

В. Д. Буда¹, А. Я. Григоренко²,
М. Ю. Борисенко¹, Е. В. Бойчук¹

ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

¹Николаевский национальный университет им. В.А. Сухомлинского,
ул. Никольская, 24, 54000, Николаев, Украина; e-mail: maxborisenko530@mail.ru

²Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ayagrigorenko@yandex.ua

Abstract. The dynamic characteristics of thin isotropic cylindrical variable thickness shells are determined based on numerical and experimental approaches. Numerical calculations of frequencies and forms of free vibrations are carried out using finite element method, which is implemented with the help of the licensed FEMAP software. Experimental research is carried out with a contactless method of strobogolografic interferometry, which allows to observe interference patterns shell surface vibrations in real time. Comparative analysis of the results is carried out using two different methods.

Key words: natural frequencies and modes, variable thickness shell, finite element method, strobogolografic interferometry method.

Введение.

Во многих случаях цилиндрические оболочечные конструкции в зависимости от их функционального назначения и условий эксплуатации имеют некруговой контур поперечного сечения, переменную толщину и другие особенности. Примерами таких конструкции являются корпуса надводных и подводных кораблей, летательных и космических аппаратов, а также другие объекты инженерной практики. При исследовании прочности и устойчивости таких оболочечных сооружений необходимо иметь информацию о распределении их динамических характеристик, в частности, о распределении частот и форм свободных колебаний.

В современной научной литературе широко представлены результаты теоретических [2, 3, 6, 8, 10 – 12, 15, 16, 17 – 25] и экспериментальных [4, 5, 7 – 9, 13, 14] исследований динамики круговых цилиндрических оболочек. Однако, проблема колебаний цилиндрических оболочек некругового поперечного сечения изучена недостаточно полно. Еще меньше изучены собственные колебания оболочек указанного класса с переменной толщиной. Проблема изучения колебаний таких оболочек связана со значительными математическими трудностями, вызванными интегрированием дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые появляются вследствие перемены толщины поперечного сечения. Для решения данной проблемы широко используются системы автоматизированного конструирования (computer-aided engineering – CAE), которые дают возможность проводить расчет конструкции произвольной формы, используя метод конечных элементов (МКЭ). Также CAE-системы дают возможность пользователю возможность оценить поведение компьютерной модели оболочечных элементов конструкции в реальных условиях эксплуатации, дать оценку ее несущей способности без значительных затрат времени и финансов. Одной из таких систем является пре- и постпроцессор для выполнения инженерного анализа методом конечных элементов – Femap с решателем NX Nastran. При

этом необходимо помнить, что основной проверкой результатов любого расчета остается только физический эксперимент.

1. Основные соотношения метода конечных элементов.

Динамические уравнения для МКЭ можно получить, если рассмотреть уравнения движения механической системы с конечным числом степеней свободы, которая описывается системой уравнений Лагранжа II рода в дискретной форме, что для оболочки при ее конечно-элементной аппроксимации при условии отсутствия диссипации энергии и демпфирования приобретает вид

$$[M]\{\ddot{\lambda}\} + [K]\{\lambda\} = \{0\}. \quad (1)$$

Решение уравнения (1) представим в виде

$$\{\lambda\} = \{A\} \cos(\omega t + \beta), \quad (2)$$

где $\{A\}$ – вектор амплитудных значений узловых перемещений, которые определяют форму собственных колебаний; ω – круговая частота; β – фаза колебаний. После подстановки (2) в (1) и сокращения на $\cos(\omega t + \beta)$, получим систему алгебраических уравнений:

$$(-\omega^2 [M] + [K])\{A\} = \{0\}. \quad (3)$$

В этой системе ненулевые значения компонентов $\{A\}$ возможны только при условии

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0. \quad (4)$$

Если квадратные матрицы $[M]$ и $[K]$ – положительно определены, то характеристические уравнения (4) имеют N положительных решений – собственных частот ω_k , при этом возможны парные значения (N – количество неизвестных в системе алгебраических уравнений (3)).

N значений собственных частот ω_k позволяет решение системы (3) представить в виде линейной комбинации из N выражений (2):

$$\{\lambda\} = \sum_{k=1}^N \{A_k\} \cos(\omega_k t + \beta_k). \quad (5)$$

Для решения характеристического уравнения рационально использовать, как основной, метод Ланцоша (Lanczos), что позволит затратить меньше ресурсов в сравнении с остальными методами.

2. Результаты численных расчетов.

Рассмотрены консольно закрепленные изотропные цилиндрические оболочки некругового поперечного сечения с разным характером изменения толщины. Геометрия оболочек выбрана с учётом сохранения высоты и массы по сравнению с оболочкой постоянной толщины, а физико-механические свойства и разбивка конечными элементами выбрана согласно [13].

Случай перемены толщины по линейному закону вдоль образующей. Толщина оболочки меняется линейно от 1 мм до 3 мм. Рассмотрены два варианта жесткого закрепления:

- 1) по торцу толщиной $d = 1$ мм, второй торец свободный;
- 2) по торцу толщиной $d = 3$ мм, второй торец свободный.

Частоты свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек постоянной и переменной вдоль образующей толщины приведены в табл. 1, а также в виде гистограмм собственных частот оболочек постоянной и переменной вдоль образующей тол-

щины (рис. 1), где при $d = 2$ приведены частоты свободных колебаний для цилиндрической оболочки постоянной толщины [2, 13].

Таблица 1

m	n	$f, \text{Гц}$			m	n	$f, \text{Гц}$		
		$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$			$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
1	4	1471	1712	2104	2	4	5128	6160	6994
1	6	2654	2155	1899	2	6	4242	4488	4841
1	8	4281	3849	2866	2	8	5743	4896	4848
1	10	6135	6131	4161	2	10	8361	7073	6632
1	12	8240	8962	5786	2	12	10807	9748	8786

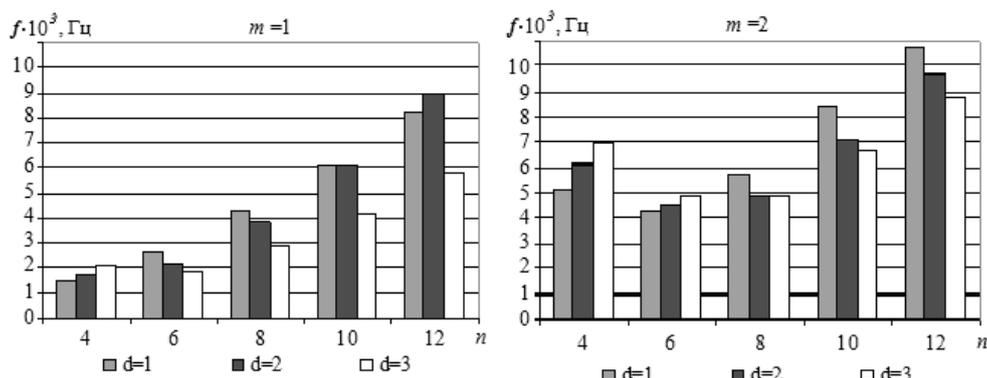


Рис. 1

Сравнение полученных результатов для оболочек постоянной и переменной толщины вдоль образующей по линейному закону позволяет сформулировать следующие выводы:

- 1) порядок образования форм колебаний для рассмотренных оболочек одинаковый;
- 2) частоты оболочки постоянной толщины при всех формах колебаний находятся между частотами оболочек переменной толщины, что дает возможность выводить оболочку из резонансного режима за счет модуляции толщины.

Случай перемены толщины вдоль дуги контура поперечного сечения. Величины толщин вдоль большой и малой полуосей цилиндрических оболочек указаны в табл. 2.

Частоты свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек постоянной и переменной вдоль дуги сечения толщины приведены в табл. 3. Гистограммы собственных частот некруговых цилиндрических оболочек постоянной и переменной вдоль дуги сечения толщины приведены на рис. 2.

Таблица 2

Вид оболочки		$d_a, \text{мм}$	$d_b, \text{мм}$
постоянная толщина	$d_a = d_b$	2	2,00
	$d_a > d_b$	3	1,30
переменная толщина	$d_a < d_b$	1	2,73

Таблица 3

m	n	$f, \text{Гц}$			m	n	$f, \text{Гц}$		
		$d_a < d_b$	$d_a < d_b$	$d_a < d_b$			$d_a < d_b$	$d_a < d_b$	$d_a < d_b$
1	4	1565	1712	1801	1	4	5800	6160	6369
1	6	1992	2155	2119	1	6	4456	4488	4386
1	8	3678	3849	3755	1	8	4817	4896	4733
1	10	5829	6131	5896	1	10	6714	7073	6848
1	12	8493	8962	8610	1	12	9245	9748	9374

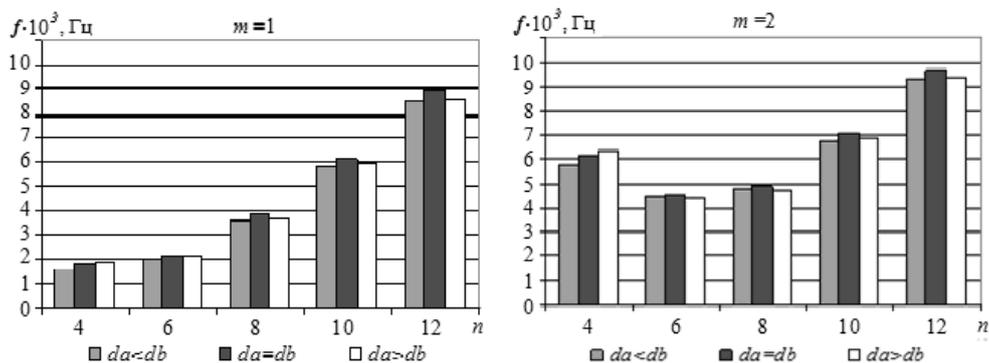


Рис. 2

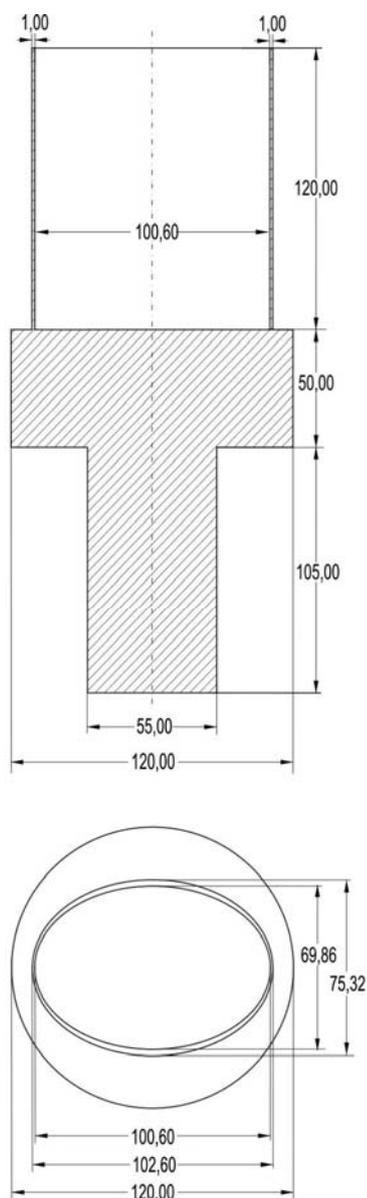


Рис. 3

Сравнение полученных результатов для оболочек переменной толщины с частотами для цилиндрической оболочки постоянной толщины эквивалентной массы дает возможность сделать следующие выводы:

1) для форм колебаний $m=1$, $n=4$ и $m=2$, $n=4$ при увеличении толщины вдоль оси a собственные частоты возрастают и, наоборот, при увеличении толщины вдоль оси b собственные частоты убывают;

2) для других рассмотренных форм частота свободных колебаний оболочки постоянной толщины выше в сравнении с частотами свободных колебаний оболочек переменной толщины, при этом с увеличением числа n разница этих частот увеличивается.

3. Методика проведения эксперимента.

Для экспериментального определения собственных частот и форм колебаний была изготовлена цилиндрическая оболочка некругового поперечного сечения с высоколегированной стали марки 40Х методом точения на станке с ЧПУ. Оболочка имеет такие параметры: высота $h=120$ мм, большая полуось срединной поверхности $a=50,8$ мм, малая полуось срединной поверхности $b=36,295$ мм, толщина вдоль большой полуоси $d_a=1$ мм, толщина вдоль малой полуоси $d_b=2,73$ мм (рис. 3).

Оболочка 1 (рис. 4) фиксировалась через массивное тело 2, которое выточено вместе с нею, в зажимном устройстве 3 на массивной плите голографической установки 4. Таким образом, граничное условие жесткого закрепления одного торца обеспечено, второй торец свободный.

Для определения частот и форм собственных колебаний оболочки использовалась двухлучевая оптическая схема стробоголографической установки (рис. 5) [4].

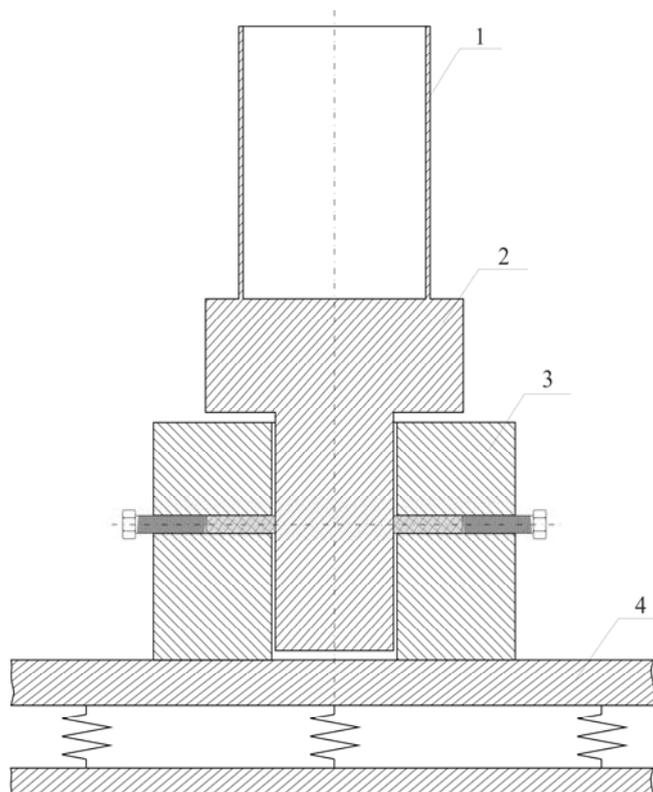


Рис. 4

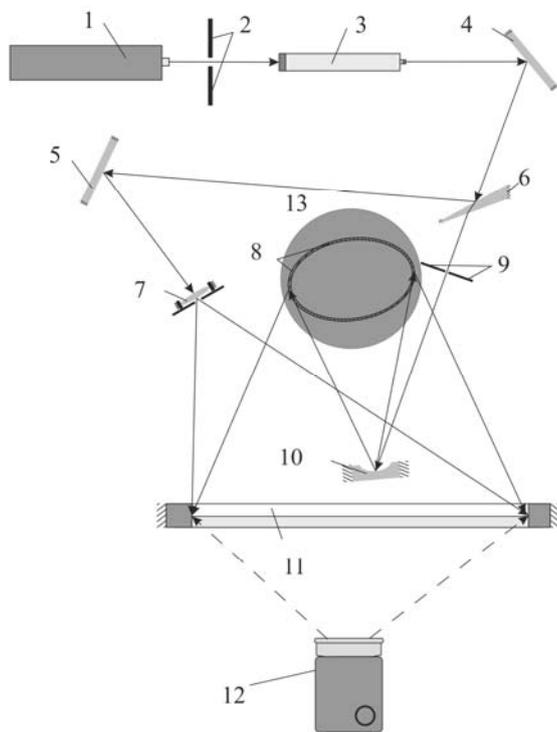


Рис. 5

Оболочка (8) жестко зажималась на массивной плите голографического стенда. В качестве источника когерентного излучения использовался He-Ne лазер ЛГН-222 (1), луч которого, пройдя затворный механизм (2) и электрооптический модулятор МЛ-3 (3), отражается от зеркала (4) и делится на два луча с помощью светоделителя (6). Отраженный от светоделителя луч зеркалом (5) и микрообъективом (7) формирует опорную световую волну, которая освещает фотопластинку (11). Луч, который прошел сквозь светоделитель и диафрагму (9), сферическим зеркалом (10) формирует освещение оболочки. Свет, отразившись от поверхности исследуемого объекта, дает предметную световую волну. Интерференционные картинki разных форм колебаний возбужденной оболочки фиксировались с помощью фотокамеры (12). Для возбуждения колебаний оболочки был разработан и изготовлен пьезокерамический вибратор (13).

Проведение экспериментального исследования состоит из следующих этапов:

1. Подготовка поверхности оболочки для проведения эксперимента.
2. Закрепление исследуемой оболочки в специальном зажимном механизме.
3. Сборка оптической схемы голографической установки.
4. Юстировка оптической схемы.
5. Фиксация на фотопластинке голограммы оболочки.
6. Фотохимическая обработка и сушка фотопластинки.
7. Возбуждение оболочки с помощью звукового генератора через пьезокерамический вибратор.
8. Модуляция луча прямоугольными стробирующими импульсами.
9. Фиксация форм колебаний возбужденной оболочки на соответствующих собственных частотах с помощью цифровой фотокамеры Canon S5 IS.

Более детально метод стробоголографической интерферометрии описан в [8].

4. Результаты экспериментального исследования.

С помощью метода стробоголографической интерферометрии были получены собственные частоты цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения переменной толщины вдоль дуги контура поперечного сечения. Сравнение экспериментально и численно полученных частот свободных колебаний некруговой цилинд-

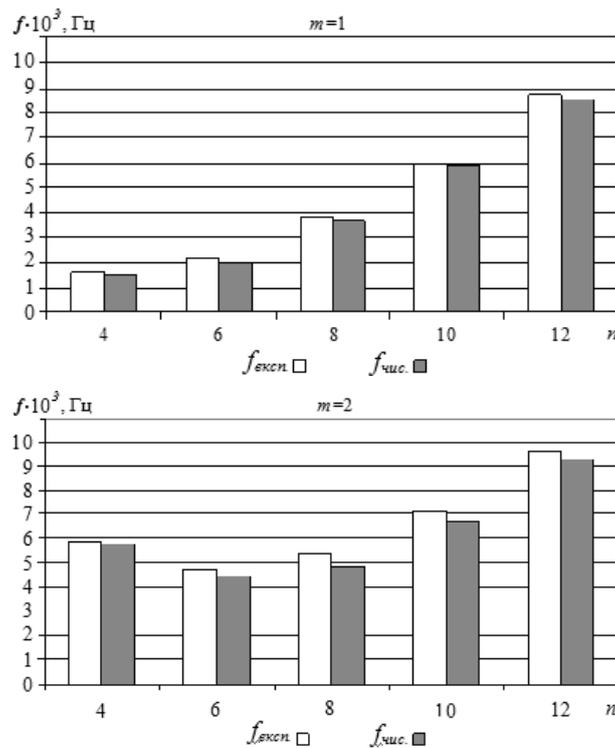


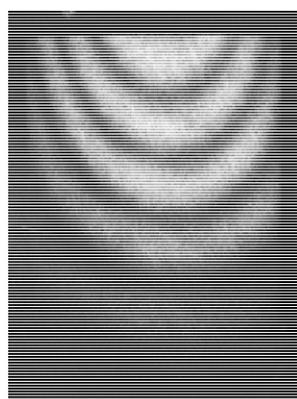
Рис. 6

рической оболочки переменной толщины представлены в табл. 4. Гистограммы сравнения частот с результатами, полученными численно в [1], представлено на рис. 6.

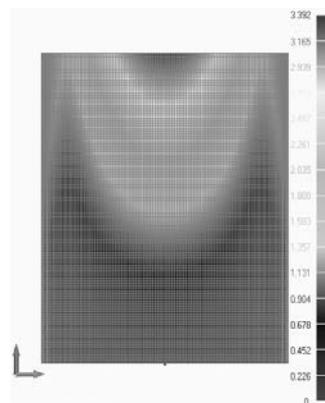
Таблица 4

m	n	$f_{\text{эксп.}}, \text{Гц}$	$f_{\text{чис.}}, \text{Гц}$	$\varepsilon, \%$	m	n	$f_{\text{эксп.}}, \text{Гц}$	$f_{\text{чис.}}, \text{Гц}$	$\varepsilon, \%$
1	4	1631	1565	4,0	2	4	5891	5800	1,5
1	6	2149	1992	7,3	2	6	4678	4456	4,7
1	8	3852	3678	4,5	2	8	5427	5117	5,7
1	10	5980	5829	2,5	2	10	7182	6714	6,5
1	12	8823	8493	3,7	2	12	9590	9245	3,6

Форма колебаний $m = 1, n = 4$, полученная экспериментально и численно, представлена на рис. 7.



$f = 1631 \text{ Гц}$



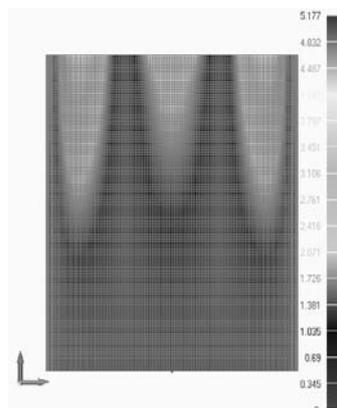
$f = 1565 \text{ Гц}$

Рис. 7

Форма колебаний $m = 1, n = 6$, полученная экспериментально и численно, представлена на рис. 8.



$f = 2149 \text{ Гц}$



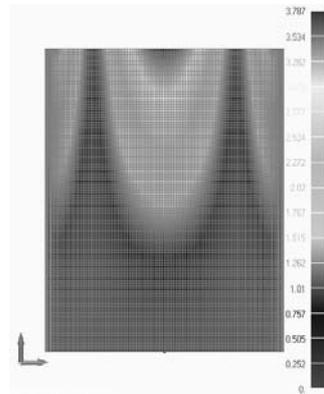
$f = 1992 \text{ Гц}$

Рис. 8

Форма колебаний $m = 1$, $n = 8$, полученная экспериментально и численно, представлена на рис. 9.



$f = 3852$ Гц



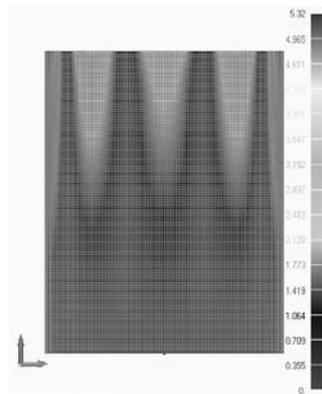
$f = 3678$ Гц

Рис. 9

Форма колебаний $m = 1$, $n = 10$, полученная экспериментально и численно, представлена на рис. 10.



$f = 5980$ Гц



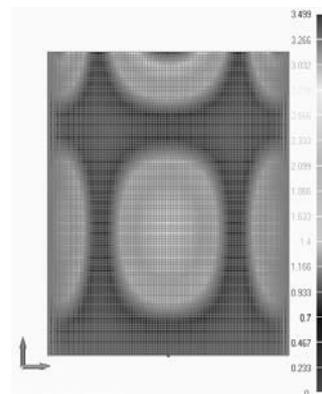
$f = 5829$ Гц

Рис. 10

Форма колебаний $m = 2$, $n = 6$, полученная экспериментально и численно, представлена на рис. 11.



$f = 4678$ Гц



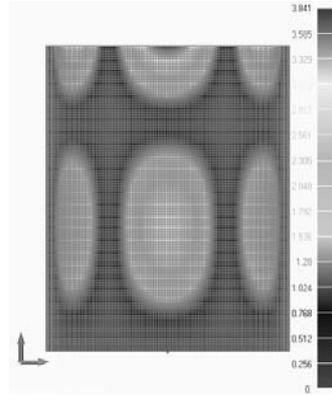
$f = 4456$ Гц

Рис. 11

Форма колебаний $m = 2$, $n = 8$, полученная экспериментально и численно, представлена на рис. 12.



$f = 5427 \text{ Гц}$



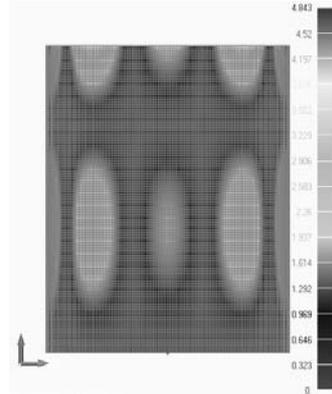
$f = 4817 \text{ Гц}$

Рис. 12

Форма колебаний $m = 2$, $n = 10$, полученная экспериментально и численно, представлена на рис. 13.



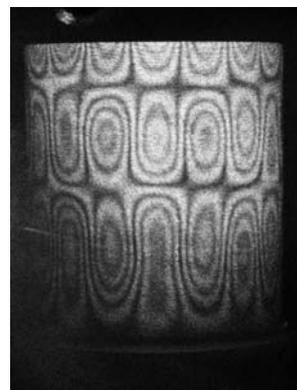
$f = 7182 \text{ Гц}$



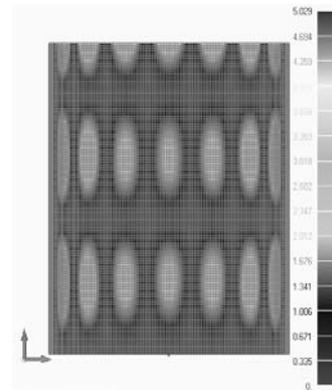
$f = 6714 \text{ Гц}$

Рис. 13

Форма колебаний $m = 3$, $n = 18$, полученная экспериментально и численно, представлена на рис. 14.



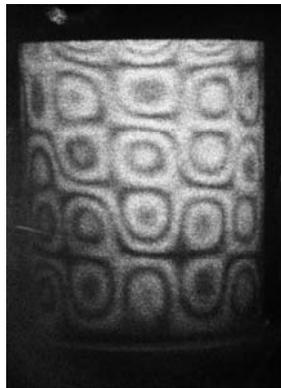
$f = 22592 \text{ Гц}$



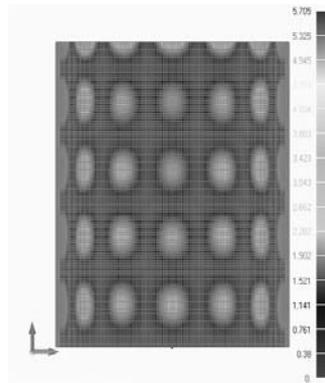
$f = 21153 \text{ Гц}$

Рис. 14

Форма колебаний $m = 5$, $n = 12$, полученная экспериментально и численно, представлена на рис. 15.



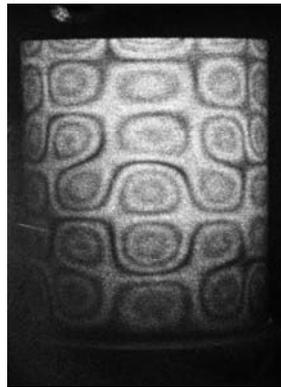
$f = 20334$ Гц



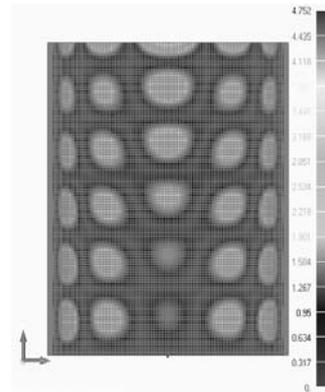
$f = 16793$ Гц

Рис. 15

Форма колебаний $m = 6$, $n = 12$, полученная экспериментально и численно, представлена на рис. 16.



$f = 21816$ Гц



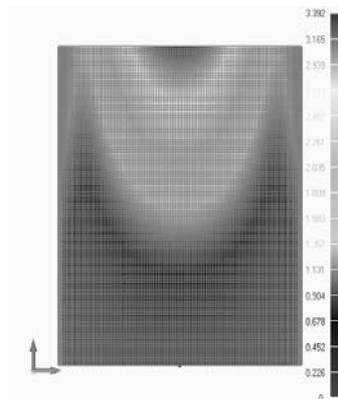
$f = 20464$ Гц

Рис. 16

Численно полученные симметрические и несимметрические формы свободных колебаний подтверждаются экспериментально, что хорошо видно на первой собственной частоте (рис. 17, 18).

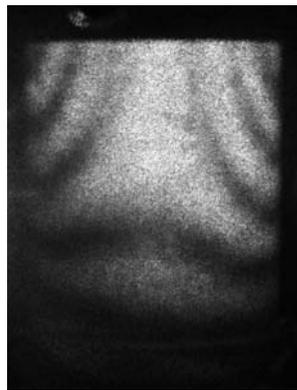


$f = 1631$ Гц

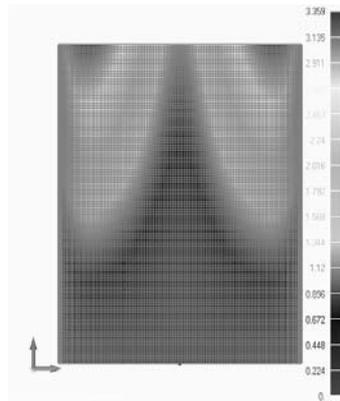


$f = 1565$ Гц

Рис. 17



$f = 1626$ Гц



$f = 1758$ Гц

Рис. 18

Выводы.

Полученные зависимости динамических характеристик от геометрических параметров свободных колебаний цилиндрических оболочек эллиптического поперечного сечения дают возможность управлять спектром частот свободных колебаний оболочечных конструкций для выведения их из резонансного режима за счет модуляции толщины оболочки.

Экспериментально полученные частоты и формы свободных колебаний цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения переменной толщины подтверждают правильность проведенных расчетов методом конечных элементов, а также сформулировать ряд выводов:

- 1) наблюдается малое отклонение между экспериментально определенными частотами и частотами, рассчитанными численно, которое не превышает 7,5%, а для первой частоты 4%;
- 2) экспериментально подтверждается наличие симметрических и несимметрических форм;
- 3) порядок появления форм колебаний при численных расчетах и экспериментальном исследовании одинаковый.

РЕЗЮМЕ. Визначено динамічні характеристики тонкостінних ізотропних циліндричних оболонок з різним характером зміни товщини на основі чисельного та експериментального підходів. Чисельні розрахунки частот і форм вільних коливань проведено методом скінченних елементів, який реалізовано за допомогою ліцензійного програмного комплексу FEMAP. Експериментальне дослідження виконано безконтактним методом стробоголографічної інтерферометрії, який дає можливість спостерігати інтерференційні картини коливань поверхні оболонки в реальному часі. Проведено порівняльний аналіз отриманих результатів вільних коливань відповідних оболонок, отриманих двома різними методами.

1. Будає В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Вільні коливання еліптичної оболонки змінної товщини // Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка, серія: «Математика. Механіка», 2014. – 32, № 2. – С. 32–37.
2. Будає В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Вплив ексцентриситету еліптичної оболонки на розподіл її динамічних характеристик // Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка, серія: «Фіз.-матем. науки», 2015. – Вип.2. – С. 23–28.
3. Будає В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Про вільні коливання циліндричних оболонок кругового та некругового поперечного перерізу при різних граничних умовах // Вісник Запорізького нац. ун-ту, серія фіз.-матем. науки, 2015. – № 2. – С. 20–28.
4. Будає В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Пригода О.П., Бойчук О.В. Визначення власних частот тонкостінної оболонки некругового поперечного перерізу методом стробоголографічної інтерферометрії // Проблеми вычислительной механики и прочности конструкций. – 2015. – № 24. – С. 18–25.

5. Будаk В.Д., Золотой Ю.Г., Овчаренко АВ. Колебания круглой цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью // Зб. наукових праць УДМТУ. – Миколаїв: УДМТУ, 1998. – № 4. – С. 96 – 101.
6. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.
7. Григоренко А.Я., Золотой Ю.Г., Пригода А.П., Жук И.Ю., Хоришко В.В. Экспериментальное исследование собственных колебаний толстостенной цилиндрической оболочки методом голографической интерферометрии // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, № 3. – С. 93 – 98.
8. Каиров А.С., Золотой Ю.Г. Определение виброперемещений и напряжений при колебаниях конструктивно неоднородных оболочек методом голографической интерферометрии // Теорет. и прикл. механика, 1998. – № 28. – С. 112 – 118.
9. Шалабанов А.К. Исследование высокочастотных колебаний цилиндрических оболочек на основе двух методов голографической интерферометрии // Исслед. по теор. пластин и оболочек. – 1979. – № 14. – С. 184 – 190.
10. Arnold R.N., Warburton G.B. The flexural vibration of thin cylinders // Proc. Inst. Mech. Engineers., 1953. – 167 A, N 1. – P. 62 – 80.
11. Baron M.L. Tables for frequencies and modes of free vibration of infinitely long thin cylindrical shells // J. Appl. Mech. – 1954. – 21, N 2. – P. 178 – 188.
12. Беспалова Е.И., Урусова Г.П. Vibrations of Shells of Revolution with Branched Meridian // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 1. – P. 82 – 89.
13. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boychuk E.V. Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method // J. of Mathem. Sci. – 2016. – 212, N 2. – P. 182 – 192.
14. Budak V.D., Grigorenko A. Ya., Khorishko V.V., Borisenko M.Yu. Holographic Interferometry Study of the Free Vibrations of Cylindrical Shells of Constant and Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 1. – P. 68 – 74.
15. Greenspon J.F. Vibration of thick cylindrical shells // J. Acoust. Soc. Amer. – 1959. – 31, N 12. – P. 1682 – 1683.
16. Grigorenko A. Ya., Efimova T.L. Using Spline-Approximation to Solve Problems of Axisymmetric Free Vibration of Thick-Walled Orthotropic Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 10. – P. 1137 – 1147.
17. Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Korotkikh Yu.A. Free Axisymmetric Vibrations of Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 6. – P. 654 – 664.
18. Leissa A.W. Vibration of Shells // NASA SP-288: US Government Printing Office. – Washington DC, 1973. – 438 p.
19. Love A.E.H. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell // Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1888. – N 179. – P. 491 – 546.
20. Markus S. The mechanics of vibrations of cylindrical shells – Elsevier, 1988. – 159 p.
21. Mazch T. [et al.]. Natural modes and frequencies of a thin clamped-free steel cylindrical storage tank partially filled with water: FEM and measurement // J. Sound Vib. – 1996. – 193, N 3. – P. 669 – 690.
22. Pellicano F. Linear and Nonlinear vibration of shells // Proc. of 2nd Int. Conf. on Nonlinear Normal Modes and Localization in Vibration Systems. – Samos, June 19 – 23, 2006. – P. 1 – 12.
23. Stricklin J.A. [et al.]. Nonlinear Dynamic Analysis of Shells of Revolution by Matrix Displacement Method // AIAA J. – 1971. – 9, N 4. – P. 629 – 636.
24. Yu Y.Y. Free vibration of thin cylindrical shells having finite length with freely supported and clamped edges // J. Appl. Mech. – 1955. – 22, N 4. – P. 547 – 552.
25. Zhang L., Xiang Y. Exact solution for vibration of stepped circular cylindrical shells // J. Sound Vibr. – 2007. – 299, N 4 – 5. – P. 547 – 552.

Поступила 23.06.2016

Утверждена в печать 29.11.2016