

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.056>

УДК 539.3

**Л.П. Хорошун, О.И. Левчук**

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: lkhoroshun@ukr.net, 2013levchuk@gmail.com

## **Эффективные упругие свойства слоистых композитов при несовершенной адгезии**

*Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Л.П. Хорошун*

*Рассмотрена задача об эффективных упругих свойствах слоистого композитного материала стохастической структуры при несовершенной адгезии, которая моделируется межфазным слоем с дефектами в виде микропор. На поверхностях раздела межфазного слоя со слоями наполнителя и матрицы выполняются условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений. Межфазные слои рассматриваются как третий компонент, состоящий из пористых приповерхностных слоев двух компонентов и аппретирующих покрытий. При решении задачи использованы стохастические дифференциальные уравнения упругости в перемещениях для многокомпонентного КМ слоистой структуры с изотропными и анизотропными компонентами. На основе полученного решения исследованы эффективные свойства трехкомпонентного КМ слоистой структуры. Построены кривые зависимостей эффективных упругих постоянных слоистого материала с изотропными компонентами от объемного содержания наполнителя и пористости межфазного слоя.*

**Ключевые слова:** несовершенная адгезия, эффективные упругие свойства, слоистый композит, стохастические уравнения, условия несовершенного контакта, пористый межфазный слой.

В современной технике широко применяются КМ, состоящие из матрицы, армированной наполнителем с высокими характеристиками жесткости и прочности. В ряде работ [1–5] идеальное сцепление матрицы и элементов наполнителя описывается непрерывностью перемещений и поверхностных напряжений при переходе через границу раздела компонентов. В реальных композитных материалах условия идеальной адгезии не соблюдаются ввиду наличия переходной зоны, нанесения аппретов для усиления связи между компонентами, а также наличием дефектов в виде микротрещин и микропор, ослабляющих адгезию. Это обусловило появление различных вариантов формулировки моделей несовершенного контакта матрицы и включений [6–12].

Наиболее адекватной представляется модель контакта матрицы и включения, базирующаяся на представлении, что между матрицей и включением существует межфазный материальный слой, свойства которого отличаются от свойств матрицы и включения [6, 13]. При этом на поверхностях раздела межфазного слоя с матрицей и включением выполняются

© Л.П. Хорошун, О.И. Левчук, 2019

условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений, что дает основание рассматривать межфазный слой как третью фазу.

В настоящей работе рассматривается задача об эффективных упругих свойствах слоистого композитного материала стохастической структуры, где несовершенная адгезия моделируется межфазным слоем с дефектами в виде микропор.

Упругие свойства межфазного слоя отличаются от свойств слоев наполнителя и матричного материала. На поверхностях раздела межфазного слоя со слоями наполнителя и матрицы выполняются условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений. Межфазные слои рассматриваются как третий компонент, состоящий из пористых приповерхностных слоев двух компонентов и аппретирующих покрытий с дефектами в виде микропор.

**Основные уравнения.** Будем исходить из представления о трехкомпонентном композитном материале слоистой структуры, состоящем из чередующихся слоев наполнителя, матричного материала и находящихся между ними межфазных слоев. Сцепление между межфазным слоем и контактирующими с ним слоями наполнителя и матрицы принимаем совершенным, обеспечивающим на границе непрерывность перемещений и поверхностных напряжений. В этом случае физико-механические характеристики будут функциями одной координаты.

Рассмотрим макрообъем слоистого материала, находящийся в условиях однородных макродеформаций и макронапряжений. Напряженно-деформированное состояние в микроточке описывается уравнениями равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1)$$

соотношениями упругости

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijmn} \varepsilon_{mn} \quad (2)$$

и Коши

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (3)$$

Пусть ось  $x_3$  направлена по нормали к слоям. Тогда упругие характеристики  $\lambda_{ijmn}$  будут случайными функциями лишь координаты  $x_3$ . Вследствие однородности макронапряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и макродеформаций  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  напряжения  $\sigma_{ij}$ , деформации  $\varepsilon_{ij}$  и флуктуации перемещений  $u_i^0 = u_i - \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j$  также будут функциями одной координаты  $x_3$ . В этом случае уравнения равновесия (1) упрощаются

$$\sigma_{i3,3} = 0, \quad (4)$$

откуда находим

$$\sigma_{i3} = A_i, \quad A_i = \text{const}. \quad (5)$$

Выражения для деформаций согласно (3) имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{1}{2}(u_{i,3}^0 \delta_{j3} + u_{j,3}^0 \delta_{i3}). \quad (6)$$

Подставляя (2), (6) в интегралы уравнений равновесия (5), получаем алгебраические уравнения относительно производных от флуктуаций перемещений

$$\lambda_{i3m3} u_{m,3}^0 = A_i - \lambda_{i3mn} \langle \varepsilon_{mn} \rangle. \quad (7)$$

Решения их будут следующими:

$$u_{m,3}^0 = \lambda_{i3m3}^{-1} (A_m - \lambda_{m3pq} \langle \varepsilon_{pq} \rangle). \quad (8)$$

Осредняя соотношения (8) и учитывая, что математические ожидания от флуктуаций равны нулю, получаем

$$\langle \lambda_{i3k3}^{-1} \rangle A_k - \langle \lambda_{i3k3}^{-1} \lambda_{m3pq} \rangle \langle \varepsilon_{pq} \rangle = 0. \quad (9)$$

Отсюда находим постоянные интегрирования

$$A_i = \langle \lambda_{i3m3}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{m3n3}^{-1} \lambda_{n3pq} \rangle \langle \varepsilon_{pq} \rangle, \quad (10)$$

а из (8), (10) находим флуктуации производных перемещений

$$u_{i,3}^0 = \lambda_{i3k3}^{-1} (\langle \lambda_{k3m3}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{m3n3}^{-1} \lambda_{n3pq} \rangle - \lambda_{k3pq}) \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (6), получаем выражения микродеформаций через макродеформации

$$\varepsilon_{ij} = \left[ \delta_{ip} \delta_{jq} + \frac{1}{2} (\lambda_{i3m3}^{-1} \delta_{j3} + \lambda_{j3m3}^{-1} \delta_{i3}) (\langle \lambda_{m3n3}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{n3k3}^{-1} \lambda_{k3pq} \rangle - \lambda_{m3pq}) \right] \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \quad (12)$$

Микронапряжения находим подстановкой (12) в (2)

$$\sigma_{ij} = [\lambda_{ijpq} + \lambda_{ijm3} \lambda_{m3n3}^{-1} (\langle \lambda_{n3k3}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{k3s3}^{-1} \lambda_{s3pq} \rangle - \lambda_{n3pq})] \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \quad (13)$$

Осредняя выражение (13), получаем зависимости между макронапряжениями и макродеформациями:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ijpq}^* \langle \varepsilon_{pq} \rangle, \quad (14)$$

где эффективные упругие постоянные определяются формулами

$$\lambda_{ijpq}^* = \langle \lambda_{ijpq} \rangle + \langle \lambda_{ijm3} \lambda_{m3n3}^{-1} \rangle \langle \lambda_{n3k3}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{k3s3}^{-1} \lambda_{s3pq} \rangle - \langle \lambda_{ijm3} \lambda_{m3n3}^{-1} \lambda_{n3pq} \rangle. \quad (15)$$

Выражения содержат только одноточечные моменты относительно упругих характеристик материала, поэтому достаточно задать одноточечную плотность упругих характеристик. Для  $N$ -компонентного материала одноточечная плотность имеет вид

$$f(\lambda_{ijmn}) = \sum_{k=1}^N c_k \delta(\lambda_{ijmn} - \lambda_{ijmn}^k), \quad (16)$$

где  $c_k, \lambda_{ijmn}^k$  — соответственно объемное содержание и тензор модулей упругости;  $k$  — компонента. Отсюда для  $N$ -компонентного слоистого композитного материала находим

$$\langle \varphi(\lambda_{ijmn}) \rangle = \sum_{k=1}^N c_k \varphi(\lambda_{ijmn}^k). \quad (17)$$

Формулы (15)–(17) позволяют вычислить эффективные постоянные слоистого композита с произвольной симметрией материала слоев. Однако практическое их использование связано с громоздкими операциями обращения, осреднения и свертывания. Так как в реальных материалах слои обладают определенной симметрией, то целесообразно вычислять эффективные постоянные с учетом симметрии слоев.

**Изотропные слои.** Если слои изотропны, то упругие характеристики имеют вид

$$\lambda_{ijmn} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}), \quad (18)$$

где  $\lambda, \mu$  – характеристики Ламе.

Подставляя (18) в (7), находим

$$u_{i,3}^0 = \frac{1}{\mu} A_i - 2 \langle \varepsilon_{i3} \rangle, \quad u_{3,3}^0 = \frac{1}{\lambda + 2\mu} A_3 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \langle \varepsilon_{kk} \rangle - \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad (i, k = 1, 2). \quad (19)$$

Осредняя (19), определяем постоянные интегрирования

$$A_i = 2 \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle \langle \varepsilon_{i3} \rangle, \quad A_3 = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left[ \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right] \quad (i, k = 1, 2). \quad (20)$$

На основе (6), (19), (20) находим микродеформации

$$\varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad \varepsilon_{i3} = \frac{1}{\mu} \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle, \quad (21)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left[ \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle - \lambda \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \right] \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \varepsilon_{33} \quad (i, k = 1, 2).$$

Подставляя (18), (21) в (2), получаем выражения микронапряжений

$$\sigma_{ij} = 2\mu \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left( \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle + \right.$$

$$\left. + 2\mu \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \right) \langle \varepsilon_{kk} \rangle \delta_{ij} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij}, \quad (22)$$

$$\sigma_{i3} = 2 \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle, \quad \sigma_{33} = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right) \quad (i, k = 1, 2).$$

Осредняя (22), находим зависимости между макронапряжениями и макродеформациями

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) \langle \varepsilon_{ij} \rangle + (\lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle) \delta_{ij}, \quad (23)$$

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = 2\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, k = 1, 2),$$

где эффективные упругие постоянные определяются формулами

$$\lambda_{11}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^2 + 4 \left\langle \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \right\rangle,$$

$$\lambda_{12}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \right\rangle, \quad (24)$$

$$\lambda_{13}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle, \quad \lambda_{33}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1}, \quad \lambda_{44}^* = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1}.$$

Если обозначить объемные содержания и характеристики Ламе наполнителя, матричного материала и межфазных слоев соответственно  $c_1, \lambda_1, \mu_1, c_2, \lambda_2, \mu_2, c_3, \lambda_3, \mu_3$ , то эффективные упругие постоянные (24) слоистого КМ будут определяться формулами

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^* &= \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\lambda_v + 2\mu_v} \right)^{-1} \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_v}{\lambda_v + 2\mu_v} \right)^2 + 4 \left[ \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \mu_v (\lambda_v + \mu_v)}{\lambda_v + 2\mu_v} \right], \\ \lambda_{12}^* &= \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\lambda_v + 2\mu_v} \right)^{-1} \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_v}{\lambda_v + 2\mu_v} \right)^2 + 2 \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_v \mu_v}{\lambda_v + 2\mu_v} \right), \\ \lambda_{13}^* &= \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\lambda_v + 2\mu_v} \right)^{-1} \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_v}{\lambda_v + 2\mu_v} \right), \quad \lambda_{33}^* = \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\lambda_v + 2\mu_v} \right)^{-1}, \quad \lambda_{44}^* = \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\mu_v} \right)^{-1}, \\ k^* &= \frac{1}{2}(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*), \quad m^* = \frac{1}{2}(\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*). \end{aligned} \tag{25}$$

**Ортотропные слои.** Рассмотрим слоистый композит, составленный из ортотропных слоев, плоскости симметрии которых совпадают с координатными плоскостями. Зависимости между напряжениями и деформациями в микроточке запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda_{11}\varepsilon_{11} + \lambda_{12}\varepsilon_{22} + \lambda_{13}\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{23} = 2\lambda_{44}\varepsilon_{23}, \\ \sigma_{22} &= \lambda_{12}\varepsilon_{11} + \lambda_{22}\varepsilon_{22} + \lambda_{23}\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{13} = 2\lambda_{55}\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{33} &= \lambda_{13}\varepsilon_{11} + \lambda_{23}\varepsilon_{22} + \lambda_{33}\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{12} = 2\lambda_{66}\varepsilon_{12}. \end{aligned} \tag{26}$$

Согласно (5), (6) имеем

$$\begin{aligned} \lambda_{55}(2\langle \varepsilon_{13} \rangle + u_{1,3}^0) &= C_1, \quad \lambda_{44}(2\langle \varepsilon_{23} \rangle + u_{2,3}^0) = C_2, \\ \lambda_{13}\langle \varepsilon_{11} \rangle + \lambda_{23}\langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{33}(\langle \varepsilon_{33} \rangle + u_{3,3}^0) &= C_3, \end{aligned} \tag{27}$$

где  $C_1, C_2, C_3$  — постоянные.

Решая (27) относительно производных от флуктуаций перемещений и проводя осреднение, находим

$$\begin{aligned} C_1 &= 2\langle \lambda_{55}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{13} \rangle, \quad C_2 = 2\langle \lambda_{44}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{23} \rangle, \\ C_3 &= \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} (\langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle). \end{aligned} \tag{28}$$

На основе соотношений (6), (26) — (28) получим выражения микронапряжений через макродеформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= [\lambda_{11} + \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} (\langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{13})] \langle \varepsilon_{11} \rangle + \\ &+ [\lambda_{12} + \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} (\langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{23})] \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{33} \rangle, \\ \sigma_{22} &= [\lambda_{12} + \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} (\langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{13})] \langle \varepsilon_{11} \rangle + \\ &+ [\lambda_{22} + \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} (\langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{23})] \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{33} \rangle, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} (\langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle), \\ \sigma_{23} &= 2 \langle \lambda_{44}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{23} \rangle, \quad \sigma_{13} = 2 \langle \lambda_{55}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{13} \rangle, \quad \sigma_{12} = 2 \lambda_{66} \langle \varepsilon_{12} \rangle.\end{aligned}$$

Осредняя соотношения (29), получаем зависимости между макронапряжениями и макродеформациями

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{11} \rangle &= \lambda_{11}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle + \lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad \langle \sigma_{23} \rangle = 2 \lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{23} \rangle, \\ \langle \sigma_{22} \rangle &= \lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle + \lambda_{22}^* \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{23}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad \langle \sigma_{13} \rangle = 2 \lambda_{55}^* \langle \varepsilon_{13} \rangle, \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle + \lambda_{23}^* \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad \langle \sigma_{12} \rangle = 2 \lambda_{66}^* \langle \varepsilon_{12} \rangle,\end{aligned}\tag{30}$$

где эффективные постоянные определяются формулами

$$\begin{aligned}\lambda_{11}^* &= \langle \lambda_{11} \rangle + \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle^2 \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{13}^2 \lambda_{33}^{-1} \rangle, \\ \lambda_{12}^* &= \langle \lambda_{12} \rangle + \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{13} \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle, \\ \lambda_{13}^* &= \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1}, \quad \lambda_{22}^* = \langle \lambda_{22} \rangle + \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle^2 \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{23}^2 \lambda_{33}^{-1} \rangle, \\ \lambda_{23}^* &= \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1}, \quad \lambda_{33}^* = \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1}, \quad \lambda_{44}^* = \langle \lambda_{44}^{-1} \rangle^{-1}, \quad \lambda_{55}^* = \langle \lambda_{55}^{-1} \rangle^{-1}, \quad \lambda_{66}^* = \langle \lambda_{66} \rangle.\end{aligned}\tag{31}$$

Если слои композита трансверсально изотропны с плоскостью изотропии  $x_1x_2$ , то в зависимостях (26), (30), (31) следует положить

$$\begin{aligned}\lambda_{11} &= \lambda_{22}, \quad \lambda_{13} = \lambda_{23}, \quad \lambda_{44} = \lambda_{55}, \quad \lambda_{11} - \lambda_{22} = 2 \lambda_{66}, \\ \lambda_{11}^* &= \lambda_{22}^*, \quad \lambda_{13}^* = \lambda_{23}^*, \quad \lambda_{44}^* = \lambda_{55}^*, \quad \lambda_{11}^* - \lambda_{22}^* = 2 \lambda_{66}^*,\end{aligned}\tag{32}$$

т.е. в макрообъеме материал также трансверсально изотропен.

Если обозначить объемные содержания и модули упругости наполнителя, матричного материала и межфазных слоев соответственно  $c_v, \lambda_{11v}, \lambda_{12v}, \lambda_{13v}, \lambda_{22v}, \lambda_{23v}, \lambda_{33v}, \lambda_{44v}, \lambda_{55v}, \lambda_{66v}$  ( $v = 1, 2, 3$ ), то эффективные упругие модули упругости (31) слоистого КМ будут определяться формулами

$$\begin{aligned}\lambda_{11}^* &= \sum_{v=1}^3 c_v \lambda_{11v} + \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_{13v}}{\lambda_{33v}} \right)^2 \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\lambda_{33v}} \right)^{-1} - \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_{13v}^2}{\lambda_{33v}} \right), \\ \lambda_{12}^* &= \sum_{v=1}^3 c_v \lambda_{12v} + \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_{13v}}{\lambda_{33v}} \right) \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_{23v}}{\lambda_{33v}} \right) \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\lambda_{33v}} \right)^{-1} - \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_{13v} \lambda_{23v}}{\lambda_{33v}} \right), \\ \lambda_{13}^* &= \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_{13v}}{\lambda_{33v}} \right) \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\lambda_{33v}} \right)^{-1}, \\ \lambda_{22}^* &= \sum_{v=1}^3 c_v \lambda_{22v} + \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_{23v}}{\lambda_{33v}} \right)^2 \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\lambda_{33v}} \right)^{-1} - \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_{23v}^2}{\lambda_{33v}} \right),\end{aligned}$$

$$\lambda_{23}^* = \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_{23v}}{\lambda_{33v}} \right) \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\lambda_{33v}} \right)^{-1}, \quad \lambda_{33}^* = \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\lambda_{33v}} \right)^{-1},$$

$$\lambda_{44}^* = \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\lambda_{44v}} \right)^{-1}, \quad \lambda_{55}^* = \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\lambda_{55v}} \right)^{-1}, \quad \lambda_{66}^* = \sum_{v=1}^3 c_v \lambda_{66v}. \quad (33)$$

**Численные результаты.** Численное исследование влияния несовершенных условий контакта компонентов на эффективные упругие свойства слоистых КМ стохастической структуры проведено для контактирующих слоев из алюмоборосиликатного стекла и отвержденного эпоксидного связующего, которые разделены межфазными слоями. Межфазные слои рассматриваются как третий компонент, состоящий из аппретирующих покрытий, приповерхностных частей матрицы и наполнителя, а также дефектов в виде микротрещин и микропор. Так как некоторая часть материала в окрестности микротрещины не несет нагрузку, то микротрещины моделируются микропорами.

Упругие модули объемного сжатия и сдвига компонентов принимаем соответственно [14] такими:

$$K_c = 33,333 \text{ ГПа}; \quad \mu_c = 25 \text{ ГПа}; \quad K_3 = 3,333 \text{ ГПа}; \quad \mu_3 = 1,111 \text{ ГПа}. \quad (34)$$

Для обеспечения равномерной передачи усилий аппретирующее покрытие целесообразно применять с модулями упругости, промежуточными между соответствующими модулями матрицы и наполнителя. Поэтому в безразмерных единицах, представляющих отношения соответствующих модулей к модулю сдвига матрицы  $\mu_3$ , принимаем такие значения

$$K_1 = 30; \quad \mu_1 = 22,5; \quad K_2 = 3; \quad \mu_2 = 1; \quad K_0 = 16,5; \quad \mu_0 = 11,75. \quad (35)$$

где  $K_0$ ,  $\mu_0$  — соответственно модули объемного сжатия и сдвига материала межфазного слоя без микропор. Соответствующие модули межфазного слоя с пористостью  $p$  определяются формулами [15]

$$K_3 = \frac{4K_0\mu_0 + (1-p)^2}{4\mu_0 + (3K_0 - 4\mu_0)p}, \quad \mu_3 = \frac{\mu_0(9K_0 + 8\mu_0)(1-p)^2}{9K_0 + 8\mu_0 - (3K_0 - 4\mu_0)p}. \quad (36)$$

Объемные содержания наполнителя, связующего и пористого межфазного слоя обозначаем соответственно  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ . При этом будем пользоваться соотношением

$$c_3 = \frac{h_3}{h_1} c_1, \quad (37)$$

где  $h_1$ ,  $h_3$  — соответственно толщины слоев наполнителя и межфазных слоев. В вычислениях принято

$$\frac{h_3}{h_1} = 0,01.$$

На рис. 1 и 2 представлены зависимости эффективных модулей упругости  $k^*$ ,  $m^*$ ,  $\mu^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$  от объемного содержания слоев наполнителя  $c_1$  при заданных пористостях  $p$  межфазных слоев. Вычисления проведены на основе формул (25), (34)–(37) для случая изотропных компонентов слоистого КМ. Здесь объемное содержание наполнителя  $c_1$  находит-

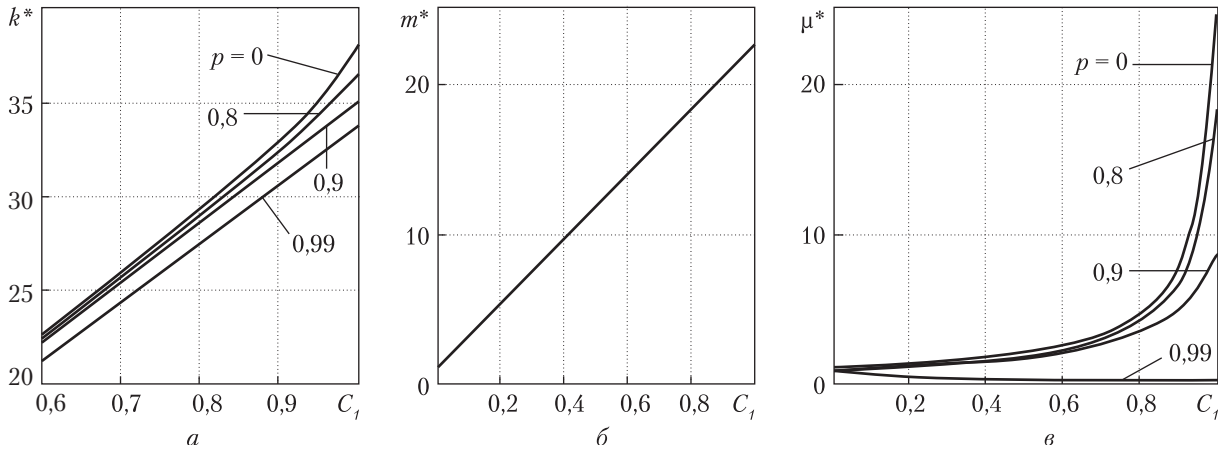


Рис. 1

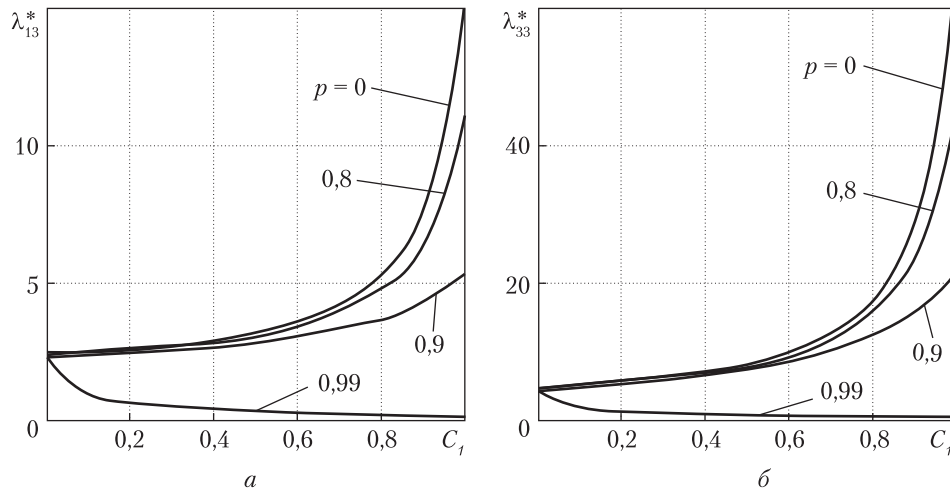


Рис. 2

ся в допустимом интервале  $0 \leq c_1 \leq 0,99$  согласно (37). На рис. 3 приведены зависимости эффективных поперечного  $\nu_{21}^*$  и продольного  $\nu_{31}^*$  коэффициентов Пуассона от объемного содержания наполнителя  $c_1$ , вычисленных согласно формулам

$$\nu_{21}^* = \frac{(k^* - m^*)\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}{(k^* + m^*)\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}, \quad \nu_{31}^* = \frac{2m^*\lambda_{13}^{*2}}{(k^* + m^*)\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}. \quad (38)$$

Анализ зависимостей эффективных модулей упругости от объемного содержания наполнителя  $c_1$  и пористости межфазных слоев  $p$  позволяет сделать следующие выводы. Увеличение пористости  $p$  межфазных слоев, эквивалентное уменьшению адгезии, приводит к уменьшению эффективных модулей  $k^*$ ,  $\mu^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$ . При этом с ростом объемного содержания наполнителя  $c_1$  модуль  $k^*$  растет при произвольных значениях пористости  $p$  межфазных слоев. В то же время модули  $\mu^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$  растут с ростом  $c_1$  лишь в интервалах пористостей соответственно  $0 \leq p \leq 0,97046$ ,  $0 \leq p \leq 0,94115$ ,  $0 \leq p \leq 0,961713$ . Для более



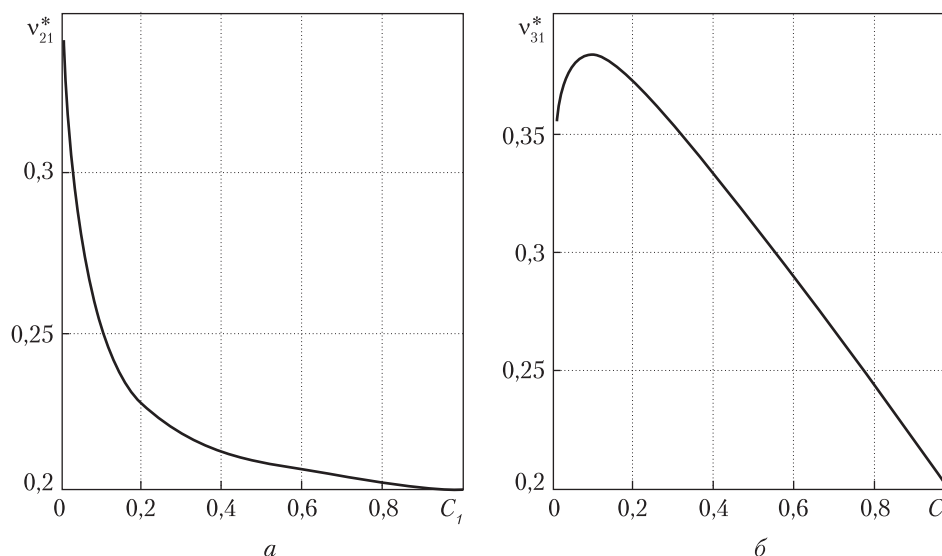


Рис. 3

высоких значений пористости значения соответствующих модулей уменьшаются с ростом  $c_1$ . Однако поперечный модуль сдвига  $m^*$  является исключением из отмеченных закономерностей, его значения не зависят от пористости  $p$  межфазных слоев для всех  $c_1$ .

Кривые зависимостей эффективных коэффициентов Пуассона  $v_{21}^*$ ,  $v_{31}^*$  от объемного содержания наполнителя  $c_1$  имеют соответственно монотонный и немонотонный характер. При этом они не зависят от пористости  $p$  межфазных слоев.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Khoroshun L.P. Statistical theory of deformation of unidirectional fibrous materials. *Int. Appl. Mech.* 1968. **4**, № 7. P. 5–9.
2. Khoroshun L.P. Elastic properties of materials reinforced by unidirectional short fibers. *Int. Appl. Mech.* 1972. **8**, № 12. P. 1358–1363.
3. Khoroshun L.P. Prediction of thermoelastic properties of materials strengthened by unidirectional discrete fibers. *Int. Appl. Mech.* 1974. **10**, № 12. P. 1288–1293.
4. Nazarenko L., Stolarski H., Khoroshun L., Altenbach H. Effective thermo-elastic properties of random composites with orthotropic and aligned ellipsoidal inhomogeneties. *Int. J. of Solids and Structures*. 2018. **136-137**. P. 220–240.
5. Sangani A.S., Mo G. Elastic interactions in particulate composites with perfect as well as imperfect interfaces. *J. Mech. Phys. Solids*. 1997. **45**. P. 2001–2031.
6. Achenbach J.D., Zhu H. Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites. *J. Mech. Phys. Solids*. 1989. **37**. P. 381–393.
7. Benveniste Y. The effective mechanical behavior of composite materials with imperfect contact between the constituents. *Mech. Mater.* 1985. **4**. P. 197–208.
8. Benveniste Y., Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mech. Mater.* 2001. **33**. P. 309–323.
9. Gu S.T., He Q.C. Interfacial discontinuity relations for coupled multifield phenomena and their application to the modeling of thin interphase as imperfect interfaces. *J. Mech. Phys.* 2011. **59**. P. 1413–1426.
10. Gu S.T., Liu J.T., He Q.C. Size-dependent effective elastic moduli of particulate composites with interfacial displacement and traction discontinuities. *Int. J. Solids Struct.* 2014. **51**. P. 2283–2296.

11. Hashin Z. Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface. *Mech. Mater.* 1990. **8**. P. 333–348.
12. Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. A model of cylindrical inhomogeneity with spring layer interface and its application to analysis of short-fiber composites. *Composite Structures.* 2017. **160**. P. 635–652.
13. Hashin Z. Thin interphase imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *J. Mech. Phys. Solids.* 2002. **50**. P. 2509–2537.
14. Крегерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов. *Механика композит. материалов.* 1988. № 3. С. 433–441.
15. Khoroshun L.P. Effective elastic properties of unidirectional fibrous composite materials with interfacial defects. *Int. Appl. Mech.* 2018. **54**. № 6. P. 628–641.

Надійшло до редакції 15.02.2019

## REFERENCES

1. Khoroshun, L. P. (1968). Statistical theory of deformation of unidirectional fibrous materials. *Int. Appl. Mech.*, 4, No.7, pp. 5-9.
2. Khoroshun, L. P. (1972). Elastic properties of materials reinforced by unidirectional short fibers. *Int. Appl. Mech.*, 8, No.12, pp. 1358-1363.
3. Khoroshun, L. P. (1974). Prediction of thermoelastic properties of materials strengthened by unidirectional discrete fibers. *Int. Appl. Mech.*, 10, No.12, pp. 1288-1293.
4. Nazarenko, L., Stolarski, H., Khoroshun, L. & Altenbach, H. (2018). Effective thermo-elastic properties of random composites with orthotropic and aligned ellipsoidal inhomogenities. *Int. J. of Solids and Structures*, 136-137, pp. 220-240.
5. Sangani, A. S. & Mo, G. (1997). Elastic interactions in particulate composites with perfect as well as imperfect interfaces. *J. Mech. Phys. Solids*, 45, pp. 2001-2031.
6. Achenbach, J. D. & Zhu, H. (1989). Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 37, pp. 381-393.
7. Benveniste, Y. (1985). The effective mechanical behavior of composite materials with imperfect contact between the constituents. *Mech. Mater.*, 4. pp. 197-208.
8. Benveniste, Y. & Miloh, T. (2001). Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mech. Mater.*, 33, pp. 309-323.
9. Gu, S. T. & He, Q. C. (2011). Interfacial discontinuity relations for coupled multifield phenomena and their application to the modeling of thin interphase as imperfect interfaces. *J. Mech. Phys.*, 59, pp. 1413-1426.
10. Gu, S. T., Liu, J. T. & He, Q. C. (2014). Size-dependent effective elastic moduli of particulate composites with interfacial displacement and traction discontinuities. *Int. J. Solids Struct.*, 51, pp. 2283-2296.
11. Hashin, Z. (1990). Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface. *Mech. Mater.*, 8, pp. 333-348.
12. Nazarenko, L., Stolarski, H. & Altenbach, H. (2017). A model of cylindrical inhomogeneity with spring layer interface and its application to analysis of short-fiber composites. *Composite Structures*, 160, pp. 635-652.
13. Hashin, Z. (2002). Thin interphase imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 50, pp. 2509-2537.
14. Kregers, A. F. (1988). Mathematical modeling of thermal expansion of spatially reinforced composites. *Mechanics of Composite Materials*, No. 3, pp. 433-441 (in Russian).
15. Khoroshun, L. P. (2018). Effective elastic properties of unidirectional fibrous composite materials with interfacial defects. *Int. Appl. Mech.*, 54, No. 6, pp. 628-641.

Received 15.02.2019

Л.П. Хорошун, О.І. Левчук

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ  
E-mail: lkhoshun@ukr.net, 2013levchuk@gmail.com

### ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ ВЛАСТИВОСТІ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТІВ ПРИ НЕДОСКОНАЛІЙ АДГЕЗІЇ

Розглянуто задачу про ефективні пружні властивості шаруватого композитного матеріалу стохастичної структури при недосконалій адгезії, яка моделюється міжфазним шаром з дефектами у вигляді мікропор. На поверхнях поділу міжфазного шару з шаром наповнювача і матриці виконуються умови досконалого контакту у вигляді неперервності переміщень і поверхневих напружень. Міжфазні шари розглядаються як третій компонент, що складається із пористих приповерхневих шарів двох компонентів і апретуючих покриттів. При розв'язанні задачі використано стохастичні диференціальні рівняння в переміщеннях для багатокомпонентного КМ шаруватої структури з ізотропними і анізотропними компонентами. На основі отриманого розв'язку досліджено ефективні властивості трикомпонентного КМ шаруватої структури. Побудовано криві залежностей ефективних пружних постійних шаруватого матеріалу з ізотропними компонентами від об'ємного вмісту наповнювача і пористості міжфазного шару.

**Ключові слова:** недосконала адгезія, ефективні пружні властивості, шаруватий композит, стохастичні рівняння, умови недосконалого контакту, пористий міжфазний шар.

L.P. Khoroshun, O.I. Levchuk

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev  
E-mail: lkhoshun@ukr.net, 2013levchuk@gmail.com

### EFFECTIVE ELASTIC PROPERTIES OF LAYERED COMPOSITES UNDER IMPERFECT ADHESION

The problem of the effective elastic properties of a layered composite material of a stochastic structure with imperfect adhesion, which is modeled by an interphase layer with defects in the form of micropores, is considered. On the interfaces of the interphase layer with the layers of a filler and a matrix, perfect contact conditions are performed in the form of continuity of displacements and surface stresses. Interphase layers are considered as the third component, consisting of the surface layers of two components and the coupling coatings. The solution of the problem is based on stochastic differential equations of elasticity in displacements for a multicomponent composite material of the layered structure with isotropic and anisotropic components. On the basis of the solution, the effective properties of a three-component composite materials of the layered structure are investigated. The dependences of the effective elastic constants of the layered material with isotropic components on the volume content of a filler and the porosity of the interphase layer are constructed.

**Keywords:** imperfect adhesion, effective elastic properties, layered composite, stochastic equations, imperfect interface conditions, porous interphase layers.