

В.Б.Ларин¹, А.А.Тунник²

О ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОМ

¹Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,

ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua

²НАУ, проспект Комарова, 1, Киев, Украина; e-mail: aatunik@hotmail.com

Abstract. An algorithm of synthesis of quadrocopter control is given. Two variants of control of the apparatus horizontal motion are considered. In the first case, the final location is given and in the second case the cruise speed is given. On examples, a comparison with results of other authors is carried out.

Key words: quadrocopter, optimal control, linear control.

Введение.

Среди различных задач устойчивости [6] и управления движением летательных аппаратов [4, 5] актуальной является задача управления движением квадрокоптера [2, 3, 8]. Ниже, применительно к динамической модели квадрокоптера [2, 3], показано, что линейные регуляторы (при использовании соответствующих процедур оптимизации) могут эффективно конкурировать с нелинейными [7]. Далее рассмотрена задача синтеза системы управления таким аппаратом, когда заданной является не конечная точка, а крейсерская скорость горизонтального движения аппарата. Отмечаются особенности [1] такой постановки задачи. Изложение иллюстрируется примерами.

§1. Уравнение движения.

Схема квадрокоптера приведена на рис. 1 [2, Fig.3]).

Пусть $\xi = [x \ y \ z]^T$ – радиус-вектор центра квадрокоптера; ψ, θ, φ – углы рыскания, тангажа и крена, соответственно; f_i – подъемная сила i -го двигателя M_i ($i = \overline{1, 4}$). Штрих здесь и далее обозначает транспонирование. Согласно [3] уравнения движения такой системы имеют вид:

$$m\ddot{x} = -u \sin \theta; \quad (1.1)$$

$$m\ddot{y} = u \cos \theta \sin \varphi; \quad (1.2)$$

$$m\ddot{z} = u \cos \theta \cos \varphi - mg; \quad (1.3)$$

$$\dot{\psi} = \tilde{\tau}_\psi; \quad (1.4)$$

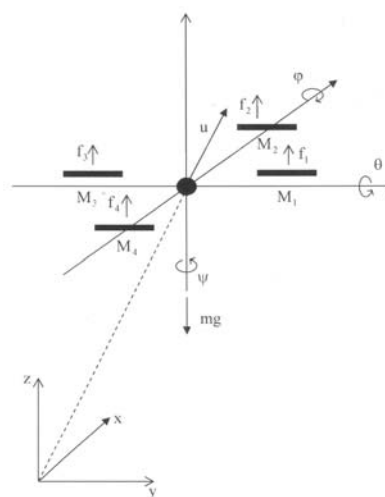


Рис. 1

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta; \quad (1.5)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi. \quad (1.6)$$

В уравнениях (1.1) – (1.6) принято: m – масса аппарата; $g = 9,8$ м/с – ускорение силы тяжести; u , $\tilde{\tau}_\psi$, $\tilde{\tau}_\theta$, $\tilde{\tau}_\phi$ – управляющие воздействия, которые являются функциями f_1 . В [3] воздействие u используется для управления высотой положения аппарата, управление $\tilde{\tau}_\psi$ позволяет стабилизировать угол рыскания. Воздействия $\tilde{\tau}_\theta$ и $\tilde{\tau}_\phi$ используются для управления углами θ , ϕ , и перемещением аппарата по осям x и y , соответственно.

§2. Управление высотой полета и углом рыскания.

Согласно [3], управление высотой полета аппарата определяется следующим соотношением (предполагается, что $\cos \theta \cos \phi \neq 0$):

$$u = (r_1 + mg) \frac{1}{\cos \theta \cos \phi}. \quad (2.1)$$

В (2.1) принято обозначение

$$r_1 = -a_{z_1} \dot{z} - a_{z_2} (z - z_d), \quad (2.2)$$

а в (2.2) a_{z_1} , a_{z_2} – положительные константы; z_d является заданной высотой полета.

Аналогичным является алгоритм управления углом рыскания.

$$\tilde{\tau}_\psi = -a_{\psi_1} \dot{\psi} - a_{\psi_2} (\psi - \psi_d). \quad (2.3)$$

Предполагая, что $\cos \theta \cos \phi \neq 0$, имеем такие равенства:

$$m\ddot{x} = -(r_1 + mg) \frac{\tan \theta}{\cos \phi}; \quad (2.4)$$

$$m\ddot{y} = (r_1 + mg) \tan \phi; \quad (2.5)$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} (a_{z_1} \dot{z} - a_{z_2} (z - z_d)); \quad (2.6)$$

$$\dot{\psi} = -a_{\psi_1} \dot{\psi} - a_{\psi_2} (\psi - \psi_d). \quad (2.7)$$

В (2.6), (2.7) коэффициенты a_{ψ_1} , a_{ψ_2} , a_{z_1} , a_{z_2} должны быть выбраны из условия асимптотической устойчивости этих систем, что, в свою очередь, обеспечит выполнение условия $\psi \rightarrow \psi_d$, $z \rightarrow z_d$.

§3. Управление координатами (ϕ, y) , (θ, x) [3].

В [3] отмечается, что при достаточной величине времени T можно, соотношения (2.4), (2.5) заменить следующими:

$$\ddot{x} = -g \frac{\tan \theta}{\cos \phi}; \quad (3.1)$$

$$\ddot{y} = g \tan \phi. \quad (3.2)$$

Предполагая θ , ϕ малыми и приняв во внимание уравнения (1.5), (1.6) в [3] приведены следующие соотношения, определяющие изменения этих координат:

$$\ddot{y} = g \varphi ; \quad (3.3)$$

$$\ddot{\varphi} = \tilde{\tau}_\varphi ; \quad (3.4)$$

$$\ddot{x} = -g \theta ; \quad (3.5)$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta . \quad (3.6)$$

В [2, 3] применяем следующий нелинейный алгоритм [7] стабилизации координат x, y :

$$\tilde{\tau}_\varphi = -\sigma_{\varphi_1} \left(\dot{\varphi} + \sigma_{\varphi_2} \left(\varphi + \dot{\varphi} + \sigma_{\varphi_3} \left(2\varphi + \dot{\varphi} + \frac{\dot{y}}{g} + \sigma_{\varphi_4} \left(\dot{\varphi} + 3\varphi + 3\frac{\dot{y}}{g} + \frac{y}{g} \right) \right) \right) \right) ; \quad (3.7)$$

$$\tilde{\tau}_\theta = -\sigma_{\theta_1} \left(\dot{\theta} + \sigma_{\theta_2} \left(\theta + \dot{\theta} + \sigma_{\theta_3} \left(2\theta + \dot{\theta} + \frac{\dot{x}}{g} + \sigma_{\theta_4} \left(\dot{\theta} + 3\theta + 3\frac{\dot{x}}{g} + \frac{x}{g} \right) \right) \right) \right) . \quad (3.8)$$

В этих соотношениях согласно [3] принято:

$$\sigma_a(s) = \begin{cases} -a, & s < -a; \\ s, & -a \leq s \leq a; \\ a, & s > a. \end{cases}$$

§4. Сравнение линейных и нелинейных алгоритмов стабилизации.

В [3] на примерах проведено сравнение линейных и нелинейных алгоритмов стабилизации аппарата. Так, в качестве примера рассмотрена система (3.3), (3.4), которую можно представить в следующем виде:

$$\dot{p} = Ap + Bu ; \quad (4.1)$$

$$p = [y, \dot{y}, \varphi, \dot{\varphi}] ;$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = [0 \ 0 \ 0 \ 1]' ; \quad u = \tilde{\tau}_\varphi .$$

Для системы (4.1) авторы [3] синтезируют оптимальный линейный регулятор в соответствии со следующим критерием качества:

$$J = \int_0^{\infty} (p'Qp + u'Ru) dt . \quad (4.2)$$

где согласно [4] приняты такие обозначения:

$$R = 1, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 6 \\ -2 & 4 & 8 & -12 \\ -4 & 8 & 16 & -24 \\ 6 & -12 & -24 & 36 \end{bmatrix} .$$

Соответствующие этим исходным данным, значения коэффициентов регулятора (K) и корни замкнутой системы ($A - BK$) имеют следующий вид:

$$K = [1 \quad 3,2848 \quad 29,3030 \quad 9,7266], -5,2393, -2,3946, -1,6056, -0,4870.$$

В [3] отмечено, что линейная система (3.3), (3.4) или (4.1) с этим регулятором при начальных условиях $\dot{y}(0) = 0$, $y(0) = 70$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$ быстро возвращается в состояние равновесия (см. [3, Fig.2]). Однако, в случае нелинейной системы (3.2), (3.4) данный регулятор не обеспечивает устойчивость замкнутой системы (см. [3, Fig. 3]).

Использование же нелинейного регулятора (3.7) позволяет стабилизировать нелинейную систему при следующих начальных отклонениях: $\dot{y}(0) = 0$, $y(0) = 200$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $\varphi(0) = 40^\circ$ (см. [3, Fig 5]).

Однако, сравнивая линейный и нелинейный регуляторы можно отметить, что, согласно [3, Fig. 2, (c)] график $\varphi(t)$ во время переходного процесса два раза пересекает значение $-\pi/2$, т.е. нарушается принятое ранее авторами предположение, что $\cos\varphi \cos\theta \neq 0$.

§5. Оптимизация системы управления.

Выше отмечалось, что принятый в [3] выбор матриц R , Q в критерии (4.2) трудно назвать оптимальным. В частности, линейный регулятор, полученный при таком выборе матриц R , Q , приводит, как уже отмечалось, к нарушению условия $\cos\varphi \cos\theta \neq 0$ во время переходного процесса. В этой связи целесообразно изменить весовые матрицы R и Q с целью оптимизации переходных процессов в системе.

Отметим, что синтезируя регулятор в соответствии с (4.2), целесообразно уменьшить, во время переходного процесса, величину фазовых координат φ , $\dot{\varphi}$ и управления $\bar{\tau}_\varphi$. Руководствуясь этими соображениями, можно выбрать следующие значения для матриц R , Q :

$$R = 10^4; \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 6 \\ -2 & 4 & 8 & -12 \\ -4 & 8 & 16 \cdot 10^4 & -24 \\ 6 & -12 & -24 & 36 \cdot 10^4 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Оптимизируя (4.1) при значениях R , Q (5.1) получим следующие значения коэффициентов регулятора (K) и корни замкнутой системы ($A - BK$):

$$K = [0,01 \quad 0,1083 \quad 5,5123 \quad 6,8574]; -5,9623, -0,6702, -0,1125 \pm 0,1090i. \quad (5.2)$$

Эффективность такой процедуры оценим на примере [3]. Начальные условия следующие: $y(0) = 200$ м, $\dot{y}(0) = 0$, $\varphi(0) = 40^\circ$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. Результаты моделирования приведены на рис. 2 – 5.

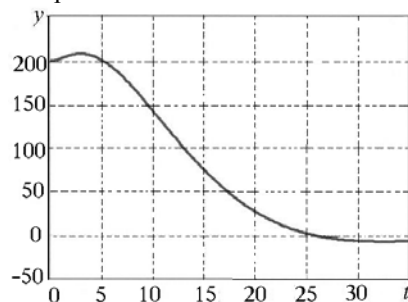


Рис. 2

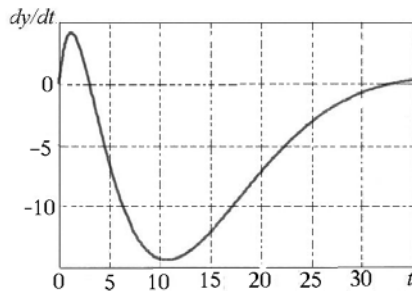


Рис. 3

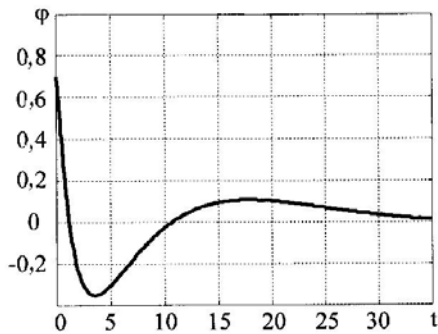


Рис. 4

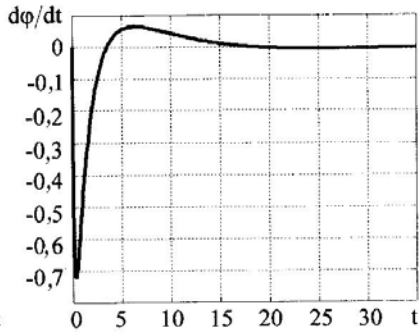


Рис. 5

Сравнивая эти графики с результатами, приведенными в [3, Fig. 5], можно констатировать определенное преимущество рассматриваемого регулятора. Так, например, на Fig. 5, a график координаты $y(t)$ существенно отличается от 0 на интервале времени 0–125 с. В то же время, в данном случае (рис. 2) этот интервал составляет 0–25 с.

Далее сравнивая Fig. 5, в и рис. 3 можно отметить следующее. Если на Fig. 5, в график $\dot{y}(t)$ в течении малого промежутка времени изменяется практически от нуля до 200 м/с, то соответствующий график $\dot{y}(t)$ на рис. 3 более плавный (нет значительных линейных ускорений) и максимальная абсолютная величина $\dot{y}(t)$ равна 15 м/с. Отметим, что, если регулятор (5.2) использовать для управления нелинейной системой (3.2), (3.4), то результаты моделирования, представленные на рис. 2 – 5, изменятся незначительно.

Этот вывод следует из результатов, представленных в таблице.

N	y	dy/dt	φ	$d\varphi/dt$
1	208,3	14,47	0,7	0,72
2	4,59	0,59	0,018	0,048

В первой строке ($N = 1$) таблицы приведены максимальные абсолютные значения координат, изменения которых показаны на рис. 2 – 5. Во второй строке ($N = 2$) приведены максимальные значения абсолютных величин разности между результатами моделирования систем (3.3), (3.4), (5.2) и систем (3.2), (3.4), (5.2).

Таким образом, можно констатировать, что в рассматриваемых задачах эффективность линейного регулятора может не уступать нелинейному [7].

В свою очередь, это позволяет использовать линейные регуляторы (при соответствующей оптимизации) и в других аналогичных задачах управления такими объектами.

§6. Управление скоростью полета.

Продолжим рассмотрение задачи управления движением по оси y . Однако, будем предполагать, что заданной является не конечная точка (y_d), а система управления должна обеспечить движение аппарата вдоль оси y с заданной скоростью \dot{y}_d .

Сформулируем соответствующую оптимизационную задачу. Принимаем, что движение объекта описывается уравнением (5.1). Для оптимизации переходных процессов необходимо уменьшить величину $\varphi(t)$ и управляющий момент $\tilde{\tau}_\varphi(t)$. Так как координата y не минимизируется, она не должна фигурировать в критерии (5.2). Руководствуясь этими соображениями, матрицу Q в (5.2) выбираем в следующем виде:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Выбором величины R и величины c в (6.1) можно ограничить упомянутые выше величины $\varphi(t)$ и $\tilde{\tau}_\varphi(t)$.

Следует отметить, что при таком выборе матрицы Q гамильтонова матрица вариационной задачи, определяемой (4.1), (4.2) будет вырожденной. Это может создать определенные трудности при определении коэффициентов регулятора. Так, например, при такой постановке задачи невозможно использовать стандартную процедуру `are.m` пакета MATLAB. Поэтому в этой задаче для определения коэффициентов регулятора целесообразно использовать подход, описанный в [1, п.1.4].

Итак, пусть существует ортогональная матрица U , приводящая матрицы A, Q к следующему виду.

$$\bar{A} = UAU' = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{Q} = UQU' = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В данном случае матрицу U можно выбрать в виде:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения Риккати $SA + A'S - SBR^{-1}B'S + Q = 0$, которое соответствует вариационной задаче, определяемой (4.1), (4.2), следует искать в виде

$$S = U' \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U. \quad (6.2)$$

В (6.2) матрица S_1 удовлетворяет следующему уравнению Риккати:

$$S_1 A_1 + A_1' S_1 - S_1 b_1 S_1 + Q = 0, \quad (6.3)$$

$$UBR^{-1}B'U' = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Далее, получив решение (6.3) и используя соотношение (6.2), коэффициенты регулятора можно определить следующим образом:

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] = R^{-1}B'S. \quad (6.4)$$

Особенность структуры матрицы U приводит к тому, что матрица S , определяемая (6.2), имеет следующую структуру:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, первый коэффициент уравнения регулятора (6.4) будет равен нулю.

Таким образом, уравнение регулятора в данной задаче имеет вид

$$\bar{\tau}_\varphi = -k_2(\dot{y} - \dot{y}_d) - k_3\varphi - k_4\dot{\varphi}. \quad (6.5)$$

Отметим, что аналогичный алгоритм управления можно получить и применительно к задаче движения аппарата вдоль оси x .

Пример. Проиллюстрируем алгоритм синтеза регулятора (6.5). Принимаем, что $R = 10$, в (6.1) $c = 10^2$. Для этих исходных данных получены следующие выражения для матрицы S и коэффициентов регулятора K :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,1027 & 11,4597 & 3,623 \\ 0 & 11,4597 & 205,1464 & 65,1621 \\ 0 & 3,1623 & 65,1621 & 36,2387 \end{bmatrix}, \quad K = [0 \quad 0,3162 \quad 6,5162 \quad 3,6239].$$

Корни замкнутой системы $(A - BK)$: $0; -0,69; -1,4670 \pm 1,5297i$.

Переходный процесс (графики координат $\dot{y}(t)$ и $\varphi(t)$ в системе при нулевых начальных условиях и $\dot{y}_d = 1$ м/с) приведен на рис. 6 (сплошная линия соответствует $\dot{y}(t)$, штриховая – $10\varphi(t)$).

Как видно из этого рисунка, максимальная величина $\varphi(t)$ достаточно мала ($\cong 4 \cdot 10^{-2}$).

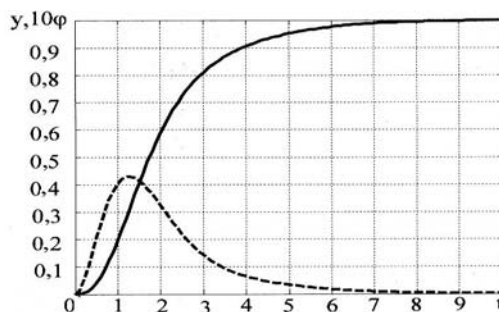


Рис. 6

Заключение.

Приведен алгоритм синтеза управления квадрокоптером. Рассмотрены два варианта управления горизонтальным движением аппарата. В первом случае задается конечная точка, во втором, задается крейсерская скорость. На примере приведено сравнение полученных данных с результатами [3].

РЕЗЮМЕ. Наведено алгоритм синтезу управління квадрокоптером. Розглянуто два варіанти управління горизонтальним рухом апарату. У першому випадку задється кінцеве положення, а в другому – крейсерська швидкість. На прикладах проведено порівняння з результатами інших авторів.

1. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of Linear Control Systems. – Gordon & Breach Sci. Publ., 1998. – 261 p.
2. Castillo P., Lozano R., Dzul A. Real-time Stabilization and Tracking of a Four-rotor Mini Rotorcraft // IEEE Trans. on Control Syst. Techn. – 2004. – **12**, N 4. – P. 510 – 516.
3. Castillo P., Lozano R., Dzul A. Stabilization of a Mini Rotorcraft with Four Rotors // IEEE Control Systems Magazine. December. – 2005. – P. 45 – 55.
4. Khoroshun A.S. On Stability of Horizontal Motion of an Airplane // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 1. – P. 134 – 144.
5. Larin V.B., Tunik A.A. On Improving the Quality of Tracking the Program Trajectory by Aircraft // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 5. – P. 137 – 144.
6. Martynyk A.A. Elements of a Theory of Stability of Motion for Hybrid Systems (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 3. – P. 3 – 66.
7. Teel A.R. Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls // Systems and Control Lett. – 1992. – **18**, N 3. – P.165 – 171.
8. Wahyudie A., Susilo T.B., Noura H. Robust PID Controller for Quad-rotors // J. of Unmanned System Technology. – 2013. – **1**. – P.14 – 19.

Поступила 25.04.2016

Утверждена в печать 29.11.2016