ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.018
УДК 517.988

Я.И. Ведель, С.В. Денисов, В.В. Семёнов

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
E-mail: yana.vedel@gmail.com, sireukr@gmail.com, semenov.volodya@gmail.com

Сходимость брэгмановского экстраградиентного метода

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины С.И. Ляшко

Доказана сходимость нового варианта экстраградиентного метода для приближенного решения вариационных неравенств с псевдомонотонными и липшицевыми операторами. В методе используется дивергенция Брэгмана вместо евклидового расстояния и новая регулировка величины шага, не требующая знания константы Липшица оператора. В отличие от применявшихся ранее правил выбора величины шага в предлагаемом методе не производится дополнительных вычислений значений оператора и прокс-отображения.

***Ключевые слова**: вариационное неравенство, экстраградиентный метод, дивергенция Брэгмана, сходимость.*

Многие задачи исследования операций и математической физики могут быть записаны в форме вариационных неравенств. Особенно популярны вариационные неравенства в математической экономике, математическом моделировании транспортных потоков и теории игр. Заметим, что с появлением генерирующих состязательных нейронных сетей (generative adversarial network (GAN)) интерес к алгоритмам решения вариационных неравенств возник и в среде специалистов в области машинного обучения.

Наиболее известным обобщением метода проекции градиента для вариационных неравенств является экстраградиентный метод Г.М. Корпелевич [1]. Исследованию этого алгоритма посвящено большое количество публикаций. В частности, предлагались модификации алгоритма Корпелевич с одним метрическим проектированием на допустимое множество [2—6]. Одним из современных вариантов экстраградиентного метода является проксимальный зеркальный метод А.С. Немировского [7]. Также интересный метод двойственной экстраполяции предложил Ю.Е. Нестеров [8]. А недавно [9, 10] исследованы двухэтапные проксимальные зеркальные методы – модификации двухэтапного проксимального алгоритма [11] с использованием дивергенции Брэгмана вместо евклидового расстояния.

В данном сообщении рассматривается брэгмановский экстраградиентный метод [7] с новой регулировкой шага, не требующей знания константы Липшица оператора. В отличие от применявшихся ранее правил выбора величины шага [5, 6, 12] в предлагаемом методе не производится дополнительных вычислений значений оператора и прокс-отображения. Для вариационных неравенств с псевдомонотонными и липшицевыми операторами, действующими в конечномерном линейном нормированном пространстве, доказана теорема сходимости метода.

Постановка задачи и описание алгоритма. Пусть E — конечномерное действительное линейное пространство. Это пространство снабдим нормой $\|\cdot\|$. Двойственное пространство обозначим E^*. Для $a \in E^*$ и $b \in E$ будем обозначать через (a, b) значение линейной функции a в точке b. Двойственная норма $\|\cdot\|_*$ на E^* определена стандартным способом: $\|a\|_* = \max\{(a,b) : \|b\| = 1\}$.

Пусть C — непустое подмножество пространства E, A — оператор, действующий из E в E^*. Рассмотрим вариационное неравенство:

найти $x \in C$: $\quad (Ax, y - x) \geqslant 0 \quad \forall y \in C$, (1)

множество решений которого обозначим S.

Предположим, что выполнены следующие условия:

множество $C \subseteq E$ — выпуклое и замкнутое;

оператор $A : E \to E^*$ — псевдомонотонный и липшицевый с константой $L > 0$ на C;

множество S не пусто.

Введем необходимые для формулировки алгоритма конструкции. Пусть функция $\varphi : E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ удовлетворяет условиям:

$\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \subseteq E$ непустое выпуклое множество;

φ непрерывно дифференцируема на $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$;

если $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \ni x_n \to x \in \operatorname{bd}\operatorname{dom}\varphi$, то $\|\nabla\varphi(x_n)\|_* \to +\infty$;

φ сильно выпукла относительно нормы $\|\cdot\|$ с константой сильной выпуклости $\sigma > 0$:

$$\varphi(a) \geqslant \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a - b) + \frac{\sigma}{2}\|a - b\|^2 \quad \forall a \in \operatorname{dom}\varphi,\ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Соответствующая функции φ дивергенция Брэгмана задается формулой [13]

$$V(a,b) = \varphi(a) - \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a - b) \quad \forall a \in \operatorname{dom}\varphi,\ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Замечание 1. Примеры практически важных дивергенций Брэгмана приведены в [13].

Имеет место полезное 3-точечное тождество [13]:

$$V(a,c) = V(a,b) + V(b,c) + (\nabla\varphi(b) - \nabla\varphi(c), a - b). \tag{2}$$

Из сильной выпуклости функции φ следует оценка

$$V(a,b) \geqslant \frac{\sigma}{2}\|a - b\|^2 \quad \forall a \in \operatorname{dom}\varphi,\ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi. \tag{3}$$

Пусть $K \subseteq \operatorname{dom}\varphi$ — непустое замкнутое выпуклое множество, причем $K \cap \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi = \varnothing$. Рассмотрим сильно выпуклые задачи минимизации вида

$$P_x^K(a) = \arg\min_{y \in K}\{-(a, y - x) + V(y, x)\} \quad \forall a \in E^*,\ x \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi. \tag{4}$$

Известно [13], что задача (4) имеет единственное решение $z \in K \cap \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$, причем

$$-(a, y - z) + (\nabla\varphi(z) - \nabla\varphi(x), y - z) \geqslant 0 \quad \forall y \in K. \tag{5}$$

Отображение $P_x^K : E^* \to K \cap \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ называют прокс-отображением.

Опишем предлагаемый алгоритм решения вариационного неравенства (1).

Алгоритм 1. Выбираем элемент $x_1 \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi$, $\tau \in (0, \sigma)$ и положительное число λ_1. Полагаем $n = 1$.

Шаг 1. Вычислить

$$y_n = P_{x_n}^C(-\lambda_n A x_n).$$

Шаг 2. Если $y_n = x_n$, то СТОП, иначе вычислить

$$x_{n+1} = P_{x_n}^C(-\lambda_n A y_n),$$

Шаг 3. Вычислить

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau\sqrt{\dfrac{2}{\sigma}}\dfrac{\sqrt{V(y_n, x_n)}}{\|Ay_n - Ax_n\|_*}\right\}, & \text{если } Ax_n \neq Ay_n, \\ \lambda_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положить $n := n + 1$ и перейти на шаг 1.

Замечание 2. В отличие от правил выбора λ_n из работ [5, 6, 12] в алгоритме 1 не производится дополнительных вычислений значений оператора A и прокс-отображения $P_{x_n}^C$.

Замечание 3. Последовательность (λ_n) неубывающая и ограничена снизу числом $\min\left\{\lambda_1, \dfrac{\tau}{L}\right\}$. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n > 0$.

Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ в алгоритме 1 имеем $y_n = x_n$, то $x_n \in S$. Действительно, тогда

$$y_n = P_{x_n}^C(-\lambda_n A x_n).$$

Из неравенства (5) следует

$$(Ax_n, y - x_n) + \frac{(\nabla\varphi(x_n) - \nabla\varphi(x_n), y - x_n)}{\lambda_n} = (Ax_n, y - x_n) \geqslant 0 \quad \forall y \in C,$$

то есть $x_n \in S$.

Предположим, что для всех $n \in \mathbb{N}$ условие остановки на шаге 2 не выполняется и перейдем к обоснованию сходимости алгоритма 1.

Сходимость алгоритма. Докажем важную оценку, связывающую дивергенцию Брэгмана между порожденными алгоритмом 1 точками и произвольным элементом множества решений S.

Лемма 1. *Для последовательностей* (x_n), (y_n), *порожденных алгоритмом 1, имеет место неравенство*

$$V(z, x_{n+1}) \leqslant V(z, x_n) - \left(1 - \frac{\mu_n}{\sigma}\right)V(y_n, x_n) - \left(1 - \frac{\mu_n}{\sigma}\right)V(x_{n+1}, y_n),$$

где $z \in S$, $\mu_n = \tau(\lambda_n / \lambda_{n+1})$.

Доказательство. Пусть $z \in S$. Запишем 3-точечное тождество (2)

$$V(z, x_{n+1}) = V(z, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + (\nabla\varphi(x_{n+1}) - \nabla\varphi(x_n), x_{n+1} - z). \tag{6}$$

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2019. № 5

Из определения точек x_{n+1} и (5) следует

$$\lambda_n(Ay_n, z - x_{n+1}) + (\nabla\varphi(x_{n+1}) - \nabla\varphi(x_n), z - x_{n+1}) \geqslant 0. \tag{7}$$

Используя неравенство (7) для оценки скалярного произведения в (6), получаем

$$V(z, x_{n+1}) \leqslant V(z, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + \lambda_n(Ay_n, z - x_{n+1}). \tag{8}$$

Третье слагаемое в (8) представим в виде

$$V(x_{n+1}, x_n) = V(x_{n+1}, y_n) + V(y_n, x_n) + (\nabla\varphi(y_n) - \nabla\varphi(x_n), x_{n+1} - y_n).$$

Получаем

$$V(z, x_{n+1}) \leqslant V(z, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) +$$
$$+(\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n Ay_n - \nabla\varphi(y_n), x_{n+1} - y_n) + \lambda_n(Ay_n, z - y_n).$$

Из псевдомонотонности оператора A следует $(Ay_n, z - y_n) \leqslant 0$. Таким образом,

$$V(z, x_{n+1}) \leqslant V(z, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) +$$
$$+(\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n Ay_n - \nabla\varphi(y_n), x_{n+1} - y_n). \tag{9}$$

Поскольку $x_{n+1} \in C$, то

$$(\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n Ay_n - \nabla\varphi(y_n), x_{n+1} - y_n) = \underbrace{(\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n Ax_n - \nabla\varphi(y_n), x_{n+1} - y_n)}_{\leqslant 0} +$$
$$+\lambda_n(Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \leqslant \lambda_n(Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n). \tag{10}$$

Учитывая (10) в (9), получаем

$$V(z, x_{n+1}) \leqslant V(z, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) + \lambda_n(Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n). \tag{11}$$

Теперь оценим слагаемое $\lambda_n(Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n)$ с помощью неравенства (3). Имеем

$$\lambda_n(Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \leqslant \lambda_n \|Ax_n - Ay_n\|_* \|x_{n+1} - y_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\sigma}\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\tau\sqrt{V(y_n, x_n)}\sqrt{V(x_{n+1}, y_n)} \leqslant \frac{\mu_n}{\sigma}V(y_n, x_n) + \frac{\mu_n}{\sigma}V(x_{n+1}, y_n). \tag{12}$$

Применив (12) в (11), получим

$$V(z, x_{n+1}) \leqslant V(z, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) + \frac{\mu_n}{\sigma}V(y_n, x_n) + \frac{\mu_n}{\sigma}V(x_{n+1}, y_n) =$$
$$= V(z, x_n) - \left(1 - \frac{\mu_n}{\sigma}\right)V(x_{n+1}, y_n) - \left(1 - \frac{\mu_n}{\sigma}\right)V(y_n, x_n),$$

что и требовалось доказать.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть множество $C \subseteq E$ — выпуклое и замкнутое, оператор $A : E \to E^*$ — псевдомонотонный и липшицевый с константой $L > 0$ и $S \neq \varnothing$. Тогда последовательности (x_n) и (y_n), порожденные алгоритмом* 1, *сходятся к некоторой точке $\overline{z} \in S$.*

Замечание 4. В дальнейшем мы рассмотрим рандомизированную версию алгоритма 1 и проведем анализ сходимости. Это поможет продвинуться в направлении использования метода для решения вариационных неравенств большого размера и для обучения генерирующих состязательных нейронных сетей (GAN).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Корпелевич Г.М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач. *Экономика и мат. методы*. 1976. **12**, № 4. С. 747—756.
2. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM J. Control Optim*. 2000. **38**. P. 431—446. doi: https://doi.org/10.1137/S0363012998338806
3. Semenov V.V. A strongly convergent splitting method for systems of operator inclusions with monotone operators. *J. Autom. Inform. Sci*. 2014. **46**, № 5. P. 45–56. doi: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i5.40
4. Semenov V.V. Hybrid splitting methods for the system of operator inclusions with monotone operators. *Cybern. Syst. Anal*. 2014. **50**. P. 741—749. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-014-9664-y
5. Denisov S.V., Semenov V.V., Chabak L.M. Convergence of the modified extragradient method for variational inequalities with non-lipschitz operators. *Cybern. Syst. Anal*. 2015. **51**. P. 757—765. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-015-9768-z
6. Verlan D.A., Semenov V.V., Chabak L.M. A strongly convergent modified extragradient method for variational inequalities with non-Lipschitz operators. *J. Autom. Inform. Sci*. 2015. **47**, № 7. P. 31—46. doi: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40
7. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence O(1/t) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM J. Optim*. 2004. **15**. P. 229—251. doi: https://doi.org/10.1137/S1052623403425629
8. Nesterov Yu. Dual extrapolation and its applications to solving variational inequalities and related problems. *Math. Program*. 2007. **109**. Iss. 2–3. P. 319—344. doi: https://doi.org/10.1007/s10107-006-0034-z
9. Semenov V.V. A Version of the mirror descent method to solve variational inequalities. *Cybern. Syst. Anal*. 2017. **53**. P. 234—243. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-017-9923-9
10. Semenov V.V. Modified extragradient method with Bregman divergence for variational inequalities. *J. Autom. Inform. Sci*. 2018. **50**, Iss. 8. P. 26—37. doi: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i8.30
11. Lyashko S.I., Semenov V.V. A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. *Optimization and its applications in control and data sciences*: Goldengorin, B. (ed.). Cham: Springer, 2016. P. 315—325 (Springer Optimization and Its Applications; Vol. 115). doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10
12. Khobotov E.N. Modification of the extra-gradient method for solving variational inequalities and certain optimization problems. *USSR Comput. Math. Math. Phys*. 1987. **27**, Iss. 5. P. 120—127. doi: https://doi.org/10.1016/0041-5553(87)90058-9
13. Beck A. First-order methods in optimization. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2017. P. 494. doi: https://doi.org/10.1137/1.9781611974997

Поступило в редакцию 04.03.2019

REFERENCES

1. Korpelevich, G. M. (1976). The extragradient method for finding saddle points and other problems. Ekonomika i Matematicheskie Metody, 12, No. 4, pp. 747-756 (in Russian).
2. Tseng, P. (2000). A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. SIAM J. Control Optim., 38, pp. 431-446. doi: https://doi.org/10.1137/S0363012998338806
3. Semenov, V. V. (2014). A strongly convergent splitting method for systems of operator inclusions with monotone operators. J. Autom. Inform. Sci., 46, No. 5, pp. 45-56. doi: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i5.40
4. Semenov, V. V. (2014). Hybrid splitting methods for the system of operator inclusions with monotone operators. Cybern. Syst. Anal., 50, pp. 741-749. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-014-9664-y
5. Denisov, S. V., Semenov, V. V. & Chabak, L. M. (2015). Convergence of the modified extragradient method for variational inequalities with non-Lipschitz operators. Cybern. Syst. Anal., 51, pp. 757-765. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-015-9768-z
6. Verlan, D. A., Semenov, V. V. & Chabak, L. M. (2015). A strongly convergent modified extragradient method for variational inequalities with non-Lipschitz operators. J. Autom. Inform. Sci., 47, No. 7, pp. 31-46. doi: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40

7. Nemirovski, A. (2004). Prox-method with rate of convergence O(1/t) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM J. Optim.*, 15, pp. 229-251. doi: https://doi.org/10.1137/S1052623403425629
8. Nesterov, Yu. (2007). Dual extrapolation and its applications to solving variational inequalities and related problems. Math. Program., 109, Iss. 2-3, pp. 319–344. doi: https://doi.org/10.1007/s10107-006-0034-z
9. Semenov, V. V. (2017). A version of the mirror descent method to solve variational inequalities. Cybern. Syst. Anal., 53, pp. 234-243. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-017-9923-9
10. Semenov, V. V. (2018). Modified extragradient method with bregman divergence for variational inequalities. J. Autom. Inform. Sci., 50, Iss. 8, pp. 26-37. doi: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i8.30
11. Lyashko, S. I. & Semenov, V. V. (2016). A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. In Goldengorin, B. (Ed.). Optimization and its applications in control and data sciences (pp. 315-325). Optimization and Its Applications, Vol. 115. Cham: Springer. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10
12. Khobotov, E. N. (1987). Modification of the extra-gradient method for solving variational inequalities and certain optimization problems. USSR Comput. Math. Math. Phys., 27, Iss. 5, pp. 120-127. doi: https://doi.org/10.1016/0041-5553(87)90058-9
13. Beck, A. (2017). First-order methods in optimization. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics. doi: https://doi.org/10.1137/1.9781611974997

Received 04.03.2019

Я.І. Ведель, С.В. Денисов, В.В. Семенов

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
E-mail: yana.vedel@gmail.com, sireukr@gmail.com, semenov.volodya@gmail.com

ЗБІЖНІСТЬ БРЕГМАНІВСЬКОГО ЕКСТРАГРАДІЄНТНОГО МЕТОДУ

Доведено збіжність нового варіанта екстраградієнтного методу для наближеного розв'язання варіаційних нерівностей з псевдомонотонними та ліпшицевими операторами. У методі використовується дивергенція Брегмана замість евклідової відстані та нове регулювання величини кроку, що не вимагає знання константи Ліпшиця оператора. На відміну від правил вибору величини кроку, що застосовувалися раніше, в пропонованому методі не проводиться додаткових обчислень значень оператора та прокс-відображення.

Ключові слова: *варіаційна нерівність, екстраградієнтний метод, дивергенція Брегмана, збіжність.*

Ya.I. Vedel, S.V. Denisov, V.V. Semenov

Taras Shevchenko National University of Kiev
E-mail: yana.vedel@gmail.com, sireukr@gmail.com, semenov.volodya@gmail.com

CONVERGENCE OF THE BREGMAN EXTRAGRADIENT METHOD

The convergence of a new extragradient-type method for the approximate solution of variational inequalities with pseudomonotonic and Lipschitz-continuous operators acting in a finite-dimensional linear normed space is proved. The method uses the Bregman divergence instead of the Euclidean distance and the new adjustment of the step size, which does not require knowledge of the Lipschitz constant of an operator. In contrast to the previously used rules for choosing the step size, the proposed method does not perform additional calculations for the operator values and prox-map.

Keywords: *variational inequality, extragradient method, Bregman divergence, convergence.*