ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.003
УДК 517.957

О.О. Ванєєва

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: vaneeva@imath.kiev.ua

Групоїди еквівалентності класів нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку

Представлено членом-кореспондентом НАН України А.Г. Нікітіним

Досліджено допустимі перетворення загального класу (1+1)-вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку. Побудовано ланцюжок вкладених нормалізованих підкласів цього класу. Для цих підкласів побудовано групоїди еквівалентності. Окремо розглянуто два ненормалізовані підкласи рівнянь типу реакції–конвекції–дифузії, що є цікавими для застосувань, і знайдено їх групи еквівалентності.

Ключові слова: *групоїд еквівалентності, допустимі перетворення, група еквівалентності, еволюційні рівняння, рівняння реакції–конвекції–дифузії.*

Допустимим перетворенням у класі диференціальних рівнянь називають впорядковану трійку, що складається з двох рівнянь цього класу та невиродженого точкового перетворення, що відображає перше з цих рівнянь у друге. Множина допустимих перетворень має структуру групоїда відносно операції композиції перетворень, а тому її називають групоїдом еквівалентності [1—3]. Значна частина допустимих перетворень класу генерується перетвореннями еквівалентності, тобто невиродженими точковими перетвореннями незалежних і залежних змінних рівнянь з класу та довільних елементів класу, що зберігають диференціальну структуру класу, але можуть змінювати довільні елементи. Перетворення еквівалентності класу утворюють групу [4]. Якщо перетворення змінних не залежать від довільних елементів, то таку групу називають звичайною. Клас диференціальних рівнянь, групоїд еквівалентності якого породжено звичайною групою еквівалентності, називають нормалізованим у звичайному сенсі [1, 2].

Використання допустимих перетворень дає змогу істотно спростити класифікаційні задачі групового аналізу диференціальних рівнянь, зокрема класифікації різних типів симетрій, побудову локальних законів збереження і точних розв'язків, а також дослідження інтегровності [5—8]. Також важливо, що нормалізовані класи мають простіші трансформаційні властивості і є зручнішими для дослідження. Отже, важливою задачею є пошук групоїдів еквівалентності для класів рівнянь, що є цікавими для застосувань, та дослідження властивості нормалізованості таких класів.

У цій роботі розглянуто загальний клас (1+1)-вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку

$$u_t = H(t, x, u, u_x, u_{xx}), \ \text{ де } \ H_{u_{xx}} \neq 0, \tag{1}$$

та досліджено його трансформаційні властивості. Побудовано ланцюжок вкладених нормалізованих підкласів цього класу та знайдено відповідні групоїди еквівалентності. Також розглянуто класи узагальнених рівнянь реакції–дифузії, що є підкласами класу (1), але при цьому не є нормалізованими. Побудовано їх групи еквівалентності.

Групоїди еквівалентності еволюційних рівнянь. Добре відомо, що будь-яке невироджене точкове перетворення між рівняннями $u_t = H$ та $\tilde{u}_{\tilde{t}} = \tilde{H}$ з класу (1) має вигляд $\tilde{t} = T(t)$, $\tilde{x} = X(t, x, u)$, $\tilde{u} = U(t, x, u)$, задовольняє умову $T_t(X_x U_u - X_u U_x) \neq 0$ і продовжується на частинні похідні за ланцюговим правилом:

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = \frac{D_t U D_x X - D_x U D_t X}{T_t D_x X}, \quad \tilde{u}_{\tilde{x}} = \frac{D_x U}{D_x X}, \quad \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} = \frac{1}{D_x X} D_x\left(\frac{D_x U}{D_x X}\right),$$

де $D_t = \partial_t + u_t \partial_u + u_{tt} \partial_{u_t} + u_{tx} \partial_{u_x} + \ldots$ та $D_x = \partial_x + u_x \partial_u + u_{tx} \partial_{u_t} + u_{xx} \partial_{u_x} + \ldots$ — оператори повної похідної за змінними t та x [9, 10]. Нормалізованість класу (1) встановлено в роботі [11]. Зокрема, справедлива

Теорема 1 [11]**.** *Клас* (1) *є нормалізованим у звичайному сенсі. Його групу еквівалентності складають перетворення*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x, u), \quad \tilde{u} = U(t, x, u), \ \text{де } T_t(X_x U_u - X_u U_x) \neq 0, \tag{2}$$

$$\tilde{H} = \frac{X_x U_u - X_u U_x}{T_t D_x X} H + \frac{U_t D_x X - X_t D_x U}{T_t D_x X}. \tag{3}$$

Тут і далі всі функції є довільними гладкими фукціями своїх аргументів, що задовольняють лише явно вказані додаткові умови.

Підклас квазілінійних еволюційних рівнянь можна виокремити з усього класу (1) умовою $H_{u_{xx} u_{xx}} = 0$, з якої випливає, що в цьому випадку можна репараметризувати клас (1), беручи дві інші функції як довільні елементи. Справедлива

Теорема 2. *Клас квазілінійних еволюційних рівнянь другого порядку*

$$u_t = G(t, x, u, u_x) u_{xx} + F(t, x, u, u_x), \quad G \neq 0,$$

є нормалізованим у звичайному сенсі. Його групу еквівалентності утворюють невироджені точкові перетворення, де компоненти для змінних мають вигляд (2)*, а довільні елементи перетворюються таким чином:*

$$\tilde{G} = \frac{(D_x X)^2}{T_t} G,$$

$$\tilde{F} = \frac{X_x U_u - X_u U_x}{T_t D_x X} F + \frac{U_t D_x X - X_t D_x U}{T_t D_x X} +$$

$$+ \frac{(X_{xx} + 2X_{xu} u_x + X_{uu} u_x^2) D_x U - (U_{xx} + 2U_{xu} u_x + U_{uu} u_x^2) D_x X}{T_t D_x X} G.$$

Оскільки $D_xX = X_x + X_u u_x$, з вигляду компоненти перетворень для довільного елемента G випливає, що $X_u = 0$, якщо G не залежить від u_x. Доведено більш строге твердження, ніж лема 2, наведена в роботі [12].

Теорема 3. *Клас рівнянь*

$$u_t = G(t, x, u)u_{xx} + F(t, x, u, u_x), \quad G \neq 0, \tag{4}$$

є нормалізованим у звичайному сенсі. Його групу еквівалентності складають перетворення

$$\begin{gathered}\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x), \quad \tilde{u} = U(t, x, u), \quad \tilde{G} = \frac{X_x^2}{T_t}G, \\ \tilde{F} = \frac{U_u}{T_t}F + \frac{U_tX_x - X_tD_xU}{T_tX_x} + \frac{X_{xx}D_xU - (U_{xx} + 2U_{xu}u_x + U_{uu}u_x^2)X_x}{T_tX_x}G,\end{gathered} \tag{5}$$

де $T_tX_xU_u \neq 0$.

Важливим підкласом класу (4) є підклас, де функція F є поліномом степеня n за змінною u_x, а особливо, коли F є квадратичною або лінійною функцією цієї змінної. Справедлива

Теорема 4. *Клас рівнянь вигляду*

$$u_t = G(t, x, u)u_{xx} + \sum_{k=0}^{n} F^k(t, x, u)u_x^k,$$

де $n \geqslant 2, G \neq 0$, *є нормалізованим у звичайному сенсі. Його групу еквівалентності складають перетворення, де компонети для змінних* t, x, u *та довільного елемента* G *мають вигляд* (5), *а компоненти для довільних елементів* $F^k, k = 0, \ldots, n$, *є розв'язками алгебраїчної системи рівнянь, що відрізняється для кожного фіксованого значення n і виникає після розщеплення рівняння*

$$\sum_{k=0}^{n} \tilde{F}^k \left(\frac{U_u}{X_x}u_x + \frac{U_x}{X_x} \right)^k =$$
$$= \frac{1}{T_tX_x}\left[X_xU_u \sum_{k=0}^{n} F^k u_x^k + U_tX_x - X_tD_xU + (X_{xx}D_xU - (U_{xx} + 2U_{xu}u_x + U_{uu}u_x^2)X_x)G \right]$$

за різними степенями u_x.

Для фіксованих значень n усі формули перетворень довільних елементів можна виписати в явному вигляді. Розглянемо окремо важливі випадки, коли $n = 2$ та $n = 1$. Доведена

Теорема 5. *Клас*

$$u_t = G(t, x, u)u_{xx} + F^2(t, x, u)u_x^2 + F^1(t, x, u)u_x + F^0(t, x, u), \quad G \neq 0, \tag{6}$$

є нормалізованим у звичайному сенсі. Його групу еквівалентності складають перетворення

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x), \quad \tilde{u} = U(t, x, u), \quad \tilde{G} = \frac{X_x^2}{T_t}G, \quad \tilde{F}^2 = \frac{X_x^2}{T_tU_u^2}(U_uF^2 - U_{uu}G),$$

$$\tilde{F}^1 = \frac{1}{T_tU_u}\left(2\frac{X_xU_x}{U_u}(U_{uu}G - U_uF^2) + X_xU_uF^1 - X_tU_u + (X_{xx}U_u - 2U_{xu}X_x)G \right),$$

$$\tilde{F}^0 = \frac{1}{T_t}\left[\frac{U_x^2}{U_u}F^2 - U_xF^1 + U_uF^0 + U_t + \left(2\frac{U_x}{U_u}U_{xu} - U_{xx} - \frac{U_x^2}{U_u^2}U_{uu}\right)G\right],$$

де $T_tX_xU_u \neq 0$.

Розглянемо підклас класу (6), який виокремлено умовою $F^2 = 0$. Його група еквівалентності є підходящою підгрупою класу (6). Обмеження на перетворення знаходимо, покладаючи $\tilde{F}^2 = 0$ та $F^2 = 0$ в теоремі 5. Це призводить до умови $U_{uu} = 0$. Справедлива

Теорема 6. *Клас рівнянь вигляду*

$$u_t = G(t,x,u)u_{xx} + F^1(t,x,u)u_x + F^0(t,x,u), \quad G \neq 0, \tag{7}$$

є нормалізованим у звичайному сенсі. Його групу еквівалентності утворюють перетворення

$$\begin{gathered}\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t,x), \quad \tilde{u} = U^1(t,x)u + U^0(t,x), \quad T_tX_xU^1 \neq 0,\\ \tilde{G} = \frac{X_x^2}{T_t}G, \quad \tilde{F}^1 = \frac{1}{T_tU^1}(X_xU^1F^1 - X_tU^1 + (X_{xx}U^1 - 2U_x^1X_x)G),\\ \tilde{F}^0 = \frac{1}{T_t}\left[U^1F^0 - (U_x^1u + U_x^0)F^1 + U_t^1u + U_t^0 + \left(2\frac{U_x^1}{U^1}(U_x^1u + U_x^0) - U_{xx}^1u - U_{xx}^0\right)G\right].\end{gathered} \tag{8}$$

Розглянемо ще один підклас класу (6), для якого умова $U_{uu} = 0$ також вірна для допустимих перетворень. Це підклас, виокремлений умовою $F^2 = G_u$, вигляду

$$u_t = (G(t,x,u)u_x)_x + K(t,x,u)u_x + P(t,x,u), \quad G \neq 0. \tag{9}$$

Рівняння з класу (9) можна подати у вигляді $u_t = Gu_{xx} + G_uu_x^2 + (G_x + K)u_x + P$, де зв'язки між довільними елементами цього класу та класу (6) задаються формулами $F^2 = G_u$, $F^1 = G_x + K$ та $F^0 = P$. Оскільки рівняння з класу (9) містять похідні довільного елемента G, вони природно виникають у компонентах перетворень еквівалентності для довільних елементів. Таку групу еквівалентності можна вважати звичайною, якщо розширити набір довільних елементів похідними G_x та G_u і продовжити перетворення з групи на ці нові довільні елементи

$$\tilde{G}_{\tilde{x}} = \frac{X_x}{T_t}G_x + 2\frac{X_{xx}}{T_t}G, \quad \tilde{G}_{\tilde{u}} = \frac{X_x^2}{T_tU^1}G_u.$$

Це легко пояснити, якщо зобразити клас (9) у вигляді $u_t = Gu_{xx} + G^1u_x^2 + (G^2 + K)u_x + P$ з додатковими довільними елементами $G^1 = G_u$ та $G^2 = G_x$. Для такого репараметризованого класу перетворення еквівалентності вже не містять похідні довільних елементів.

Теорема 7. *Клас* (9) *після репараметризації є нормалізованим у звичайному сенсі. Його групу еквівалентності складають перетворення*

$$\begin{gathered}\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t,x), \quad \tilde{u} = U^1(t,x)u + U^0(t,x), \quad T_tX_xU^1 \neq 0,\\ \tilde{G} = \frac{X_x^2}{T_t}G, \quad \tilde{K} = \frac{X_x}{T_t}\left[K - \left(\frac{X_{xx}}{X_x} + 2\frac{U_x^1}{U^1}\right)G - 2(U_x^1u + U_x^0)\frac{G_u}{U^1} - \frac{X_t}{X_x}\right],\end{gathered}$$

$$\tilde{P}=\frac{1}{T_t}\left[U^1P+\frac{(U^1_xu+U^0_x)^2}{U^1}G_u-(U^1_xu+U^0_x)(G_x+K)+U^1_tu+U^0_t+\right.$$
$$\left.+\left(2\frac{U^1_x}{U^1}(U^1_xu+U^0_x)-U^1_{xx}u-U^0_{xx}\right)G\right].$$

Підклас класу (9), виокремлений умовою $K=0$, має вигляд

$$u_t=(G(t,x,u)u_x)_x+P(t,x,u),\quad G\neq 0. \tag{10}$$

Цей клас не є нормалізованим на відміну від усіх класів, розглянутих до цього. Обмеження на вигляд допустимих перетворень у класі (10) можна отримати, якщо покласти $K=0$ та $\tilde{K}=0$ в перетвореннях, наведених у теоремі 7. У результаті отримуємо рівняння

$$2\left(\frac{U^1_x}{U^1}u+\frac{U^0_x}{U^1}\right)G_u+\left(\frac{X_{xx}}{X_x}+2\frac{U^1_x}{U^1}\right)G+\frac{X_t}{X_x}=0.$$

Подальші обмеження на вигляд функцій X, U^1 та U^0 залежать від значень функції G. Якщо ця функція не задовольняє рівняння $(au+b)G_u+cG+d=0$, де a, b, c та d — функції, що залежать від t та x, то точкові перетворення між рівняннями з цього класу задовольняють умови $X_t=X_{xx}=U^1_x=U^0_x=0$, а такий підклас класу (10) є нормалізованим у звичайному сенсі. Доведена

Теорема 8. *Група еквівалентності класу* (10) *є звичайною і складається з перетворень*

$$\tilde{t}=T(t),\ \tilde{x}=\delta_1x+\delta_2,\ \tilde{u}=U^1(t)u+U^0(t),\ T_tU^1\delta_1\neq 0,\ \tilde{G}=\frac{\delta_1^2}{T_t}G,\ \tilde{P}=\frac{1}{T_t}(U^1P+U^1_tu+U^0_t).$$

Класи еволюційних рівнянь зі змінним коефіцієнтом біля u_t часто виникають у застосуваннях. Тому розглянемо узагальнення рівнянь (9) вигляду

$$S(t,x)u_t=(G(t,x,u)u_x)_x+K(t,x,u)u_x+P(t,x,u),\quad SG\neq 0. \tag{11}$$

Зокрема, підкласами цього класу є рівняння реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами вигляду $f(x)u_t=(g(x)A(u)u_x)_x+h(x)B(u)$ та рівняння конвекції–дифузії зі змінними коефіцієнтами $f(x)u_t=(g(x)A(u)u_x)_x+h(x)B(u)u_x$. Рівняння з таких класів моделюють багато фізичних, хімічних та біологічних процесів реального світу.

Хоча коефіцієнт $S(t,x)$ можна відкалібрувати в одиницю сім'єю точкових перетворень

$$\tilde{t}=t,\quad \tilde{x}=\int_{x_0}^{x}S(t,y)dy,\quad \tilde{u}=u\ ,$$

клас (11) розглянуто окремо, оскільки його трансформаційні властивості є більш складними, ніж у класу (9). Справедлива

Теорема 9. *Будь-яке точкове перетворення між двома рівняннями з класу* (11) *має вигляд* (8). *Тоді відповідні довільні елементи пов'язані формулами*

$$\frac{\tilde{G}}{\tilde{S}}=\frac{X_x^2}{T_t}\frac{G}{S},\quad \frac{\tilde{K}+\tilde{G}_{\tilde{x}}}{\tilde{S}}=\frac{X_x}{T_tS}\left[K+G_x+\left(\frac{X_{xx}}{X_x}-2\frac{U^1_x}{U^1}\right)G-2(U^1_xu+U^0_x)\frac{G_u}{U^1}-\frac{X_t}{X_x}S\right],$$

$$\frac{\tilde{P}}{\tilde{S}}=\frac{1}{T_tS}\left[U^1P+\frac{(U_x^1u+U_x^0)^2}{U^1}G_u-(U_x^1u+U_x^0)(K+G_x)+(U_t^1u+U_t^0)S+\right.$$

$$\left.+\left(2\frac{U_x^1}{U^1}(U_x^1u+U_x^0)-U_{xx}^1u-U_{xx}^0\right)G\right].$$

Бачимо, що для класу (11) компоненти перетворень з групи еквівалентності для довільних елементів визначені лише для відношень цих елементів. Це можна пояснити наявністю специфічного калібрувального перетворення еквівалентності, яке не змінює незалежні і залежні змінні, а змінює лише вигляд довільних елементів класу. Це перетворення має вигляд

$$\tilde{S}=Z(t,x,S),\quad \tilde{G}=\frac{G}{S}Z,\quad \tilde{K}=\frac{K}{S}Z-G\left(\frac{Z}{S}\right)_x,\quad \tilde{P}=\frac{P}{S}Z,$$

де Z — довільна гладка функція своїх змінних, $Z_S\neq 0$. Доведена

Теорема 10. *Групу еквівалентності класу* (11) *складають перетворення*

$$\tilde{t}=T(t),\quad \tilde{x}=X(t,x),\quad \tilde{u}=U^1(t,x)u+U^0(t,x),$$

$$T_tX_xU^1\neq 0,\quad \tilde{S}=Z(t,x,S),\quad \tilde{G}=\frac{X_x^2}{T_t}\frac{G}{S}Z,$$

$$\tilde{K}=\frac{X_xZ}{T_tS}\left[K-\left(\frac{X_{xx}}{X_x}+2\frac{U_x^1}{U^1}\right)G-2(U_x^1u+U_x^0)\frac{G_u}{U^1}-\frac{X_t}{X_x}S\right]-\frac{X_x}{T_t}G\left(\frac{Z}{S}\right)_x,$$

$$\tilde{P}=\frac{Z}{T_tS}\left[U^1P+\frac{(U_x^1u+U_x^0)^2}{U^1}G_u-(U_x^1u+U_x^0)(K+G_x)+\right.$$

$$\left.+(U_t^1u+U_t^0)S+\left(2\frac{U_x^1}{U^1}(U_x^1u+U_x^0)-U_{xx}^1u-U_{xx}^0\right)G\right].$$

Клас (11) можна вважати нормалізованим у звичайному сенсі, оскільки його можна подати у вигляді $Su_t=Gu_{xx}+G^1u_x^2+G^2u_x+P$ з додатковими довільними елементами $G^1=G_u$ та $G^1=K+G_x$. Зауважимо, що підклас класу (11), який виокремлено умовою $K=0$, тобто клас

$$S(t,x)u_t=(G(t,x,u)u_x)_x+P(t,x,u),\quad SG\neq 0,\tag{12}$$

не є нормалізованим. На відміну від класу (11), для класу (12) коефіцієнт S є суттєвим.

Калібрувальні перетворення еквівалентності досить прості у цьому випадку, а саме: кожен коефіцієнт можна домножувати на ненульову гладку функцію змінної *t*. Група еквівалентності класу (12) ширша за групу еквівалентності його підкласу з $S=1$. Справедлива

Теорема 11. *Групу еквівалентності класу* (12) *складають перетворення*

$$\tilde{t}=T(t),\quad \tilde{x}=X(x),\quad \tilde{u}=U^1(t)u+U^0(t),\quad T_tX_xU^1\neq 0,$$

$$\tilde{S}=\psi(t)\frac{T_t}{X_x}S,\quad \tilde{G}=\psi(t)X_xG,\quad \tilde{P}=\frac{\psi(t)}{X_x}(U^1P+(U_t^1u+U_t^0)S).$$

Отже, побудовано ланцюжок вкладених підкласів загального класу (1+1)-вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку. Для цих підкласів знайдено групи еквівалентності. Доведено, що всі розглянуті підкласи, крім двох, є нормалізованими, а тому для всіх нормалізованих підкласів вичерпно описано їх групоїди еквівалентності. Отримані результати можуть бути застосовані у груповому аналізі диференціальних рівнянь, зокрема для пошуку різних типів симетрій, законів збереження та точних розв'язків.

Автор висловлює вдячність д-ру фіз.-мат. наук, проф. Р.О. Поповичу за цінні зауваження до роботи.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Popovych R.O. Classification of admissible transformations of differential equations. *Collection of Works of Institute of Mathematics*. 2006. **3**, № 2. P. 239—254.
2. Popovych R.O., Kunzinger M., Eshraghi H. Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations. *Acta Appl. Math.* 2010. **109**. P. 315—359. doi: https://doi.org/10.1007/s10440-008-9321-4
3. Popovych R.O., Bihlo A. Symmetry preserving parametrization schemes. *J. Math. Phys.* 2012. **53**, № 7. 073102, 36 p. doi: https://doi.org/10.1063/1.4734344
4. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1978. 400 с.
5. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Equivalence transformations in the study of integrability. *Phys. Scr.* 2014. **89**, № 3. 038003, 9 p. doi: https://doi.org/10.1088/0031-8949/89/03/038003
6. Ванєєва О.О., Жалій О.Ю. Груповий аналіз класу рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2014. № 10. С. 12—20. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2014.10.012
7. Vaneeva O., Boyko V., Zhalij A., Sophocleous C. Classification of reduction operators and exact solutions of variable coefficient Newell–Whitehead–Segel equations. *J. Math. Anal. Appl.* 2019. **474**, № 1. P. 264—275. doi: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.01.044
8. Vaneeva O., Pošta S. Equivalence groupoid of a class of variable coefficient Korteweg–de Vries equations. *J. Math. Phys.* 2017. **58**, № 10. 101504, 12 p. doi: https://doi.org/10.1063/1.5004973
9. Kingston J.G. On point transformations of evolution equations. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1991. **24**, № 14. P. L769–L774. doi: https://doi.org/10.1088/0305-4470/24/14/003
10. Kingston J.G., Sophocleous C. On form-preserving point transformations of partial differential equations. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1998. **31**, № 6. P. 1597—1619. doi: https://doi.org/10.1088/0305-4470/31/6/010
11. Popovych R.O., Samoilenko A.M. Local conservation laws of second-order evolution equations. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2008. **41**, № 36. 362002, 11 p. doi: https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/36/362002
12. Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations. *J. Phys. A: Math. Gen.* 2004. **37**, № 30. P. 7547—7565. doi: https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/30/011

Надійшло до редакції 11.03.2019

REFERENCES

1. Popovych, R. O. (2006). Classification of admissible transformations of differential equations. Collection of Works of Institute of Mathematics, 3, No. 2, pp. 239-254.
2. Popovych, R. O., Kunzinger, M. & Eshraghi, H. (2010). Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations. Acta Appl. Math, 109, pp. 315-359. doi: https://doi.org/10.1007/s10440-008-9321-4
3. Popovych, R. O. & Bihlo, A. (2012). Symmetry preserving parametrization schemes. J. Math. Phys., 53, No. 7, 073102, 36 p. doi: https://doi.org/10.1063/1.4734344
4. Ovsiannikov, L. V. (1978). Group analysis of differential equations. Moscow: Nauka (in Russian).
5. Vaneeva, O. O., Popovych, R. O. & Sophocleous, C. (2014). Equivalence transformations in the study of integrability. Phys. Scr., 89, No. 3, 038003, 9 p. doi: https://doi.org/10.1088/0031-8949/89/03/038003

6. Vaneeva, O. O. & Zhalij, O. Yu. (2014). Group analysis of a class of reaction-diffusion equations with variable coefficients. Dopov. Nac. akad. nauk. Ukr., No. 10, pp. 12-20 (in Ukrainian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2014.10.012
7. Vaneeva, O., Boyko, V., Zhalij, A. & Sophocleous, C. (2019). Classification of reduction operators and exact solutions of variable coefficient Newell–Whitehead–Segel equations. J. Math. Anal. Appl., 474, No. 1, pp. 264-275. doi: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.01.044
8. Vaneeva, O. & Pošta, S. (2017). Equivalence groupoid of a class of variable coefficient Korteweg–de Vries equations. J. Math. Phys., 58, No. 10, 101504, 12 p. doi: https://doi.org/10.1063/1.5004973
9. Kingston, J. G. (1991). On point transformations of evolution equations. J. Phys. A: Math. Gen., 24, No. 14, pp. L769-L774. doi: https://doi.org/10.1088/0305-4470/24/14/003
10. Kingston, J. G. & Sophocleous, C. (1998). On form-preserving point transformations of partial differential equations. J. Phys. A: Math. Gen., 31, No. 6, pp. 1597-1619. doi: https://doi.org/10.1088/0305-4470/31/6/010
11. Popovych, R. O. & Samoilenko, A. M. (2008). Local conservation laws of second-order evolution equations. J. Phys. A: Math. Theor., 41, No. 36, 362002, 11 p. doi: https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/36/362002
12. Popovych, R. O. & Ivanova, N. M. (2004). New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations. J. Phys. A: Math. Gen., 37, No. 30, pp. 7547-7565. doi: https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/30/011

Received 11.03.2019

Е.А. Ванеева

Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: vaneeva@imath.kiev.ua

ГРУППОИДЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КЛАССОВ
НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Исследованы допустимые преобразования общего класса (1+1)-мерных нелинейных эволюционных уравнений второго порядка. Построена цепочка вложенных нормализованных подклассов этого класса. Для этих подклассов построены группоиды эквивалентности. Отдельно рассмотрены два ненормализованных подкласса уравнений типа реакции—конвекции—диффузии, которые интересны для приложений и найдены их группы эквивалентности.

Ключевые слова: *группоид эквивалентности, допустимые преобразования, группа эквивалентности, эволюционные уравнения, уравнения реакции–конвекции–диффузии.*

O.O. Vaneeva

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: vaneeva@imath.kiev.ua

EQUIVALENCE GROUPOIDS OF CLASSES
OF NONLINEAR SECOND-ORDER EVOLUTION EQUATIONS

We study transformational properties of the general class of (1+1)-dimensional nonlinear second-order evolution equations. The chain of nested normalized subclasses of this class is constructed. The equivalence groupoids of the respective normalized subclasses are found. For two subclasses that are of interest for applications, but not normalized, the equivalence groups are derived.

Keywords: *equivalence groupoid, admissible transformations, equivalence group, evolution equations, reaction–diffusion–convection equations.*