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее решаем две задачи Штурма – Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также определяем соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (1.4) и (1.5) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения этой системы, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \| e_{mn}(c, \gamma, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h_1/c_s, \omega h_2/c_s) \| = 0 \quad (m, n = \overline{1, 8}), \quad (2.1)$$

где c – фазовая скорость мод в гидроупругой системе; h_1 – толщина слоя жидкости; h_2 – толщина упругого слоя; c_s ($c_s^2 = \mu / \rho$) – скорость волны сдвига в упругом теле.

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и поперечная волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется только продольная волна. В вязкой сжимаемой жидкости существуют как продольная волна, так и волна сдвига. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхности контакта сред, порождают сложное волновое поле в гидроупругой системе.

Заметим, что полученное дисперсионное уравнение (2.1) является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев, которые рассмотрены в работах [1, 3 – 5, 11, 21]. В частности, если a_0 устремить к бесконечности, то (2.1) переходит в уравнение для определения параметров мод в случае взаимодействия упругого слоя с вязкой несжимаемой жидкостью. Если μ^* принять равным нулю, то из (2.1) получим результаты для гидроупругой системы с идеальной жидкостью. При $\rho_0 = 0$ из равенства (2.1) получим уравнение для определения скоростей волн Лэмба [1, 3 – 5, 11, 21]. Если дополнительно устремить h_2 к бесконечности, то получим соотношение для определения скоростей поверхностных волн Рэлея [1, 3 – 5, 11, 21]. При $\rho_0 \neq 0$ и $h_1 \rightarrow \infty$ равенство перейдет в уравнение Стоунли – Шольте [1, 3 – 5, 11, 21].

§3. Числовые результаты.

В дальнейшем дисперсионное уравнение (2.1) решаем численно. При этом расчеты проводим для системы, состоящей из органического стекла и воды, которая характеризуется следующими параметрами: упругий слой – $\rho = 1160$ кг/м³, $\mu = 1,86 \cdot 10^9$ Па, $\lambda = 3,96 \cdot 10^9$ Па; слой жидкости – $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $a_0 = 1459,5$ м/с, $\bar{\mu}^* = 0,001$, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,1526$.

Результаты вычислений представлены в виде графиков на рисунках 1 – 13.

На рис. 1 для упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) \bar{h}_2 ($\bar{h}_2 = \omega h_2/c_s$). Номерами n_a обозначены антисимметричные моды, а n_s – соответственно, симметричные моды.

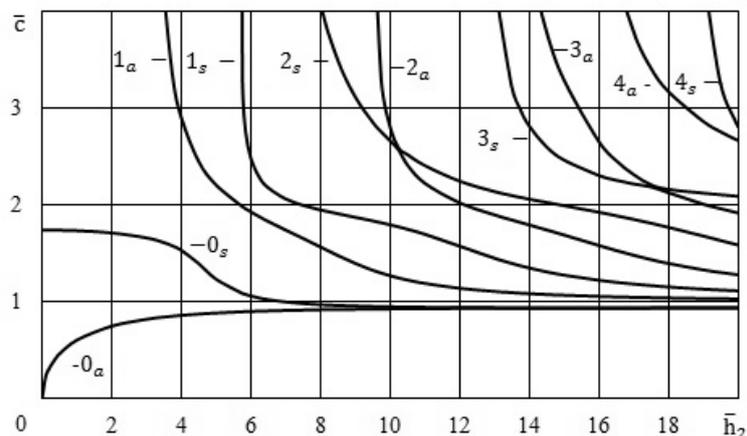


Рис. 1

На рис. 2 показаны дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h}_2 для толстого жидкого слоя с толщиной $\bar{h}_1 = 20$ ($\bar{h}_1 = \omega h_1/c_s$) и $\bar{\mu}^* = 0,001$.

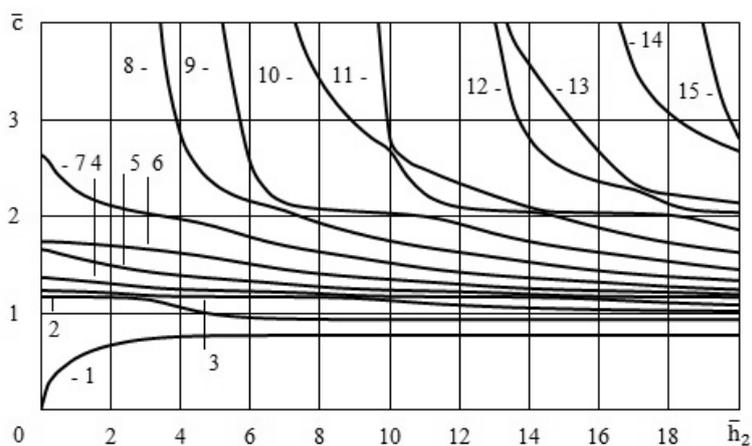


Рис. 2

Графики, представленные на рис. 3, 4, отражают распределение амплитуд смещений (скоростей) для гидроупругого волновода, состоящего из упругого слоя ($-\bar{h}_2 \leq \bar{z}_2 \leq 0$) и слоя ($0 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{h}_1$) идеальной жидкости ($\bar{\mu}^* = 0$). На них приведены зависимости величин продольных \bar{V}_{z_1} (рис. 3) и поперечных \bar{V}_{z_2} (рис. 4) смещений (скоростей $\partial u_i/\partial t$ и v_i) от безразмерной поперечной координаты \bar{z}_2 для поверхностной волны 1 (рис. 2).

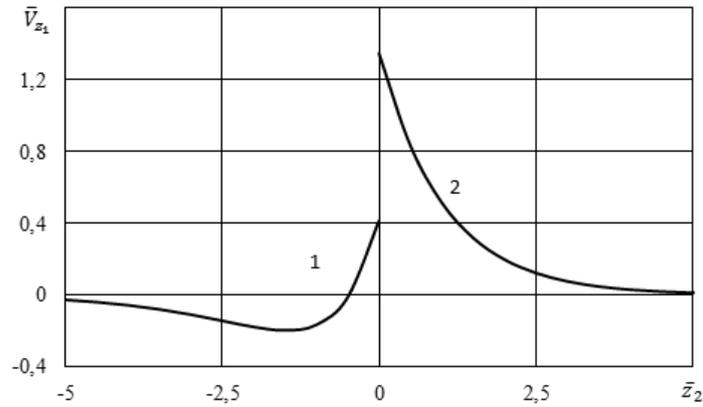


Рис. 3

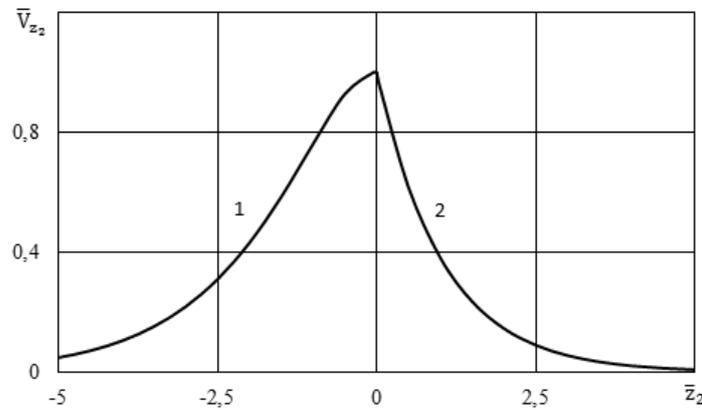


Рис. 4

Аналогичные зависимости для гидроупругой системы, состоящей из упругого слоя и слоя вязкой жидкости ($\bar{\mu}^* = 0,001$), приведены на рис. 5, 6.

Графики, представленные на рис. 3 – 6, получены для первой нижней квазиповерхностной моды 1 в коротковолновой части спектра при частоте (толщине) $\bar{h}_2 = 15$. Отметим, что разрыв продольных смещений \bar{V}_{z_1} в упругом теле (кривая 1) и в идеальной жидкости (кривая 2) на границе контакта сред ($\bar{z}_2 = 0$) обусловлен невязкостью (идеальностью) жидкости (рис. 3).

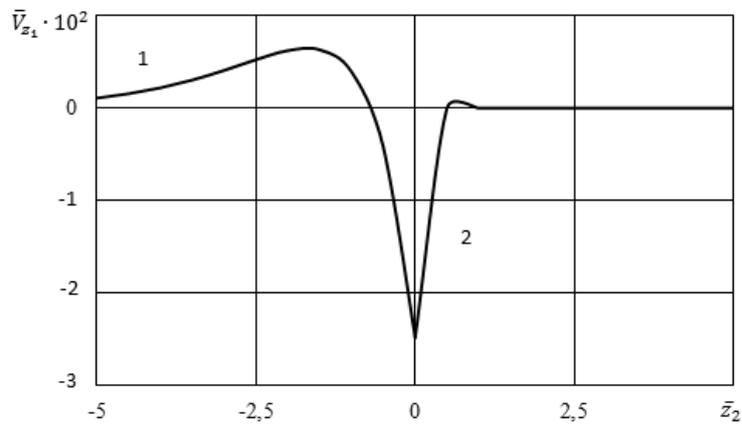


Рис. 5

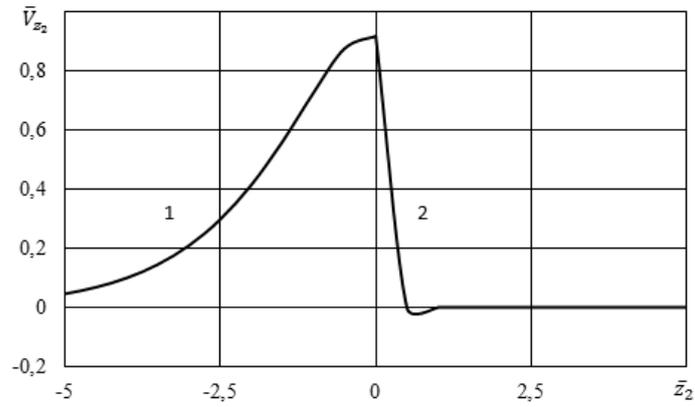


Рис. 6

На рис. 7 – 10 приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания мод $\bar{\gamma}$ ($\bar{\gamma} = \gamma/k_s$, k_s – волновое число волны сдвига в материале упругого слоя) от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h}_2 для слоя вязкой жидкости с толщиной $\bar{h}_1 = 20$ и $\bar{\mu}^* = 0,001$.

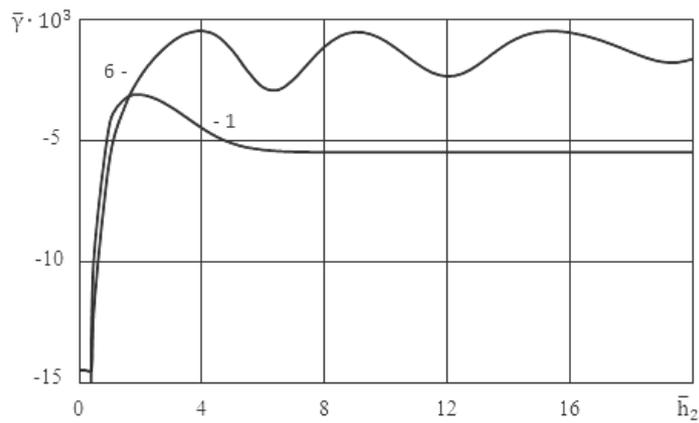


Рис. 7

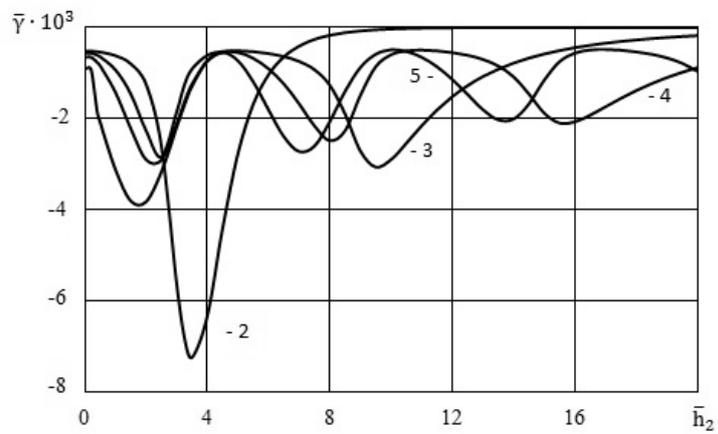


Рис. 8

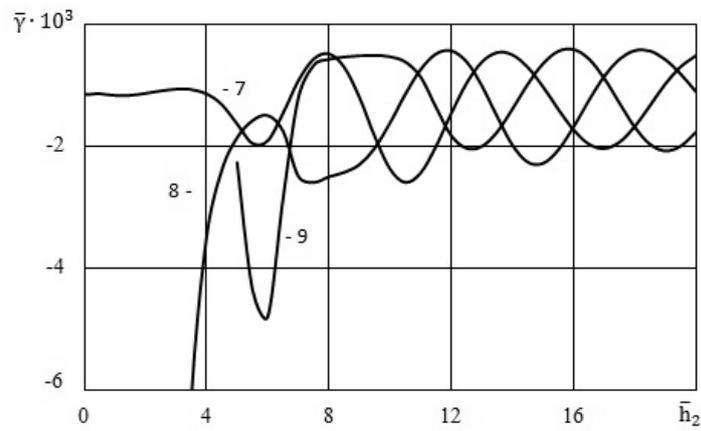


Рис. 9

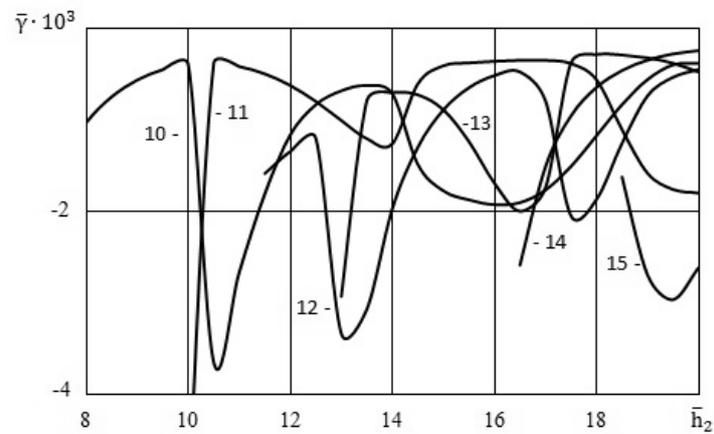


Рис. 10

Характер влияния вязкости жидкости ($\bar{\mu}^* = 0,001$) на скорости мод в гидроупругой системе иллюстрируют графики на рис. 11 – 13, на которых представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей мод c^* [$c^* = (c_i - c_v)/c_i$, c_i – фазовая скорость волн в гидроупругой системе с идеальной жидкостью, c_v – фазовая скорость мод в системе с вязкой жидкостью] от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h}_2 .

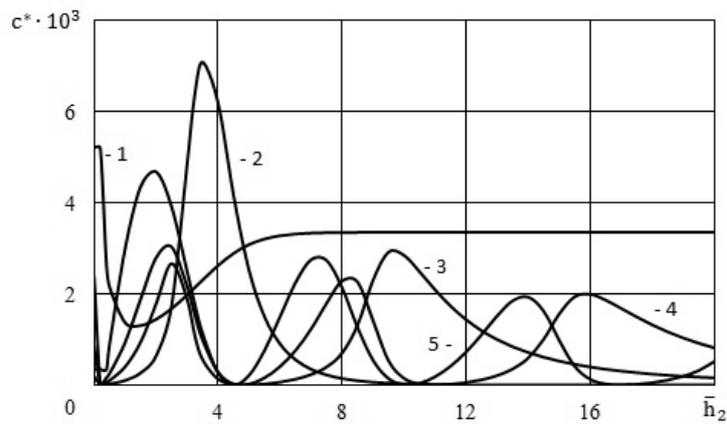


Рис. 11

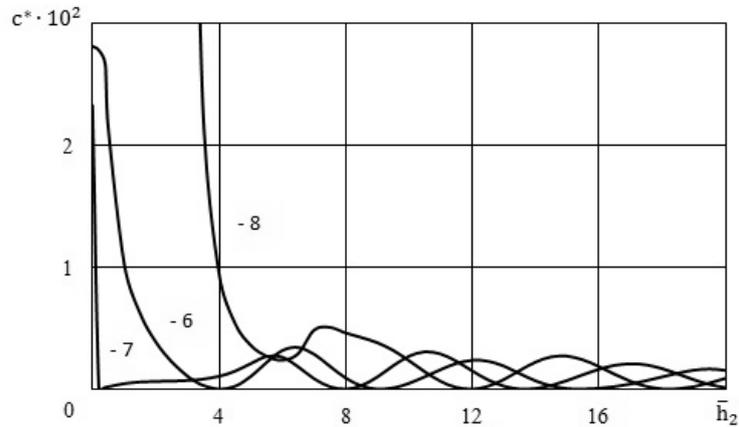


Рис. 12

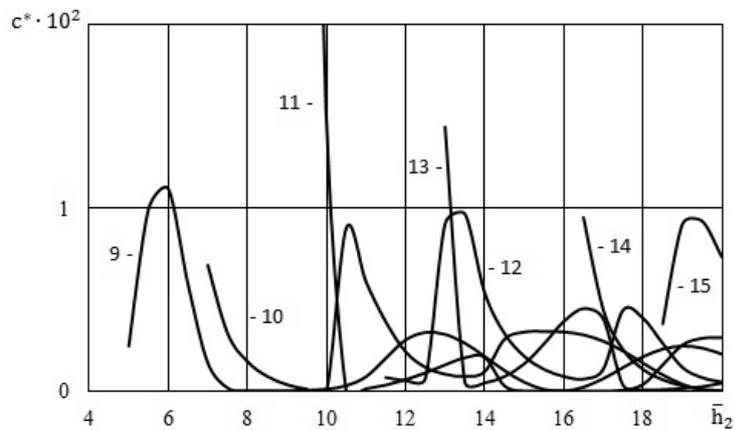


Рис. 13

На этих рисунках приведены графики для гидроупругого волновода, толщина жидкого слоя которого $\bar{h}_1 = 20$.

§4. Анализ числовых результатов.

Из графиков, представленных на рис. 1, следует, что скорость нулевой антисимметричной моды Лэмба при росте толщины упругого слоя (частоты) \bar{h}_2 стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,9336$) снизу, а скорость нулевой симметричной моды – к скорости волны Рэлея \bar{c}_R сверху. Скорости всех высших мод Лэмба при увеличении толщины упругого слоя (частоты) \bar{h}_2 стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s .

Из графического материала, приведенного на рис. 2, непосредственно следует, что в случае взаимодействия упругого слоя с толстым вязким жидким слоем с толщиной $\bar{h}_1 = 20$ жидкость оказывает значительное влияние на волновой процесс в длинноволновой части спектра при малых толщинах упругого слоя. Наличие жидкости приводит к увеличению числа мод, распространяющихся в гидроупругой системе. При этом возникающие моды имеют нулевые частоты заклипания. С ростом толщины упругого слоя \bar{h}_2 скорость первой моды стремится к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,7691$) снизу. Скорость второй моды стремится к скорости волны Рэлея

\bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,9336$) сверху. Фазовые скорости всех последующих мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s . При этом с увеличением толщины в них преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, т.е. движения в модах высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализуются в его толще [1].

Из графиков рис. 3 – 6 следует, что квазиповерхностная мода 1 (волна типа Стоунли) при выбранных механических параметрах системы $\bar{a}_0 = 1,1526 > \bar{c}_R = 0,9336$, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется в приповерхностных слоях как упругого тела, так и жидкости. При этом, как видно из графиков, усиление связи между упругим телом и жидкой средой, обусловленное вязкостью жидкости, приводит к уменьшению глубины проникновения квазиповерхностной моды 1 в жидкий слой (рис. 5, 6).

Из графического материала (рис. 7 – 10) следует, что для всех мод существуют упругие слои определенных толщин, при которых моды распространяются как с наименьшим, так и с наибольшим затуханием. С ростом толщины упругого слоя для квазилэмбовских мод характерно уменьшение их величин коэффициентов затухания.

Из графиков, приведенных на рис. 11 – 13, следует, что для всех мод существуют упругие слои определенных толщин, при которых влияние вязкости жидкости на фазовые скорости мод является минимальным и небольшим. Вместе с тем в случае толстого жидкого слоя ($\bar{h}_1 = 20$) для ряда мод существуют упругие слои определенных толщин, при которых влияние вязкости жидкости на фазовые скорости этих мод значительно.

Таким образом, анализ числовых результатов показывает, что в гидроупругом волноводе жидкость для ряда квазилэмбовских мод вызывает изменение критических частот, смещение дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра, изменение их конфигурации, а также появление новых мод. Это приводит к тому, что в окрестности толщин упругого слоя, при которых происходит зарождение мод, влияние жидкости на величины фазовых скоростей этих мод становится значительным.

Влияние вязкости жидкости связано с ее взаимодействием со смещениями, возникающими в упруго-жидкостной системе при распространении волновых возмущений. В тех точках мод, где преобладающими являются сдвиговые смещения на границе раздела сред, влияние вязкости наибольшее и величины коэффициентов затухания, а также относительные изменения величин фазовых скоростей, принимают максимальные значения. В точках волны с малыми поверхностными поперечными смещениями, соответственно, и влияние вязкости наименьшее. Как указано выше, с увеличением толщины упругого слоя во всех модах (кроме первой) преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, т.е. движения в модах высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализуются в его толще. Следствием этого является уменьшение влияния вязкой жидкости на величины фазовых скоростей мод в коротковолновой части спектра.

Как известно в [2], фазовая скорость и структура волны Стоунли при взаимодействии твердого и жидкого полупространств зависят от механических параметров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью звука в жидком и скоростью волны Рэлея в твердом полупространствах. В работе [2] показано, что это соотношение определяет свойства локализации волны Стоунли. К волновому процессу в системе «слой жидкости – упругий слой» этот критерий также может быть применен, поскольку низшая квазиповерхностная мода 1 является волной типа Стоунли и предельное значение ее скорости с увеличением толщины стремится к скорости волны Стоунли. Отличие состоит лишь в том, что в этой гидроупругой системе сравниваются скорости звуковой волны в жидком слое со скоростью квазирэлеевской волны, распространяющейся вдоль свободной поверхности упругого слоя. В рассматриваемом волноводе, состоящем из упругого слоя и слоя вязкой жидкости, как уже отмечалось ранее, механические параметры гидроупругой системы таковы, что скорость

распространения волны звука в жидкости больше скорости квазирэлеевской волны 2 ($\bar{a}_0 > \bar{c}_R$). Как видно из рис. 5, 6, это приводит к тому, что в коротковолновой части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 (волна типа Стоунли) в упругое тело больше глубины проникновения в жидкость. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется, преимущественно, в приповерхностной области упругого слоя. Квазирэлеевская мода 2 распространяется в упругом слое вдоль его свободной границы. Все остальные моды высокого порядка распространяются в упругом слое в его толще.

Заключение.

Таким образом, анализ показывает, что в упруго-жидкостной системе, состоящей из упругого слоя и слоя вязкой жидкости, при $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$ низшие моды частично проникают в твердое тело и так же, как и моды более высокого порядка, распространяются в упругом слое. Жесткие граничные условия, обусловленные вязкостью жидкости, способствуют уменьшению глубины проникновения низшей квазилэмбовской моды в жидкость. Это приводит к тому, что упругий слой становится определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

Полученные результаты позволяют устанавливать для волновых процессов пределы применимости модели идеальной жидкости.

РЕЗЮМЕ. На основі тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для в'язкої рідини та лінійних рівнянь класичної теорії пружності для пружного шару побудовано дисперсійні криві та досліджено поширення квазілэмбовських хвиль у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив в'язкості рідини, товщини пружного та рідкого шарів на фазові швидкості та коефіцієнти згасання квазілэмбовських мод у випадку товстого шару рідини. Показано, що у випадку товстого рідкого шару для всіх мод існують пружні шари певної товщини, при яких вплив в'язкості рідини на фазові швидкості та коефіцієнти згасання мод є мінімальним. Виявлено також, що для ряду мод існують як певні товщини, так й інтервали товщин, при яких вплив в'язкості рідини на фазові швидкості та коефіцієнти згасання цих мод значний. Показано, що в'язкість рідини сприяє зменшенню глибини проникнення нижчої квазілэмбовської моди в рідину. Розвинутий підхід та отримані результати дозволяють для хвильових процесів встановити межі застосування моделі ідеальної стисливої рідини. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Волькенштейн М.М., Левин В.М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журнал. – 1988. – **34**, № 4. – С. 608 – 615.
3. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в двух томах. Т.1. Общие вопросы – К.: Наук. думка, 1986. – 374 с.
4. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в двух томах. Т.2. Закономерности распространения. – К.: Наук. думка, 1986. – 536 с.
5. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – К.: А.С.К., 1998. – 350 с.
6. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
7. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в двух частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
8. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в двух частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
9. *Гузь А.Н.* Ведение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.
10. *Bagno A.M.* Wave Propagation in an Elastic Layer Interacting with a Viscous Liquid Layer // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 2. – P. 133 – 139.
11. *Bagno A.M., Guz A.N.* Elastic Waves in Pre-stressed Bodies Interacting with a Fluid (survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 6. – P. 435 – 463.

12. *Bagno A.M., Guz A.N.* Effect of Prestresses on the Dispersion of Waves in a System Consisting of a Viscous Liquid Layer and Compressible Elastic Layer // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 4. – P. 333 – 341.
13. *Drinkwater B.W., Wilcox P.D.* Ultrasonic arrays for non-destructive evaluation: A review // *NDT & E International.* – 2006. – **39**, N 7. – P. 525 – 541.
14. *Gibson A., Popovics J.* Lamb wave basis for impact-echo method analysis // *J. of Engineering Mechanics.* – 2005. – **131**, N 4. – P. 438 – 443.
15. *Guz A. N.* Aerohydroelasticity Problems for Bodies with Initial Stresses // *Int. Appl. Mech.* – 1980. – **16**, N 3. – P. 175 – 190.
16. *Guz A.N.* Compressible, Viscous Fluid Dynamics (review). Part I // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 1. – P. 14 – 39.
17. *Guz A.N.* The Dynamics of a Compressible Viscous Liquid (review). Part II // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 3. – P. 281 – 302.
18. *Guz A.N.* Dynamics of compressible viscous fluid. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
19. *Guz A.N.* On the foundations of the ultrasonic non-destructive determination of stresses in near-the-surface layers of materials. Review // *J. Phys. Science and Application.* – 2011. – **1**, N 1, June. – P. 1 – 15.
20. *Guz A. N.* Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 3. – P. 231 – 252.
21. *Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M.* Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 5. – P. 449 – 507.
22. *Jhang K.Y.* Nonlinear ultrasonic techniques for nondestructive assessment of micro damage in material: a review // *Int. J. of Precision Engineering and Manufacturing.* – 2009. – **10**, N 1. – P. 123 – 135.
23. *Kessler S.S., Spearing S.M., Soutis C.* Damage detection in composite materials using Lamb wave methods // *Smart Materials and Structures.* – 2002. – **11**, N 2. – P. 269 – 279.
24. *Kobayashi M., Tang S., Miura S., Iwabuchi K., Oomori S., Fujiki H.* Ultrasonic nondestructive material evaluation method and study on texture and cross slip effects under simple and pure shear states // *Int. J. of Plasticity.* – 2003. – **19**, N 6. – P. 771 – 804.
25. *Leonard K.R., Malyarenko E.V., Hinders M.K.* Ultrasonic Lamb wave tomography // *Inverse Problems.* – 2002. – **18**, N 6. – P. 1795 – 1808.
26. *Liu L., Ju Y.* A high-efficiency nondestructive method for remote detection and quantitative evaluation of pipe wall thinning using microwaves // *NDT & E International.* – 2011. – **44**, N 1. – P. 106 – 110.
27. *Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W.* Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // *Int. J. Non-Lin. Mech.* – 2007. – **42**, N 2. – P. 310 – 320.
28. *Ramadas C., Balasubramaniam K., Joshi M., Krishnamurthy C. V.* Interaction of the primary anti-symmetric Lamb mode (Ao) with symmetric delaminations: numerical and experimental studies // *Smart Materials and Structures.* – 2009. – **18**, N 8. – P. 1 – 7.
29. *Rossini N.S., Dassisti M., Benyounis K.Y., Olabi A.G.* Methods of measuring residual stresses in components // *Materials & Design.* – 2012. – **35**, March. – P. 572 – 588.
30. *Spies M.* Analytical methods for modeling of ultrasonic nondestructive testing of anisotropic media // *Ultrasonics.* – 2004. – **42**, N 1 – 9. – P. 213 – 219.

Поступила 11.01.2016

Утверждена в печать 14.03.2017