УДК 517.94

К. Кенжебаев, В. Н. Лаптинский (Киев. ун-т)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

We study the problem of periodic solutions of linear differential systems with small parameter. We establish new conditions for the existence and uniqueness of periodic solutions of these systems, which can be efficiently verified.

Вивчається задача про періодичні розв'язки лінійних диференціальних систем з малим параметром. Одержано умови існування та єдиності періодичних розв'язків цих систем, які ефективно перевіряються.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = \lambda A(t)x + f(t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $(n \times n)$-мерная матрица $A(t)$ и n-мерный вектор $f(t)$ принадлежит классу C и ω-периодичны по t.

Пусть имеет место вырожденный случай

$$A_1(\omega) = 0, \tag{2}$$

где

$$A_1(\omega) = \int_0^\omega A(\tau)\,d\tau.$$

Пусть $x(t, \lambda)$ — ω-периодическое решение системы (1). Это решение удовлетворяет ω-периодическому краевому условию

$$x(\omega, \lambda) = x(0, \lambda). \tag{3}$$

На основании (1), (3) при $\lambda \neq 0$ имеем

$$\int_0^\omega A(\tau)x(\tau, \lambda)\,d\tau + \frac{1}{\lambda}\int_0^\omega f(\tau)\,d\tau = 0. \tag{4}$$

Согласно [1] справедлива формула

$$\int_0^t A(\tau)x(\tau, \lambda)\,d\tau = \int_0^t A(\tau)x(t, \lambda)\,d\tau - \int_0^t A_1(\tau)\dot{x}(\tau, \lambda)\,d\tau, \tag{5}$$

где

$$\dot{x}(\tau, \lambda) \equiv \frac{dx(\tau, \lambda)}{d\tau},$$

$$A_1(\tau) = \int_0^\tau A(\sigma)\,d\sigma.$$

Из (5) при $t = \omega$ с учетом (1), (2) имеем

$$\int_0^\omega A(\tau)x(\tau, \lambda)\,d\tau = -\int_0^\omega A_1(\tau)[\lambda A(\tau)x(\tau, \lambda) + f(\tau)]\,d\tau. \tag{6}$$

Тогда (4) примет вид

$$-\lambda \int_0^\omega A_1(\tau)A(\tau)x(\tau,\lambda)\,d\tau - \int_0^\omega A_1(\tau)f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\lambda}\int_0^\omega f(\tau)\,d\tau = 0. \tag{7}$$

Запишем (7) в следующем виде:

$$\int_0^\omega P(\tau)x(\tau,\lambda)\,d\tau = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\omega A_1(\tau)f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\omega f(\tau)\,d\tau, \tag{8}$$

где $P(\tau) = A_1(\tau)A(\tau)$.

Пусть матрица $P(t)$ удовлетворяет условию

$$\det \int_0^\omega P(\tau)\,d\tau \neq 0. \tag{9}$$

Далее воспользуемся формулой

$$\int_0^\omega P(\tau)x(\tau,\lambda)\,d\tau = \tilde{P}(\omega)x(\tau,\lambda) - \int_0^t P_1(\tau)\dot{x}(\tau,\lambda)\,d\tau + \int_t^\omega P_2(\tau)\dot{x}(\tau,\lambda)\,d\tau,$$

где

$$P_1(\tau) = \int_0^\tau P(\sigma)\,d\sigma, \quad P_2(\tau) = \int_\tau^\omega P(\sigma)\,d\sigma, \quad \tilde{P}(\omega) = P_1(\omega).$$

Тогда из (8) в силу (1) получаем

$$\tilde{P}(\omega)x(t,\lambda) = \int_0^t P_1(\tau)\big(\lambda A(\tau)x(\tau,\lambda) + f(\tau)\big)\,d\tau -$$

$$- \int_t^\omega P_2(\tau)\big(\lambda A(\tau)x(\tau,\lambda) + f(\tau)\big)\,d\tau - \frac{1}{\lambda}\int_0^\omega A_1(\tau)f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\omega f(\tau)\,d\tau. \tag{10}$$

Из (10) на основании (9) имеем векторное интегральное уравнение

$$x(t,\lambda) = \lambda\int_0^\omega K(t,\tau)A(\tau)x(\tau,\lambda)\,d\tau + g(t,\lambda), \tag{11}$$

где

$$K(t,\tau) = \begin{cases} \tilde{P}^{-1}(\omega)P_1(\omega), & 0 \le \tau \le t \le \omega, \\ -\tilde{P}^{-1}(\omega)P_2(\tau), & 0 \le t < \tau \le \omega; \end{cases}$$

$$g(t,\lambda) = \int_0^\omega K(t,\tau)f(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\lambda}\tilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^\omega A_1(\tau)f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\lambda^2}\tilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau)\,d\tau.$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение $x(t,\lambda)$ уравнения (11) является решением краевой задачи (1), (3). Так как правые части в (1) ω-периодические по t, то ω-периодическое продолжение функции $x(t,\lambda)$ будет решением системы (1) при всех $t \in \mathbb{R}$.

Действительно, если $x(t,\lambda)$ — решение уравнения (11), то дифференцируя по t левую и правую части соответствующего (11) тождества, получаем

$$\frac{dx(t,\lambda)}{dt} = \lambda A(t)x(t,\lambda) + f(t),$$

или, что то же самое,

$$dx(t,\lambda) = [\lambda A(t)x(t,\lambda) + f(t)]\,dt. \tag{12}$$

Используя (12), из (11) имеем

$$x(t,\lambda) = \int_0^\omega K(t,\tau)\,dx(\tau,\lambda) - \frac{1}{\lambda}\tilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^\omega A_1(\tau)f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\lambda^2}\tilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда на основании (9) получаем

$$\tilde{P}(\omega)x(t,\lambda) = \int_0^t P_1(\tau)\,dx(\tau,\lambda) - \int_t^\omega P_2(\tau)\,dx(\tau,\lambda) -$$

$$- \frac{1}{\lambda}\int_0^\omega A_1(\tau)f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\lambda^2}\tilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Выполняя интегрирование по частям в первых двух слагаемых правой части (13), получаем (8).

А значит, справедливо и соотношение (7), которое запишем в виде

$$\int_0^\omega A_1(\tau)[\lambda A(\tau)x(\tau,\lambda) + f(\tau)]\,d\tau - \frac{1}{\lambda}\int_0^\omega f(\tau)\,d\tau = 0,$$

или, что то же самое,

$$\int_0^\omega A_1(\tau)\,dx(t,\lambda) - \frac{1}{\lambda}\int_0^\omega f(\tau)\,d\tau = 0. \tag{14}$$

Выполняя в (14) интегрирование по частям, имеем

$$\int_0^\omega \left[A(\tau)x(\tau,\lambda) + \frac{1}{\lambda}f(\tau)\right]d\tau = 0,$$

откуда следует (3). Тем самым установлено, что $x(t,\lambda)$ является ω-периодическим решением системы (1).

Примем следующие обозначения:

$$\alpha = \max_t \|A(t)\|, \qquad \gamma = \|\tilde{P}^{-1}(\omega)\|, \qquad h = \max_t \|f(t)\|,$$

$$q = \frac{1}{3}\gamma\alpha^3\omega^3, \qquad \|x\|_C = \max_t \|x(t)\|,$$

где $t \in [0,\omega]$, $\|\cdot\|$ — мультипликативная норма векторов и матриц.

Для исследования разрешимости уравнения (11) воспользуемся методом разложения в ряд по степеням параметра λ.

Формальное решение $x(t,\lambda)$ уравнения (11) будем искать в виде

$$x(t,\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}x_{-2}(t) + \frac{1}{\lambda}x_{-1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k(t), \tag{15}$$

где $x_i(t)$, $i = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$ — ω-периодические функции, подлежащие определению.

Для нахождения этих функций подставим (15) в (11) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ. Тогда получаем

$$x_{-2} = \tilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^{\omega} f(\tau)\,d\tau,$$

$$x_{-1}(t) = \int_0^{\omega} K(t,\tau)A(\tau)x_{-2}\,d\tau - \tilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^{\omega} A_1(\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$x_0(t) = \int_0^{\omega} K(t,\tau)[A(\tau)x_{-1}(\tau)+f(\tau)]\,d\tau, \tag{16}$$

$$x_k(t) = \int_0^{\omega} K(t,\tau)A(\tau)x_{k-1}(\tau)\,d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Из (16) получим

$$\|x_k(t)\|_C \le \max\int_0^{\omega} \|K(t,\tau)A(\tau)\|\,d\tau\,\|x_{k-1}(t)\|_C.$$

Поскольку $\|A_1(t)\| \le \alpha t$, то

$$\|P_1(t)\| \le \int_0^{t} \|A_1(\tau)\|\,\|A(\tau)\|\,d\tau \le \frac{1}{2}\alpha^2 t^2, \tag{17}$$

$$\|P_2(t)\| \le \int_t^{\omega} \|A_1(t)\|\,\|A(\tau)\|\,d\tau \le \frac{1}{2}\alpha^2(\omega^2 - t^2). \tag{18}$$

Используя оценки (17), (18), получаем

$$\int_0^{\omega} \|K(t,\tau)\|\,d\tau \le \frac{1}{6}\gamma\alpha^2(2t^3 - 3\omega^2 t + 2\omega^3). \tag{19}$$

На основании оценки (19) имеем

$$\max_t \int_0^{\omega} \|K(t,\tau)A(\tau)\|\,d\tau \le \frac{1}{3}\gamma\alpha^3\omega^3.$$

Таким образом, справедлива рекуррентная оценка

$$\|x_k(t)\|_C \le q\,\|x_{k-1}(t)\|_C, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

из которой следует оценка

$$\|x_k(t)\|_C \le q^k \|x_0(t)\|_C. \tag{21}$$

Далее нетрудно доказать, что ряд (15) сходится равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$ в проколотой окрестности $0 < |\lambda| < 1/q$.

Согласно [3, с. 160] заключаем: так как ряд (15) сходится равномерно, то его сумма $x(t,\lambda)$ представляет собой решение уравнения (11).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (2), (9). *Тогда при* $0 < |\lambda| < 1/q$ ω-*периодическое решение системы* (1) *существует и единственно. Это решение представимо в виде* (15).

На основании оценки (21) можно показать, что быстрота сходимости ряда (15) характеризуется неравенством

$$\|x - \tilde{x}_m\|_C \le \frac{\|x_0\|_C}{1 - |\lambda| q} (|\lambda| q)^{m+1}, \tag{22}$$

где

$$\tilde{x}_m = \frac{1}{\lambda^2} x_{-2} + \frac{1}{\lambda} x_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_k(t), \qquad m = 0, 1, \ldots .$$

Аналогично можно получить оценку решения $x(t, \lambda)$:

$$\|x\|_C \le \frac{1}{|\lambda|^2} \|x_{-2}\|_C + \frac{1}{|\lambda|} \|x\|_C + \frac{\|x_0\|_C}{1 - |\lambda| q}. \tag{23}$$

Оценки (22), (23) можно привести к коэффициентному виду, если учесть, что

$$\|x_{-2}\|_C \le \gamma \omega h,$$

$$\|x_{-1}\|_C \le \frac{1}{3} \gamma \alpha^3 \omega^3 \|x_{-2}\|_C + \frac{1}{2} \gamma \alpha \omega^2 h,$$

$$\|x_0\|_C \le \frac{1}{3} \gamma \alpha^2 \omega^3 (\alpha \|x_{-1}\|_C + h).$$

Замечания. **1.** Пусть $A_1(\omega) = \operatorname{diag}(O_p, \tilde{A}_1(\omega))$, где O_p — нулевая $(p \times p)$-мерная матрица, $\tilde{A}_1(\omega)$ — невырожденная $(q \times q)$-мерная матрица $(p + q = n)$. В этом случае наиболее целесообразным может оказаться предварительное блочное расщепление системы (1) [6], а затем применение разработанной методики.

2. По существу, в данной работе на основе метода малого параметра получены эффективно проверяемые достаточные условия существования и единственности ω-периодического решения системы (1). При этом периодическое решение выписывается в явном виде. Использование метода преобразований [7] позволяет расширить класс исследуемых систем, но тогда зачастую теряется конструктивность метода.

Данный подход позволяет также исследовать задачу о периодических решениях систем с малыми нелинейными возмущениями вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x).$$

Соответствующие вычисления авторы предполагают изложить в следующей работе.

1. *Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н.* О некоторых итерационных методах отыскания периодических решений неавтономных систем дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1984. – 36, № 3. – С. 345–352.
2. *Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н.* Об одном методе построения решений многоточечных краевых задач // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 9. – С. 10–13.
3. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954. – 499 с.
4. *Еругин Н. П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Изд-во АН БССР, 1963. – 272 с.
5. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
6. *Кенжебаев К.* К вопросу о решениях краевых задач с несвязанными краевыми условиями // Укр. мат. журн. – 1984. – 36, № 6. – С. 774–776.
7. *Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н.* Некоторые конструктивные методы анализа нелинейных систем дифференциальных уравнений. – Киев, 1994. – 40 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 94.34).

Получено 14.12.94