doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.04.010
УДК 517.9

А.А. Мартынюк, академик НАН Украины

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: center@inmech.kiev.ua

Дробно-подобная производная Хукухары и ее свойства

Вводится понятие дробно-подобной производной Хукухары для многозначного отображения, обсуждаются ее свойства и приводится принцип сравнения для дробно-подобных многозначных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *дробно-подобная производная Хукухары, принцип сравнения, семейства дробно-подобных дифференциальных уравнений.*

Ключевым элементом теории семейств уравнений является понятие производной Хукухары [1] для множества состояний реальной системы, моделируемой семейством уравнений. Интерес к уравнениям с классическими дробными производными (см. [2—5] и библиографию там) побудил многих исследователей разрабатывать качественные методы динамического анализа уравнений возмущенного движения с дробной производной вектора состояния системы (см. [6] и библиографию там).

Определение дробно-подобной производной для непрерывной функции, введенное в статьях [7, 8], применялось в ряде работ (см. [9—11] и библиографию там) для анализа решений дифференциальных уравнений с дробно-подобной производной вектора состояния. В данной работе это понятие обобщается для уравнений с многозначным отображением.

1. Дробно-подобная производная Хукухары. Пусть $K_c(R^n)$ — множество всех непустых, компактных и выпуклых подмножеств пространства R^n. Для двух ограниченных множеств A и B в $K_c(R^n)$ рассматривается метрика Хаусдорфа

$$D[A,B] = \max\{\sup d(x,A), \sup d(y,B)\},$$

где $d(x,A) = \inf[d(x,y) : y \in A]$.

Напомним, что для множеств A и B существует разность Хукухары $A - B$, если существует множество $C \in K_c(R^n)$ такое, что $A = B + C$.

Определение 1. Пусть на некотором интервале I вещественных чисел задано многозначное отображение $X : I \to K_c(R^n)$. Отображение X имеет дробно-подобную производную в точке $t_0 \in I$, если при любых значениях $0 < q \leqslant 1$ существует $\mathcal{D}_H^q X(t_0) \in K_c(R^n)$ такое, что оба предела

$$\lim\{[X(t_0+\theta(t-t_0)^{1-q})-X(t_0)]\theta^{-1}:\theta\to 0^+\} \tag{1}$$

и

$$\lim\{[X(t_0)-X(t_0-\theta(t-t_0)^{1-q})]\,\theta^{-1}:\theta\to 0^+\} \tag{2}$$

существуют и равны $\mathcal{D}_H^q X(t_0)$, $t>t_0$.

Замечание 1. Если условия определения выполняются хотя бы при одном значении $q=q^*\in(0,1]$, то дробно-подобную производную $\mathcal{D}_H^q X(t_0)$ будем называть слабой.

Если $\mathcal{D}_H^q X(t_0)$ существует и конечно, то будем говорить, что многозначное отображение дробно-дифференцируемое в смысле Хукухары в точке $t_0\in I$.

Лемма 1. *Пусть отображение $X:[t_0,\infty)\to K_c(R^n)$ q-дифференцируемое в точке $t_0\in I$, тогда дробно-подобная производная отображения $X(t_0)$*

$$\mathcal{D}_H^q X(t_0)=(t-t_0)^{1-q}D_H X(t_0),$$

где $0<q\leqslant 1$ и $D_H X(t_0)$ — обычная производная Хукухары (см. [1]).

Доказательство. Обозначим $\theta=(t-t_0)^{q-1}h$ и вычислим предел (1)

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{X(t_0+\theta(t-t_0)^{1-q})-X(t_0)}{\theta}=\lim_{h\to 0^+}\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{(t-t_0)^{q-1}h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h}(t-t_0)^{1-q}=(t-t_0)^{1-q}D_H X(t_0),\quad t_0\in I, \tag{3}$$

и предел (2)

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{X(t_0)-X(t-\theta(t-t_0)^{1-q})}{\theta}=\lim_{h\to 0^+}\frac{X(t_0)-X(t-h)}{h(t-t_0)^{q-1}}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{X(t_0)-X(t-h)}{h}(t-t_0)^{1-q}=(t-t_0)^{1-q}D_H X(t_0) \tag{4}$$

для отображения $X(t_0)$.

Соотношения (3) и (4) при их существовании и конечности обычных производных Хукухары для отображения $X(t)$ в точке $t=t_0$ доказывают лемму 1.

Замечание 2. Из леммы 1 следует, что необходимым и достаточным условием существования дробно-подобной производной Хукухары для многозначного отображения $X:[t_0,\infty)\to K_c(R^n)$ является существование классической производной Хукухары $D_H X(t_0)$.

Определение 2. Дробно-подобный интеграл Хукухары многозначного отображения $X(t)$ определим формулой

$$I_H^q X(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{X(s)}{(s-t_0)^{1-q}}ds,\quad t\geqslant t_0,$$

при всех $0<q\leqslant 1$.

Укажем некоторые свойства дробно-подобных производной и интеграла Хукухары для отображения $X(t)$.

Лемма 2. *Пусть* $X(t):[t_0,\infty)\to K_c(R^n)$ *— непрерывное отображение и* $0<q\leqslant 1$. *Тогда*

$$\mathcal{D}_H^q I_H^q X(t)=X(t),\quad t>t_0.$$

Доказательство. Пусть задано непрерывное отображение $X(t)$. Тогда $I_H^q X(t)$ является q-дифференцируемым и, следовательно,

$$\mathcal{D}_H^q(I_H^q X(t))=(t-t_0)^{1-q}D_H(I_H^q X(t))=$$

$$=(t-t_0)^{1-q}D_H\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{X(s)}{(s-t_0)^{1-q}}ds\right)=(t-t_0)^{1-q}\frac{X(t)}{(t-t_0)^{1-q}}=X(t),\quad t>t_0.$$

Этим лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть для многозначного отображения* $X(t):I\to K_c(R^n)$ *существуют разности Хукухары:* $X(t_0+\theta(t-t_0)^{1-q})-X(t_0)$ *и* $X(t_0)-X(t_0-\theta(t-t_0)^{1-q})$ *на* I, *тогда вещественнозначная функция* $t\to \operatorname{diam}(X(t))$, $t\in I$, *является неубывающей на* I.

Доказательство. Пусть существуют разности Хукухары $A=X(t_0+\theta(t-t_0)^{1-q})-X(t_0)$ и $B=X(t_0)-X(t_0-\theta(t-t_0)^{1-q})$ при некотором $\delta(t_0)>0$ таком, что $0<\theta(t-t_0)^{1-q}<\delta(t_0)$ при всех $q\in(0,1]$. Так как $A-B$, A, $B\in K_c(R^n)$ и определены тогда, когда некоторая трансляция B содержится в A, т. е. $A-B$ существует только тогда, когда $\operatorname{diam}(A)\geqslant\operatorname{diam}(B)$. Пусть t_1, $t_2\in I_\delta$, где $I_\delta=(t_0,\delta(t_0)]$ и $t_1<t_2$. Тогда для любого $\tau\in[t_1,t_2]$ существует $\delta(\tau)>0$ такое, что $\operatorname{diam}(X(s))\leqslant\operatorname{diam}(X(\tau))$ при $s\in[\tau-\delta(\tau),\tau]$ и $\operatorname{diam}(X(s))\geqslant\operatorname{diam}(X(\tau))$ при $s\in[\tau,\tau+\delta(\tau)]$. Система интервалов $I_\tau=(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))$, где $I_\tau:\tau\in[t_1,t_2]$ является открытым покрытием отрезка $[t_1,t_2]$. В силу леммы Гейне—Бореля существует конечное подпокрытие $I_{\tau_1},\dots,I_{\tau_N}$, где $\tau_i<\tau_{i+1}$. При этом получаем оценки $\operatorname{diam}(X(t_1))\leqslant\operatorname{diam}(X(\tau_1))$ и $\operatorname{diam}(X(\tau_N))\leqslant\operatorname{diam}(X(t_2))$. Пусть $I_{\tau_i}\cap I_{\tau_{i+1}}\neq\varnothing$ при $i=1,2,\dots,N-1$. При этом для каждого $i=1,2,\dots,N-1$, существует $\theta_i\in I_{\tau_i}\cap I_{\tau_{i+1}}$ такое, что $\tau_i<\theta_i<\tau_{i+1}$ и, следовательно, получаем оценки

$$\operatorname{diam}(X(\tau_i))\leqslant\operatorname{diam}(X(\theta_i))\leqslant\operatorname{diam}(X(\tau_{i+1})).$$

Отсюда следует, что $\operatorname{diam}(X(t_1))\leqslant\operatorname{diam}(X(t_2))$. Этим лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Многозначное отображение* $X(t):I\to K_c(R^n)$ *является постоянным тогда и только тогда, когда дробно-подобная производная Хукухары*

$$\mathcal{D}_H^q X(t)=0 \tag{5}$$

тождественно на I.

Доказательство. Пусть $X(t)$ — постоянное множество, тогда согласно определению 1 соотношение (5) верно. Предположим обратное, что соотношение (5) выполняется. Из соотношения

$$D[\lambda A,\lambda B]=\lambda D[A-B,\Theta], \tag{6}$$

если разность $A-B$ существует и $\lambda\geqslant 0$, $A,B,\Theta\in K_c(R^n)$, получаем равенство

$$D[X(t),X(t_0)]=D[X(t)-X(t_0),\Theta],$$

из которого следует, что

$$\lim_{t\to t_0^+}\frac{D[X(t),X(t_0)]}{t-t_0}=0.$$

Аналогично при $t < t_0$ получим

$$\lim_{t\to t_0^-} \frac{D[X(t), X(t_0)]}{t - t_0} = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{t\to t_0} \left| \frac{D[X(t), X(t_0)]}{t - t_0} \right| = 0. \tag{7}$$

Далее зафиксируем $t_1 \in (0,1)$ и рассмотрим неравенство

$$\left| D[X(t_1), X(t)] - D[X(t_1), X(t_0)] \right| \leqslant D[X(t), X(t_0)]. \tag{8}$$

Принимая во внимание (7), разделим это неравенство на $|t - t_0|$, в результате получим скалярную функцию $t \to D(X(t_1), X(t))$, которая постоянная. Дробно-подобная производная этой функции равна нулю в точке t_1. Отсюда следует утверждение леммы 4.

Лемма 5. *Пусть многозначное отображение* $X(t): I \to K_c(R^n)$ q *-дифференцируемое и* $0 < q \leqslant 1$. *Тогда*

$$I_H^q \mathcal{D}_H^q X(t) = X(t) - X(t_0).$$

Доказательство. Так как отображение q -дифференцируемое, то

$$I_H^q \mathcal{D}_H^q X(t) = \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^{q-1}\, \mathcal{D}_H^q X(s) ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^{q-1} (s - t_0)^{1-q}\, \mathcal{D}_H^q X(s) ds = X(t) - X(t_0).$$

Здесь принимается во внимание, что если многозначное отображение $X(t)$ является q -дифференцируемым в смысле Хукухары, то

$$\mathcal{D}_H^q X(t) = (t - t_0)^{1-q}\, D_H X(t) \text{ при всех } 0 < q \leqslant 1,$$

где $D_H X(t)$ – обычная производная Хукухары многозначного отображения $X(t)$.

2. Принцип сравнения. Рассмотрим начальную задачу для семейства дробно-подобных дифференциальных уравнений

$$\mathcal{D}_H^q X(t) = F(t, X), \tag{9}$$

$$X(t_0) = X_0 \in K_c(R^n), \tag{10}$$

где $F \in C^q(R_+ \times K_c(R^n), R^n$ и $\mathcal{D}_H^q X$ — дробно-подобная производная Хукухары множества состояний рассматриваемой системы.

Отображение $X(t) \in C^q(J, K_c(R^n))$, где $J = [t_0, t_0 + a]$, $a > 0$, является решением семейства дробно-подобных уравнений (9), если оно удовлетворяет (9) при начальных условиях (10).

Из того, что $X(t)$ — непрерывно q -дифференциальное отображение следует, что

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^{q-1}\, \mathcal{D}_H^q X(s) ds, \quad t \in J. \tag{11}$$

Ввиду этого соотношения семейство уравнений (9) инвертирует к следующему интегральному уравнению:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{q-1} F(s, X(s))ds, \quad t \in J, \tag{12}$$

где дробно-подобный интеграл в (12) понимается в смысле Хукухары.

Установим принцип сравнения для задачи (9) — (10) в следующем виде.

Лемма 6. *Предположим, что* $F \in C^q(J \times K_c(R^n), K_c(R^n))$ *и существует функция* $g \in C^q(J \times R_+^n, R)$, $0 < q \leqslant 1$, *такая, что*

$$D[F(t,X), F(t,Y)] \leqslant g(t, D[X,Y]), \tag{13}$$

при всех $t \in J$ и $X, Y \in K_c(R^n)$, *где* g *— монотонная неубывающая функция* $t \in J$.

Кроме того, предположим, что максимальное решение $r_m(t, t_0, w_0)$ *дробно-подобного скалярного уравнения* [10]

$$\mathcal{D}_{t_0}^q w(t) = g(t, w(t)), \tag{14}$$

$$w(t_0) = w_0 \geqslant 0 \tag{15}$$

существует на J. *Тогда для двух отображений* $X(t)$ *и* $Y(t)$ *с начальными значениями* (t_0, X_0) и (t_0, Y_0), *удовлетворяющими семейству уравнений* (9), *верна оценка*

$$D[X(t), Y(t)] \leqslant r_m(t, t_0, w_0), \quad t \in J,$$

как только $D[X_0, Y_0] \leqslant w_0$.

Доказательство. Обозначим $m(t) = D[X(t), Y(t)]$ и заметим, что $m(t_0) = D[X_0, Y_0] \leqslant w_0$.

Учитывая свойства метрики Хаусдорфа и соотношение (12), аналогичное для отображения $Y(t)$ с начальными значениями $(t_0, Y_0) \in R_+ \times K_c(R^n)$, получим

$$\begin{aligned} m(t) &= D[X_0 + \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{q-1} F(s, X(s))ds, Y_0 + \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{q-1} F(s, Y(s))ds] \leqslant \\ &\leqslant D[X_0 + \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{q-1} F(s, X(s))ds, X_0 + \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{q-1} F(s, Y(s))ds] + \\ &+ D[X_0 + \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{q-1} F(s, Y(s))ds, Y_0 + \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{q-1} F(s, Y(s))ds] = \\ &= D[\int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{q-1} F(s, X(s))ds, \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{q-1} F(s, Y(s))ds] + D[X_0, Y_0]. \end{aligned} \tag{16}$$

Из оценки (13) и неравенства (16) следует, что

$$\begin{aligned} m(t) &\leqslant m(t_0) + \int_{t_0}^{t} D[(s-t_0)^{q-1} F(s, X(s)), (s-t_0)^{q-1} F(s, Y(s))]ds \leqslant \\ &\leqslant m(t_0) + \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{q-1} g(s, D[X(s), Y(s)])ds = m(t_0) + \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{q-1} g(s, m(s))ds, \quad t \in J). \end{aligned} \tag{17}$$

Из условий леммы 6 и неравенства (17) следует, что (ср. [4])

$$m(t) \leqslant r_m(t, t_0, w_0)$$

при всех $t \in J$. Этим лемма 6 доказана.

3. Заключительные замечания. В работе введена дробно-подобная производная Хукухары для множества состояний динамической системы и обсуждаются ее свойства. Установлен принцип сравнения для семейства уравнений с дробно-подобной производной Хукухары.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Hukuhara M. Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe. *Funkcial. Ekvac*. 1967. **10**. P. 43—66.
2. Burton T.A. Lyapunov theory for integral equations with singular kernels and fractional differential equations. Port Angeles, WA, 2012. 379 p.
3. Kilbas A., Srivastava M.H., Trujillo J.J. Theory and application on fractional differential equations. Amsterdam: North Holland, 2006. 540 p.
4. Lakshmikantham V., Leela S., Devi J.V. Theory of fractional dynamic systems. Cambridge: Cambridge Scientific Publ., 2009. 170 p.
5. Podlybny I. Fractional differential equations. London: Academic Press, 1999. 368 p.
6. Martynyuk A.A., Stamova I., Martynyuk-Chernienko Yu.A. Stability analysis of set of trajectories for differential equations with fractional dynamics. *Eur. Phys. J. Special Topics*. 2017. **226**. P. 3609—3637.
7. Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababheh M. A new definition of fractional derivative. *J. Comput. Appl. Math*. 2014. **264**. P. 65—70.
8. Abdeljawad T. On conformable fractional calculus. *J. Comput. Appl. Math*. 2015. **279**. P. 57—66.
9. Мартынюк А.А. Об устойчивости решений дробно-подобных уравнений возмущенного движения. *Допов. Нац. акад. наук. Укр*. 2018. № 6. С. 9—16. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.009
10. Martynyuk A.A., Stamova I.M. Fractional-like derivative of Lyapunov-type functions and applications to the stability analysis of motion. *Electron. J. Differential Equations*. 2018. **2018**, № 62. P. 1—12.
11. Martynyuk A.A., Stamov G., Stamova I.M. Integral estimates of the solutions of fractional-like equations of perturbed motion. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. 2019. **24**, № 1. P. 138—149.

Поступило в редакцию 19.07.2018

REFERENCES

1. Hukuhara, M. (1967). Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe. Funkcial. Ekvac., 10, pp. 43-66.
2. Burton, T. A. (2012). Lyapunov theory for integral equations with singular kernels and fractional differential equations. Port Angeles, WA.
3. Kilbas, A., Srivastava, M. H. & Trujillo, J. J. (2006). Theory and application on fractional differential equations. Amsterdam: North Holland.
4. Lakshmikantham, V., Leela, S. & Devi, J. V. (2009).Theory of fractional dynamic systems. Cambridge: Cambridge Scientific Publ.
5. Podlybny, I. (1999). Fractional differential equations. London: Academic Press.
6. Martynyuk, A. A., Stamova, I. & Martynyuk-Chernienko, Yu. A. (2017). Stability analysis of set of trajectories for differential equations with fractional dynamics. Eur. Phys. J. Special Topics, 226, pp. 3609-3637.
7. Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. & Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. J. Comput. Appl. Math., 264, pp. 65-70.
8. Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. J. Comput. Appl. Math., 279, pp. 57-66.
9. Martynyuk, A. A. (2018).On stability analysis of fractional-like systems of perturbed motion. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 6, pp. 9-16 (in Russian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.009

10. Martynyuk, A. A. & Stamova, I. M. (2018). Fractional-like derivative of Lyapunov-type functions and applications to the stability analysis of motion. Electron. J. Differential Equations, 2018, No. 62, pp. 1-12.
11. Martynyuk, A. A., Stamov, G. & Stamova, I. M. (2019). Integral estimates of the solutions of fractional-like equations of perturbed motion. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 24, No. 1, pp. 138-149.

Received 19.07.2018

А.А. Мартинюк

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: center@inmech.kiev.ua

ДРОБОВО-ПОДІБНА ПОХІДНА ХУКУХАРИ І ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Вводиться поняття дробово-подібної похідної Хукухари для багатозначного відображення, обговорюються її властивості і наводиться принцип порівняння для дробово-подібних багатозначних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: *дробово-подібна похідна Хукухари, принцип порівняння, сімейства дробово-подібних диференціальних рівнянь.*

A.A. Martynyuk

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: center@inmech.kiev.ua

FRACTIONAL-LIKE HUKUHARA DERIVATIVE AND ITS PROPERTIES

The concept of fractional-like Hukuhara derivative for set-valued maps is introduced, its properties are discussed, and the principle of comparison is established for fractional-like set-valued differential equations.

Keywords: *fraction-like Hukuhara derivative, the principle of comparison, set-valued of fractional-like differential equations.*