

В. Н. Юрчук, Я. Я. Рущицкий

**ЧИСЛОВОЙ АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИИ ПЛОСКОЙ ПРОДОЛЬНОЙ  
НЕЛИНЕЙНО УПРУГОЙ ВОЛНЫ С РАЗНЫМИ  
НАЧАЛЬНЫМИ ПРОФИЛЯМИ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The nonlinear plane longitudinal elastic wave of displacement is studied for different forms of initial profile within the framework of the Murnaghan model. The basic novelty consists in that waves are analyzed by the common approximate method and solutions of the nonlinear wave equation can be written in the similar structural form. As a result, a distortion of wave initial profile in the form of sinusoidal, Gauss's and Whittaker's functions is theoretically and numerically described. About 80 variants of initial parameters are studied numerically – three variants of analytical representation of initial profile, three variants of materials (aluminium, copper, steel), three variants of the wave length or wave bottom, three variants of initial maximal amplitude. For each variant, the set of four (cosine) and five (Gauss's, Whittaker) two-dimensional plots “wave shape (displacement) – passed by the wave distance” is built that shows the level of distortion.

**Key words:** nonlinear plane longitudinal wave; approximate method; wave profiles in the form of cosine, Gauss's, and Whittaker's functions; wave initial profile distortion.

**1. Введение. Аналитические формулы, на которых основан числовой анализ эволюции плоской волны с начальным профилем в виде гладкой функции.**

Пусть нелинейность деформирования материала, в котором распространяется волна, описывается упругим потенциалом Мэрнагана [4,15,16]

$$W(\varepsilon_{ik}) = (1/2)\lambda(\varepsilon_{mm})^2 + \mu(\varepsilon_{ik})^2 + (1/3)A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + B(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mm} + (1/3)C(\varepsilon_{mm})^3, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{ik}$  – компоненты нелинейного тензора деформаций Коши – Грина

$$\varepsilon_{nm} = (1/2)(u_{n,m} + u_{m,n} + u^{k,n}u_{k,m}); \quad (2)$$

$u_k$  – компоненты вектора смещений;  $\lambda, \mu, A, B, C$  – упругие постоянные модели Мэрнагана.

Выберем модель, в которой при представлении потенциала Мэрнагана через градиенты смещений учтены лишь вторые и третьи степени, т.е.

$$W = (1/2)\lambda(u_{m,m})^2 + (1/4)\mu(u_{i,k} + u_{k,i})^2 + (\mu + (1/4)A)u_{i,k}u_{m,i}u_{m,k} + (1/2)(\lambda + B)u_{m,m}(u_{i,k})^2 + (1/12)Au_{i,k}u_{k,m}u_{m,i} + (1/2)Bu_{i,k}u_{k,i}u_{m,m} + (1/3)C(u_{m,m})^3. \quad (3)$$

На основании представления (3) можно строить различные варианты нелинейных волновых уравнений, пригодных для анализа как гармонических (периодических), так и одиночных (непериодических) волн. Далее рассмотрим плоскую продольную волну смещения с тремя формами начального профиля в рамках одного и того же приближенного подхода: 1) косинусоидальный профиль (гармоническая волна); 2) профиль в виде функции Гаусса (одиночная волна); 3) профиль в виде функции Уиттекера (одиночная волна).

Следует отметить, что гармонические нелинейно упругие волны изучены достаточно хорошо [3, 7, 10, 15, 16, 18]. Одиночные волны в материалах активно исследуются в последние годы [4, 5, 10 – 11, 14]. Нелинейно упругая волна с начальным косинусоидальным профилем рассмотрена в разных постановках и разными авторами [3, 4, 12, 14]; в данном исследовании она рассматривается в рамках принятого приближенного подхода с целью сравнения с полученными ранее графиками эволюции начального профиля волны и сравнения с одиночными волнами сложного профиля. Волна с профилем в виде функции Гаусса (колоколообразная одиночная волна) изучалась ранее численно с помощью компьютера IBM286 с очень несовершенной графикой [3] и поэтому результаты этого исследования могут сравниваться с настоящим исследованием только по общей тенденции эволюции. Волна с профилем в виде функции Уиттекера также изучалась ранее в рамках модели смеси [4] и результаты этого исследования из-за существенного различия моделей могут сравниваться с настоящим исследованием лишь по общей тенденции эволюции.

Без ограничения общности анализа будем рассматривать плоскую волну для случая, когда смещения  $u_k = u_k(x_1, t)$  зависят только от одной пространственной координаты времени (смещения в направлении оси  $Ox_1$  в декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ ). Тогда вид потенциала (3) упрощается и имеет вид

$$W = (1/2) \left[ (\lambda + 2\mu)(u_{1,1})^2 + \mu \left[ (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right] \right] + \left[ \mu + (1/2)\lambda + (1/3)A + B + (1/3)C \right] (u_{1,1})^3 + (1/2)(\lambda + B)u_{1,1} \left[ (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right]. \quad (4)$$

Из (4) получаются простейшие нелинейные волновые уравнения – квадратично нелинейные волновые уравнения для трех упругих поляризованных (продольно поляризованная, поперечная горизонтально поляризованная, поперечная вертикально поляризованная) плоских волн. Для продольно поляризованной волны уравнение имеет вид

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1} + N_2 (u_{2,11} u_{2,1} + u_{3,11} u_{3,1}); \quad (5)$$

$$N_1 = [3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]; \quad N_2 = \lambda + 2\mu + (1/2)A + B. \quad (6)$$

Ограничим далее анализ так называемой первой стандартной задачей, когда первоначально в материале возбуждается лишь продольная волна [2] и основным нелинейным явлением является явление самогенерации волны. Тогда нелинейное уравнение (5) принимает вид

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1} \rightarrow u_{1,tt} - (c_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}, \quad (7)$$

где скорость линейной плоской продольной волны обозначена как  $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ .

## 2. Приближенный подход к анализу эволюции начального профиля волны применительно к нелинейному уравнению (7).

Представим уравнение (7) в виде

$$u_{1,tt} - \left\{ (c_L)^2 + (N_1/\rho) u_{1,1} \right\} u_{1,11} = 0 \rightarrow u_{1,tt} - \{1 + \alpha u_{1,1}\} (c_L)^2 u_{1,11} = 0; \quad (8)$$

$$\alpha = [N_1/(\lambda + 2\mu)]. \quad (9)$$

Предположим, что начальный профиль волны описывается достаточно гладкой функцией  $u(x_1, t=0) = F(x_1)$  и волна распространяется в виде волны Даламбера

$$u(x_1, t) = F(x_1 - vt), \quad (10)$$

где скорость волны определяется выражением

$$v = \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} c_L. \quad (11)$$

Начальный профиль волны  $F(x_1)$  далее будем полагать в виде трех функций:

1)  $F(x_1) = \cos k_L x_1$  или  $F(x_1) = e^{-ik_L x_1}$  (гармоническая волна); 2)  $F(x_1) = e^{-((\alpha x_1)^2/2)}$  (одиночная волна); 3)  $F(x_1) = W_{5/4;1/4}(\alpha x_1)$  (одиночная волна). Для гармонической волны волновое число  $k_L$  определяет длину волны и для одиночной волны  $a$  определяет ширину подошвы волны.

Примем далее ограничение в представлении (11)

$$|\alpha u_{1,1}| \ll 1, \quad (12)$$

которое позволяет записать корень в (11) в виде ряда

$$\sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} = (1 + \alpha u_{1,1})^{1/2} = 1 + (1/2)\alpha u_{1,1} - (1/8)(\alpha u_{1,1})^2 + \dots$$

и представить приближенно решение (12) таким образом:

$$u(x_1, t) \cong F[x_1 - c_L t - (1/2)\alpha u_{1,1} t]. \quad (13)$$

Точность приближения (13) зависит от точности выполнения условия (12), которое включает ограничения на два параметра: параметр  $\alpha = 3 + 2(A + 3B + C)/(\lambda + 2\mu)$  и градиент перемещения  $u_{1,1}$ . Ограничим анализ классом конструкционных материалов, для которых модель Мэрнагана достаточно приемлема и имеет ту особенность, что нелинейность этих материалов мягкая (т.е. значение  $A + 3B + C$  всегда отрицательное). К примеру, для рассматриваемых далее в числовом анализе алюминия, меди и стали постоянная  $\alpha$ , соответственно, равна приближенно  $-9$ ,  $-4$ ,  $-8$ . В целом, в случае многих металлических материалов для параметра  $\alpha$  может быть указан примерный диапазон изменения  $2 < \alpha < 19$  [1]. Следовательно, малым может быть выбран лишь градиент перемещения  $u_{1,1}$ . Тогда достаточно принять очень распространенное в теории упругого деформирования материалов ограничение малости деформации, обычно записываемое как

$$u_{1,1} \ll 1 \quad (14)$$

(малый градиент перемещения). Это согласовывается с известным фактом, что потенциал Мэрнагана описывает нелинейное деформирование в рамках малых деформаций. Далее следует определить приемлемую точность в приближенном вычислении скорости в формуле (11). Пусть она составляет 0,1%. На основании равенств  $\sqrt{1 + 0,094} = 1,00459\dots$ ,  $\sqrt{1 - 0,094} = 0,9518\dots$ ,  $\sqrt{1 \pm 0,094} \approx 1 \pm (1/2)0,094 = 1,0047; 0,953$  можно принять, что точность 0,1% соблюдается при максимальном значении произведения  $|\alpha u_{1,1}| \leq 0,094$ . Следовательно, при точности 0,1% ограничения (12) и (14) можно уточнить:  $|\alpha u_{1,1}| \leq 0,001$ ,  $|u_{1,1}| \leq 0,0005 = 5 \cdot 10^{-4}$ .

В случае волны с известным профилем ограничению (14) можно придать геометрический смысл: величину  $u_{1,1}$  можно понимать как касательную к профилю волны и ее малость соответствует малости тангенса угла, образованного касательной с осью абсцисс. Как известно, значения тангенса угла и угла совпадают в диапазоне  $0 < \gamma < 5^\circ \cong 0,0873$ .

Тогда ограничение (14) может трактоваться таким образом, что профиль волны должен быть таким, чтобы превышение длины гармонической волны или подошвы одиночной волны над максимальным значением амплитуды в профиле волны имело

примерно один – два порядка. Это ограничение для каждого конкретного случая в числовом моделировании должно проверяться.

Обозначим фазу волны с постоянной фазовой скоростью через  $\sigma = a(x_1 - c_L t)$  и дополнительный малый параметр – через  $\delta = -(1/2)\alpha a c_L u_{1,1} t$  и представим решение (13) в виде ряда Тейлора

$$u(x_1, t) \approx F(\sigma + \delta) \approx F(\sigma) + F'(\sigma)\delta + (1/2)F''(\sigma)\delta^2 + \dots \quad (15)$$

Ограничим рассмотрение первыми двумя членами в (15), предположив малость  $\delta$ , т.е.  $|\delta| = |(1/2)\alpha a c_L u_{1,1} t| \ll 1$  (поскольку малость  $|u_{1,1}|$  уже предположена в (12), то это фактически условие на  $a c_L t$  – для класса конструкционных материалов, пройденное волной расстояние должно быть, примерно, 1 – 10 м и характерный размер волны  $a$  (длина, подошва) должен быть значительно меньше этого расстояния). Тогда, ввиду следующего из (15) равенства

$$u_{1,1}(x_1, t) \approx F'_\sigma(\sigma + \delta) \cdot \sigma'_1 = F'_\sigma(\sigma)a + F''_{\sigma\sigma}(\sigma)(-(1/2)\alpha a^2 c_L u_{1,1} t) \approx F'_\sigma(\sigma),$$

соотношению (15) можно придать вид

$$u(x_1, t) \approx F(\sigma) + F'(\sigma)a \left[ \delta = -(1/2)\alpha a c_L u_{1,1} t \right] = F(\sigma) - (1/2)\alpha a^2 c_L t \left[ F'(\sigma) \right]^2. \quad (16)$$

Приближенное представление решения (16) имеет общий характер и для разных конкретно выбранных функций будет описывать нелинейный волновой эффект, состоящий в возникновении второй гармоники или подобных ей новых составляющих и увеличение амплитуды дополнительной составляющей со временем распространения волны.

Формула (16) позволяет записать эволюцию одиночной волны с любым профилем в виде функции финитного веса, для которой известно аналитическое представление производной.

### 3. Параметры материала и волны в последующем числовом моделировании.

Выберем три металлических конструкционных материала с такими параметрами в рамках модели Мэрнагана (система СИ) [18]:

Алюминий –  $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ ;  $\lambda = 5,2 \cdot 10^{10}$ ;  $\mu = 2,7 \cdot 10^{10}$ ;

$$A = -0,65 \cdot 10^{10}; B = -2,05 \cdot 10^{11}; C = -3,7 \cdot 10^{11}; c_L = 6,27 \cdot 10^3; \alpha = -16,81;$$

Медь –  $\rho = 8,93 \cdot 10^3$ ;  $\lambda = 10,7 \cdot 10^{10}$ ;  $\mu = 4,8 \cdot 10^{10}$ ;

$$A = -2,8 \cdot 10^{11}; B = -1,72 \cdot 10^{11}; C = -2,4 \cdot 10^{11}; c_L = 4,77 \cdot 10^3; \alpha = -7,207;$$

Сталь –  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ ;  $\lambda = 9,4 \cdot 10^{10}$ ;  $\mu = 7,9 \cdot 10^{10}$ ;

$$A = -3,25 \cdot 10^{11}; B = -3,1 \cdot 10^{11}; C = -8,0 \cdot 10^{11}; c_L = 5,68 \cdot 10^3; \alpha = -13,31.$$

Параметры гармонической волны выбраны следующими: дополнительно к выбранной ранее скорости волны  $c_L = (\omega/k_L)$  выбраны начальная частота  $\omega$  и при уже известном волновом числе  $k_L = (\omega/c_L)$  по формуле  $L = (2\pi/k_L)$  – длина волны (для каждого материала своя длина волны);

$$\omega = 1,6 \cdot 10^5; L = 0,246 \text{ (алюминий)}, L = 0,187 \text{ (медь)}, L = 0,233 \text{ (сталь)};$$

$$\omega = 3,2 \cdot 10^5; L = 0,246 \text{ (алюминий)}, L = 0,187 \text{ (медь)}, L = 0,233 \text{ (сталь)};$$

$$\omega = 4,8 \cdot 10^5; L = 0,246 \text{ (алюминий)}, L = 0,187 \text{ (медь)}, L = 0,233 \text{ (сталь)}.$$

Для одиночной волны с профилями в виде функций Гаусса и Уиттекера (которые являются функциями конечного веса) примем предположение, что длиной подошвы волны  $L$  является интервал (расстояние), для которого площадь под графиком начального профиля волны вне этого интервала ничтожно мала.

Тогда для функции Гаусса (колоколообразной функции)  $e^{-(x^2/2\sigma^2)} = e^{-[(x/\sigma)^2/2]}$  по правилу « $3\sigma$ » длина подошвы профиля равна  $6\sigma$ . Поэтому в представлении профиля в виде  $F(x_1) = e^{-((ax_1)^2/2)}$  параметр  $a$  определяет длину подошвы по формуле  $\sigma = (1/a)$ . Для всех трех материалов начальная подошва выбрана одинаковой и вариантов выбора три:  $L = \{0,09; 0,15; 0,20\}$  ( $a = \{167; 40; 25,9\}$ ).

Функция Уиттекера  $W_{5/4;1/4}(x)$  имеет подошву  $L = 20$ . Поэтому при представлении профиля в виде  $F(x_1) = W_{5/4;1/4}(ax_1)$  параметр  $a$  определяет длину подошвы по формуле  $\sigma = (1/a)$ . Для всех трех материалов начальная подошва выбрана одинаковой  $L = 0,20$  ( $a = 50$ ) и вариантов выбора три:  $L = \{0,143; 0,20; 0,25\}$  ( $a = \{70; 50; 40\}$ ).

Начальная амплитуда выбиралась в трех вариантах для каждого материала и для каждой начальной длины (подошвы) волны –  $a^o = 5,0 \cdot 10^{-5}; 7,5 \cdot 10^{-5}; 1,0 \cdot 10^{-4}$  (для гармонического и колоколообразного профилей) и  $a^o = 1,0 \cdot 10^{-4}; 6,0 \cdot 10^{-3}; 1,5 \cdot 10^{-3}$  (для волны с профилем в виде функции Уиттекера).

Таким образом, рассмотрен 81 вариант волн (3 варианта материала, 3 варианта аналитического представления профиля, 3 варианта длины (подошвы) волны, 3 варианта начальной амплитуды) и далее построено примерно 400 двумерных графиков эволюции начального профиля волны.

#### 4. Числовой анализ волны с гармоническим профилем.

В этом случае начальный профиль волны имеет вид  $F(x_1) = e^{-ik_L x_1}$  и формула (16) приобретает конкретную форму

$$u_1(x_1, t) = a^o e^{-ik_L(x_1 - c_L t)} - (1/2)c_L t \alpha(k_L)^2 (a^o)^2 e^{-2ik_L(x_1 - c_L t)}. \quad (17)$$

Приближенное решение (17) идентично с соответствующим решением нелинейного волнового уравнения (9), полученным методом последовательных приближений в рамках первых двух приближений [3, 4, 16], с точностью до постоянного множителя, что не изменяет качественную картину эволюции волны

$$u_1(x_1, t) = u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) + (1/8\rho) x_1 \alpha(k_L)^2 (u_{1o})^2 \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \quad (18)$$

По формуле (17) построены двумерные графики с координатами «смещение  $u_1$  – пройденное волной расстояние  $x_1$ ». Всего 27 наборов (3 материала, 3 варианта длины волны, 3 варианта максимальной начальной амплитуды). Каждый набор включает 4 графика с формой профиля волны для различных расстояний – от начального положения волны до положения на расстоянии  $v$ , примерно, 20 повторений длины волны, где влияние нелинейности уже проявляется существенно и искажение гармонического профиля вполне наблюдаемо визуально. Пятый график показывает форму лишь второго слагаемого из (18).

На рис. 1 приведены графики одного набора, соответствующего таким значениям параметров: материал алюминий,  $L = 0,246$ ,  $k_L = 1,2 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_o = 5,0 \cdot 10^{-5}$ . Из графиков следует, что эволюция начального профиля волны происходит несимметрично – положительная часть профиля как-бы остается в виде профиля первой гармоники, тогда как отрицательная часть показывает тенденцию к преобразованию в профиль второй гармоники.

Сравнение графиков из рис. 1, соответствующих формуле (17), и графиков, приведенных в [3, 4, 16] и соответствующих формуле (18), показывает, что они качественно идентичны. Следовательно, для гармонической волны формула (17) приемлема, что дает основания полагать возможно приемлемыми формулы для иных профилей, полученных из общей приближенной формулы (16).

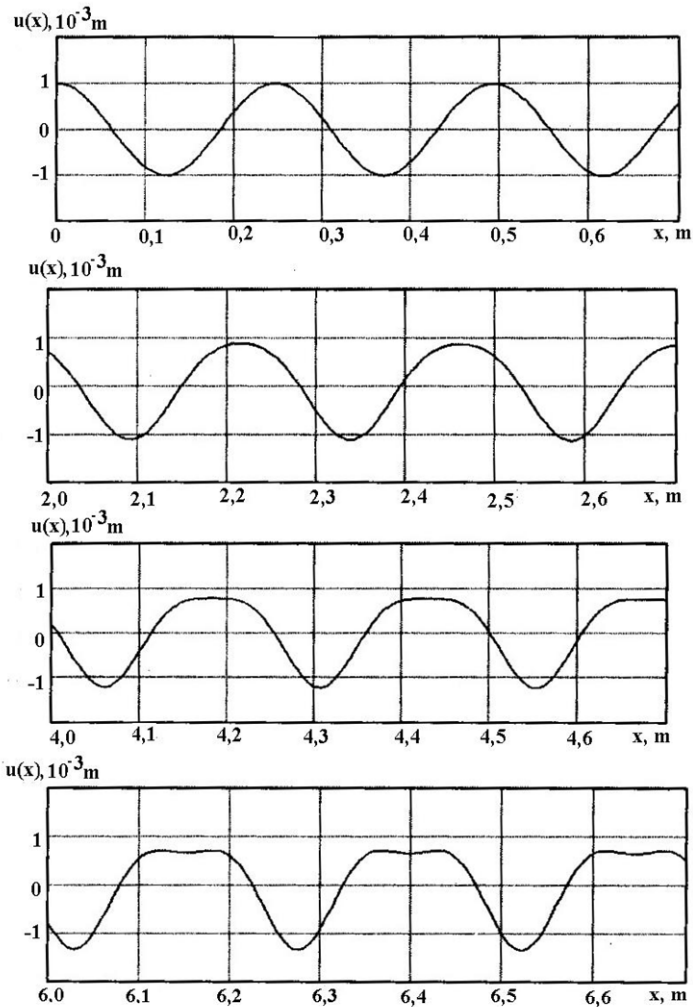


Рис.1

### 5. Числовой анализ волны с профилем в виде функции Гаусса.

В этом случае начальный профиль волны имеет колоколообразный вид  $F(x_1) = e^{-((ax_1)^2/2)}$  и формула (16) приобретает более конкретную форму

$$u_1(x_1, t) = A^0 e^{-[a^2(x_1 - c_L t)^2/2]} - (1/2) t \alpha c_L a^2 (x_1 - c_L t)^2 (A^0)^2 e^{-a^2(x_1 - c_L t)^2}. \quad (19)$$

Заметим, что для анализа профиля (19) понятия первой и второй гармоник неприменимы и функции  $e^{-[a^2(x_1 - c_L t)^2/2]}$ ,  $e^{-a^2(x_1 - c_L t)^2}$  можно считать первой и второй гармониками весьма условно, однако структура приближенного решения (19) достаточно подобна структуре решения (17). Очевидное отличие между решениями (17) и (19) состоит в том, что нелинейная добавка для волны (17) не зависит прямо от фазы волны  $\sigma = k_L x_1 - \omega t$ , тогда как для волны (19) квадрат фазы волны  $\sigma = a(x_1 - c_L t)$  входит явно в выражение для амплитуды.

По формуле (19) построены двумерные графики с координатами «смещение  $u_1$  – пройденное волной расстояние  $x_1$ ». Всего 27 наборов (3 материала, 3 варианта длины

волны, 3 варианта максимальной начальной амплитуды). Каждый набор включает 5 графиков с формой профиля волны для различных расстояний – 4 графика эволюции профиля волны от начального положения волны до положения на расстоянии  $v$ , примерно, 80 повторений длины подошвы, где влияние нелинейности уже проявляется существенно и искажение начального профиля вполне наблюдаемо визуально, и дополнительно график второй (нелинейной) составляющей, показывающий уровень влияния нелинейности.

На рис. 2 приведены графики одного набора, соответствующего таким значениям параметров: материал алюминий,  $L = 0,15$ ,  $a = 40$ ,  $a_0 = 5,0 \cdot 10^{-3}$ .

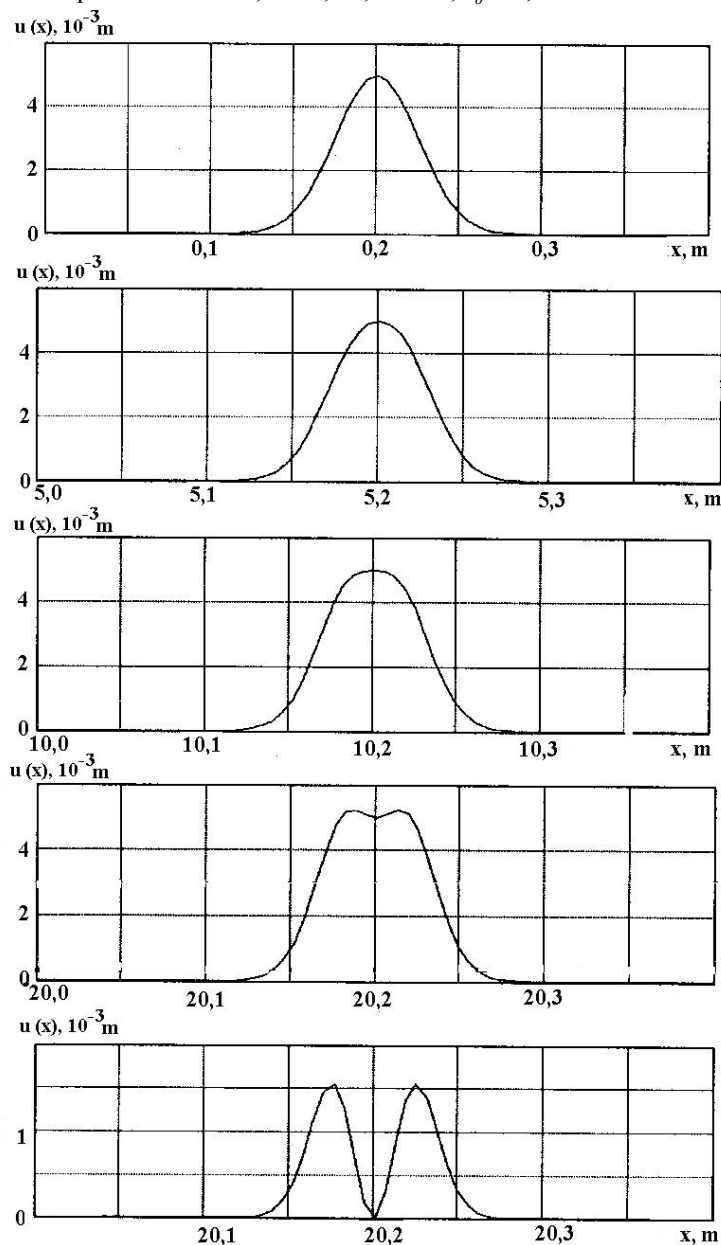


Рис. 2

Из графиков следует, что эволюция начального профиля волны, который симметричен, происходит также симметрично. При этом максимальное значение амплитуды медленно увеличивается с тенденцией превращения одного горба в два (что можно видеть на последнем, пятом, графике рис. 2); средняя часть начального профиля расширяется – профиль как бы «толстеет», сохраняя подошву неизменной.

Таким образом, учет нелинейности в анализе распространения одиночной волны с начальным профилем в виде функции Гаусса позволяет описать такое волновое явление, как дисторсия профиля.

#### 6. Числовой анализ волны с профилем в виде функции Уиттекера.

Пусть начальный профиль волны имеет вид  $F(x_1) = W_{5/4;3/4}(ax_1)$ . Тогда формула (16) приобретает конкретную форму

$$u_1(x_1, t) = a^\circ W_{5/4;3/4}(ax_1) - (1/8)t\alpha(k_L)^2 (a^\circ)^2 (W'_{5/4;3/4}(x_1))^2.$$

Поскольку для функции  $W_{\lambda,\mu}(z)$  производная вычисляется по формуле [8, 13]

$$\frac{d}{dz} W_{\lambda,\mu}(z) = \left(\frac{\lambda}{z} - \frac{1}{2}\right) W_{\lambda,\mu}(z) - \frac{1}{z} \left[ \mu^2 - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \right] W_{\lambda-1,\mu}(z)$$

и первая производная для  $W_{5/4;3/4}(x_1)$  имеет вид

$$(W_{5/4;3/4}(\sigma))' = \left(\frac{5}{4\sigma} - \frac{1}{2}\right) W_{5/4;3/4}(\sigma),$$

то решение (17) записываем в таком виде:

$$u_1(x_1, t) = a^\circ W_{5/4;3/4}(a(x_1 - c_L t)) - (1/2)t\alpha c_L (a^\circ)^2 (W'_{5/4;3/4}(x_1))^2; \quad (20)$$

$$u_1(x_1, t) = a^\circ W_{5/4;3/4}(a(x_1 - c_L t)) - (1/2)t\alpha c_L (a^\circ)^2 \left( \left( \frac{5}{4a(x_1 - c_L t)} - \frac{1}{2} \right) W_{5/4;3/4}(a(x_1 - c_L t)) \right)^2.$$

Из вида решения (20) следуют две особенности: оно описывает изменение начального профиля одиночной волны (вследствие прямой зависимости нелинейной составляющей от времени) и «расплывание» начального профиля (вследствие присутствия нелинейной составляющей).

По формуле (20) построены двумерные графики с координатами «форма волны  $u_1$  – пройденное волной расстояние  $x_1$ ». Всего 27 наборов (3 материала, 3 варианта длины волны, 3 варианта максимальной начальной амплитуды). Каждый набор включает 5 графиков с формой профиля волны для различных расстояний – 4 графика эволюции профиля волны от начального положения волны до положения на расстоянии в 40 повторений длины подошвы, где влияние нелинейности уже проявляется существенно и искажение гармонического профиля вполне наблюдаемо визуально, и дополнительно график второй (нелинейной) составляющей, показывающий уровень влияния нелинейности.

На рис. 3 приведены графики одного набора, соответствующего таким значениям параметров (материал алюминий):  $a = 1,2 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_0 = 1,0 \cdot 10^{-5}$ . Из графиков следует, что эволюция несимметричного начального профиля волны происходит в трех направлениях: максимальное значение амплитуды медленно подрастает, левая часть профиля также медленно становится более пологой, тогда как правая часть становится пологой значительно быстрее. Подошва волны соответствует подошве нелинейной добавки (что можно видеть на последнем, пятом, графике рис. 3), средняя часть начального профиля расширяется – профиль как бы «толстеет», сохраняя подошву неизменной. Таким образом, учет нелинейности в анализе распространения одиночной волны с начальным профилем в виде функции Уиттекера позволяет описать такое волновое явление как дисторсия профиля.



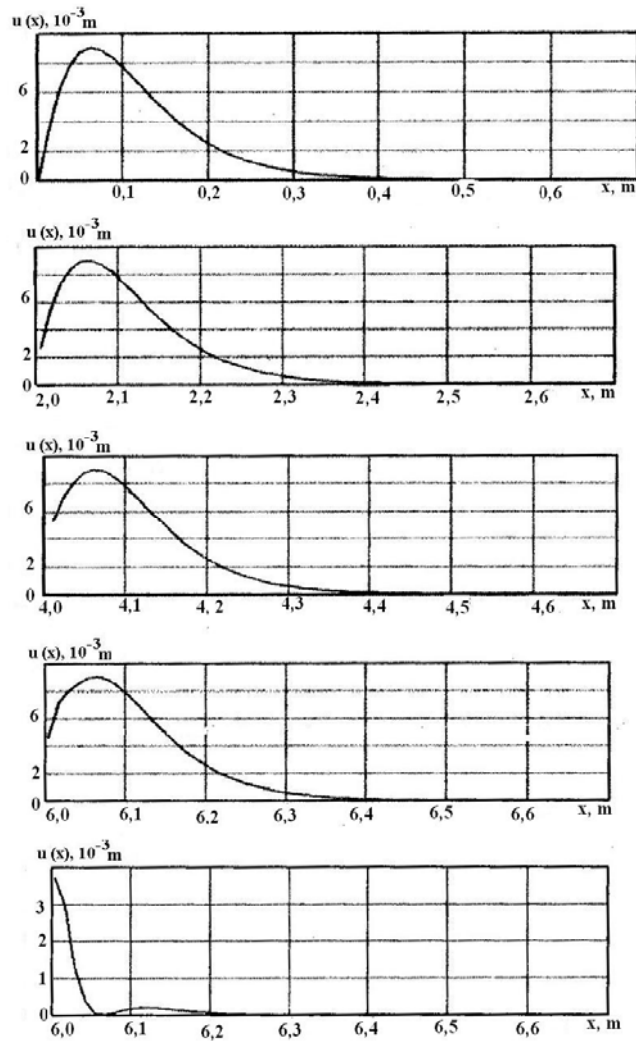


Рис. 3

**Заключение.**

Проведен числовой анализ нелинейной упругой продольной плоской волны смещения  $u(x_1, t)$  трех видов начального профиля: гармонического, одиночного симметричного и одиночного несимметричного. Соответственно, профили описываются тремя различными функциями: тригонометрической функцией  $\cos x_1$  ( $e^{ix_1}$ ), функцией Гаусса  $e^{-x_1^2/2}$  и функцией Уиттекера  $W_{5/4; 3/4}(x_1)$ . Общим для всех трех видов профиля является искажение начального профиля при движении волны вследствие нелинейного взаимодействия волны самой с собой. Однако, искажение происходит для каждого вида по-своему. Гармоническая волна первоначально не изменяет длину и только показывает тенденцию к образованию двух горбов вместо одного, которая может привести к превращению первой гармоники во вторую и уменьшению вдвое длины волны. Колоколообразная одиночная волна сохраняет при дисторсии симметрию. Подобно гармонической волне, эта волна первоначально не изменяет длину подошвы и только показывает тенденцию к образованию двух горбов вместо одного, которая может привести к превращению профиля в виде одного горба в профиль с двумя горбами (см. пятый график на рис. 2) при сохранении общей подошвы, равной

подошве первоначального одного горба. Средняя часть колокола расширяется – профиль как бы «толстеет», сохраняя подошву неизменной. Одиночная волна с несимметричным начальным профилем в виде функции Уиттекера эволюционирует в трех направлениях: максимальное значение амплитуды медленно подрастает, левая часть профиля также медленно становится более пологой, тогда как правая часть становится пологой значительно быстрее. Подошва волны на начальном этапе фактически неизменна (см. пятый график на рис. 3); средняя часть начального профиля расширяется – профиль, как и в случае колокола, как бы «толстеет», сохраняя подошву неизменной.

Р Е З Ю М Е. Вивчено нелінійну пружну плоску позовжну хвилю для різних форм початкового профіля в рамках моделі Мурнагана. Основна новизна полягає в тому, що хвиля аналізується для всіх форм одним і тим же наближеним методом і розв'язки нелінійних хвильових рівнянь можуть бути записані у подібному за структурою вигляді. Описано теоретично і чисельно спотворення початкового профіля хвилі у формі косинусоїдальної функції та функцій Гаусса і Уіттекера. Чисельно вивчено біля 80 варіантів початкових параметрів – три варіанти аналітичного представлення початкового профіля, три варіанти матеріалу (алюміній, мідь, сталь), три варіанти довжини хвилі чи подошви хвилі, три варіанти початкової максимальної амплітуди. Для кожного варіанту побудовано набір з чотирьох (косинус) або п'яти (Гаусс і Уіттекер) двовимірних графіків «форма хвилі (зміщення) – пройдена на хвилю відстань», які показують рівень спотворення хвилі.

1. Руцицький Я.Я. Об ограничениях значений градиентов перемещений для упругих материалов // Прикл. механика. – 2016. – **52**, N2. – С. 20 – 35.
2. Руцицький Я.Я., Юрчук В.Н. Один приближенный метод анализа одиночных волн в нелинейно упругих материалах // Прикл. механика. – 2016. – **52**, № 3. – С. 83 – 94.
3. Руцицький Я.Я., Цурнал С.І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка, 1998. – 377 с.
4. Cattani C., Rushchitsky J. Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro and Nanostructure. – Singapore – London: World Scientific, 2007. – 466 p.
5. Erofeev V.I. Wave Processes in Solids with Microstructure. – Singapore – London: World Scientific, 2003. – 276 p.
6. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products. 7<sup>th</sup> revised edition. Eds. Jeffrey A., Zwillinger D. – New York: Academic Press Inc., 2007. – 1200 p.
7. Guz I.A., Rodger A.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J. Predicting the properties of micro and nanocomposites: from the micro whiskers to bristled nanocentipedes // Phil. Trans. Royal Soc. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2008. – **365**, N 1860. – P. 3233 – 3239.
8. Guz I.A., Rushchitsky J.J. Theoretical description of a delamination mechanism in fibrous micro- and nanocomposites // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 10. – P. 1129 – 1136.
9. Hussein M.I., Khayehourian R. Nonlinear elastic waves in solids: Deriving simplicity from complexity // Bulletin of the American Physical Society. – 2015. – **60**, N 1 ([http://meetings.aps.org/link/BAPS.2015.MAR\\_Q8.10](http://meetings.aps.org/link/BAPS.2015.MAR_Q8.10)).
10. Janno J., Seletski A. Reconstruction of coefficients of higher order nonlinear wave equation by measuring solitary waves // Wave Motion. – 2015. – **52**. – P. 15 – 25.
11. Maugin G.A. Nonlinear Waves in Elastic Crystals. – Oxford: Oxford University Press, 1999. – 324 p.
12. Narahara K. Asymmetric solitary waves in coupled nonlinear transmission lines // Wave Motion. – 2015. – **58**. – P.13 – 21.
13. Olde Daalhuis A.B. Confluent Hypergeometric Functions. Chapter 13. P.383 – 402. Whittaker Functions. 13.14-13.26. In: Olver F.W.J., Lozier D.W., Bousvert R.F., Clark C.W. (eds) NIST (National Institute of Standards and Technology) Handbook of Mathematical Functions. – Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – 968 p.
14. Porubov A.V. Amplification of Nonlinear Strain Waves in Solids. – Singapore-London: World Scientific, 2003. – 228 p.
15. Rushchitsky J.J. Certain Class of Nonlinear Hyperelastic Waves: Classical and Novel Models, Wave Equations, Wave Effects // Int. J. Appl. Math. and Mech. – 2013. – **9**, N 12. – P. 600 – 643.
16. Rushchitsky J.J. Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
17. Rushchitsky J.J. On three facts of reticences in the classical mathematical modeling of elastic materials // Mathematical Modeling and Computing (MMC). – 2014. – **1**, N2. – P.245 – 255.
18. Structural and Residual Stress Analysis. Ed. V.Hauk. – Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1997 (e-variant 2006). – 640 p.

Поступила 20.04.2016

Утверждена в печать 29.11.2016