УДК 519.1

Л. А. Назарова, А. В. Ройтер (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КОНЕЧНОПРЕДСТАВИМЫЕ ДИАДИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА *

A criterion of finite representability of dyadic sets is presented

Наведено критерій скінченної зображуваності діадичних множин.

Диадические (= биинволютивные) множества D рассматривались в [1 – 10], где вопрос об их конечной представимости сводился к аналогичному вопросу для частично упорядоченного множества (= чум) $C(D)$ [12]. В данной статье мы приводим явный критерий конечной представимости D, передоказывая, в частности, результат [3]. При этом оказалось удобным рассматривать представления маркированных колчанов (п. 0), включающие в себя представления колчанов, чумов, диадических множеств и многие другие матричные задачи.

К сожалению, нам не удалось написать эту статью совместно с П. Габриелем, как это предполагалось весной 1997 г. в Цюрихе, но мы использовали предложенные им „матричные" определения (5.1, 5.2) и доказательство леммы 6.5.

Для удобства читателя приведены необходимые определения и доказательства из [1 – 3]. С другой стороны, мы часто опускаем доказательства лемм, состоящие в сопоставлении нескольких определений.

0. Представления маркированных колчанов. *0.1.* Мы используем правую запись: если $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$, то $\alpha\beta : A \to C$. Однако если $a \in A$, то иногда вместо $a\alpha$ будем писать $\alpha(a)$. Через $\mathrm{Ob}\ldots$, $\mathrm{Mor}\ldots$, $\mathrm{Is}\ldots$, $\mathrm{Ind}\ldots$ будем обозначать совокупность объектов, морфизмов, изоклассов (= классов изоморфизма), неразложимых изоклассов соответствующих категорий. Объект A *неразложим*, если $\mathrm{Hom}(A, A)$ содержит единственный ненулевой идемпотент 1_A. Если категория названа $\mathrm{Rep}\ldots$, то вместо $\mathrm{IndRep}\ldots$ пишем $\mathrm{Ind}\ldots$ и говорим *о конечной представимости*, если $|\mathrm{Ind}\ldots| < \infty$.

$A \simeq B(\mathcal{K})$ означает изоморфность объектов A и B категории $\mathcal{K}$. Если A и B — множества, то $A \simeq B(\mathrm{Sets})$ или $A \simeq B$ обозначает, что между A и B имеется естественное взаимно однозначное соответствие.

Если $\simeq$ — эквивалентность на множестве X, то $X^{\simeq}$ — множество классов эквивалентности. Произвольную инволюцию $*$ будем идентифицировать с эквивалентностью $\simeq_*$: $a \simeq_* b$, если $a = b$ или $a = b^*$.

$$X^{\simeq *} = \{x \in X \mid x^* = x\} \coprod \{\{x, x^*\} \mid x \in X,\ x^* \neq x\}.$$

Наоборот, если $\max_{A \in X^{\simeq}} |A| \leq 2$, то $\simeq$ есть $\simeq_*$.

$\mathcal{E}$ — категория, в которой $\mathrm{Ob}(\mathcal{E}) = \{(X, \simeq) \mid \simeq$ — эквивалентность на $X\}$; $\eta \in \mathcal{E}((X, \simeq), (Y, \simeq))$, если $\eta \in \mathrm{Sets}(X, Y)$ и η биективно переводит каждый класс $X^{\simeq}$ в некоторый класс $Y^{\simeq}$. I — (полная) подкатегория $\mathcal{E}$, $\mathrm{Ob}(I) = \{(X, *)\}$, где $*$ — инволюция на X; $I((X, *), (Y, *)) = \mathcal{E}((X, \simeq_*), (Y, \simeq_*))$. Морфизмы I назовем $*$*-отображениями.*

0.2. Пусть Q — колчан [10, 12], Q_v (соответственно Q_a) — множество его вершин (соответственно стрелок), t и h — отображения из Q_a в Q_v, сопоста-

* Частично поддержана грантом UM1-314 CRDF по Программе совместных научных проектов украинских и американских ученых.

вляющие стрелке $\overset{i}{\bullet}\xrightarrow{\alpha}\overset{j}{\bullet}$ ее начало (tail) $t(\alpha)=i$ и конец (head) $h(\alpha)=j$. В частности,

$$\Delta_n = \underset{0}{\bullet}\xrightarrow{\alpha_0}\underset{1}{\bullet}\cdots\underset{n-1}{\bullet}\xrightarrow{\alpha_{n-1}}\underset{n}{\bullet} \quad [13], \qquad \tilde{\Delta}_n = \begin{tikzcd} \underset{0}{\bullet} \arrow[r, "\alpha_0"] & \underset{1}{\bullet}\cdots\underset{n-1}{\bullet} \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] & \underset{n}{\bullet} \arrow[ll, bend right, "\alpha_n"'] \end{tikzcd} .$$

Если $\alpha\in Q_a$, то $Q(\alpha)$ — подколчан, состоящий из α, $t(\alpha)$, $h(\alpha)$ (изоморфный Δ_1 или $\tilde{\Delta}_0$). Представление V колчана Q в произвольной категории $\mathcal{K}$ задается набором объектов V_i, $i\in Q_v$, и морфизмов $V_\alpha\colon V_{t(\alpha)}\to V_{h(\alpha)}$, $\alpha\in Q_a$, категории $\mathcal{K}$. Эти представления образуют категорию $\mathcal{K}^Q$, где морфизм из V в W — это набор $\varphi_i\in\mathcal{K}(V_i,W_i)$, $i\in Q_v$, такой, что $\varphi_{t(\alpha)}W_\alpha = V_\alpha\varphi_{h(\alpha)}$ для любой $\alpha\in Q_a$. Если $\mathcal{K}=\operatorname{mod}k$, то $\mathcal{K}^Q$ — категория представлений Q над полем или кольцом k. $\mathcal{K}^{\Delta_1}$ — категория морфизмов, $\mathcal{K}^{\tilde{\Delta}_0}$ — категория эндоморфизмов категории $\mathcal{K}$ [13].

Для $\alpha\in Q_a$, $t(\alpha)=i$, $h(\alpha)=j$ (не исключено $i=j$) построим колчан $Q'_\alpha = Q'$, „стянув" стрелку α в точку $\overline{\alpha}$: $(Q'_\alpha)_a = Q_a\setminus\{\alpha\}$, $(Q'_\alpha)_v = (Q_v\setminus\{i,j\})\coprod\overline{\alpha}$. Если $\beta\in(Q'_\alpha)_a$, то положим $t'(\beta)=t(\beta)$ при $t(\beta)\notin\{i,j\}$; $h'(\beta)=h(\beta)$ при $h(\beta)\notin\{i,j\}$ и $t'(\beta)=\overline{\alpha}$ (соответственно $h'(\beta)=\overline{\alpha}$) при $t(\beta)\in\{i,j\}$ (соответственно $h(\beta)\in\{i,j\}$). (Пример: $\Delta'_n\simeq\Delta_{n-1}$ для любой $\alpha\in(\Delta_n)_\alpha$).

Если каждой $i\in Q_v$ сопоставлена подкатегория $\mathcal{K}(i)\subset\mathcal{K}$, то возникает подкатегория $\mathcal{K}^Q_v$ в $\mathcal{K}^Q$: $V\in\operatorname{Ob}\mathcal{K}^Q_v$, если $V_i\in\mathcal{K}(i)$; $(\ldots,\varphi_i,\ldots)\in\operatorname{Mor}\mathcal{K}^Q_v$, если $\varphi_i\in\operatorname{Mor}\mathcal{K}(i)$, $i\in Q_v$. Нам понадобится также несколько более общая ситуация.

Маркировка $M(Q)$ колчана Q — это наборы категорий $\mathcal{K}_i$, $\mathcal{K}_\alpha$ (по одной для каждой $i\in Q_v$, $\alpha\in Q_a$) и функторов $T_\alpha\colon\mathcal{K}_{t(\alpha)}\to\mathcal{K}_\alpha$, $H_\alpha\colon\mathcal{K}_{h(\alpha)}\to\mathcal{K}_\alpha$. Представление V маркированного колчана $(Q,M(Q))$ сопоставляет каждой $i\in Q_v$ объект V_i категории $\mathcal{K}_i$ и каждой $\alpha\in Q_\alpha$ морфизм $V_\alpha\colon T_\alpha(V_{t(\alpha)})\to H_\alpha(V_{h(\alpha)})$ категории $\mathcal{K}_\alpha$. При фиксированной маркировке[1] $M(Q)$ построим категорию $\operatorname{Rep}(Q,M(Q))$. $\operatorname{Hom}(V,W)=\{(\ldots\varphi_i\ldots)\mid i\in Q_v,\ \varphi_i\in\operatorname{Mor}\mathcal{K}_i,\ T_\alpha(\varphi_{t(\alpha)})W_\alpha = V_\alpha H_\alpha(\varphi_{h(\alpha)})\ (\forall\alpha\in Q_a)\}$.

Для каждой $i\in Q_v$ естественно задается функтор $\Phi_i\colon\operatorname{Rep}(Q,M)\to\mathcal{K}_i$; $\Phi_i(V)=V_i$, $\Phi_i(\ldots,\varphi_i,\ldots)=\varphi_i$.

Сопоставим $M=M(Q)$ маркировку M' колчана Q'_α. Пусть $A=\{t(\alpha), h(\alpha)\}$, $\mathcal{R}=\operatorname{Rep}(Q(\alpha),M_\alpha)$ (M_α — ограничение M на $Q(\alpha)$). Положим $\mathcal{K}'_i=\mathcal{K}_i$ при $i\in(Q'_\alpha)_v\setminus\overline{\alpha}$ и $\mathcal{K}_{\overline{\alpha}}=\mathcal{R}$. Для $\beta\in(Q'_\alpha)_a$ положим $\mathcal{K}'_\beta=\mathcal{K}_\beta$ и $T'_\beta=T_\beta$ (соответственно $H'_\beta=H_\beta$) при $t(\beta)\notin A$ (соответственно $h(\beta)\notin A$). Если же $t(\beta)=i\in A$ (соответственно $h(\beta)=i\in A$), то нужно указать функтор T'_β (соответственно H'_β): $\mathcal{R}\to\mathcal{K}_\beta$. Положим $T'_\beta=\Phi_i^{\mathcal{R}}T_\beta$, $H'_\beta=\Phi_i^{\mathcal{R}}H_\beta$, где $\Phi_i^{\mathcal{R}}\colon\operatorname{Rep}(Q(\alpha),M_\alpha)\to\mathcal{K}_i$.

Лемма. *Категории* $\operatorname{Rep}(Q',M')$ *и* $\operatorname{Rep}(Q,M)$ *эквивалентны.*

0.3. Зафиксируем поле k, которое будем считать алгебраически замкнутым (хотя во многих случаях его замкнутость не существенна); $\operatorname{mod}k$ — кате-

[1] Очевидным образом (с точностью до теоретико-множественных тонкостей) можно построить и категорию представлений Q при различных маркировках, но нам это не понадобится.

гория конечномерных векторных пространств. Рассматриваемые ниже k-категории [10] будем считать конечномерными ($\dim \operatorname{Hom}(A, B) < \infty$), их идемпотенты — расщепляемыми, а функторы на них — k-функторами [10]. В этих предположениях *агрегат* — это аддитивная k-категория. Если $\mathcal{K}$ — k-подкатегория $\operatorname{mod} k$, то для ее объектов определена размерность, а для морфизмов — ранг. Через $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ обозначим пространство, порожденное $x_1, \ldots, x_n$.

Вектроид $\mathcal{V}$ [14] — это k-подкатегория $\operatorname{mod} k$, в которой все объекты неразложимы и попарно неизоморфны ($\operatorname{Ob} \mathcal{V} \simeq \operatorname{Ind} \mathcal{V}$).

Вектроид $\mathcal{V}$ — неаддитивная категория, однако он порождает агрегат $\oplus \mathcal{V} \subset \operatorname{mod} k$ [10] (объекты $\oplus \mathcal{V}$ — прямые суммы $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$, $n \geq 0$). Наоборот, каждый подагрегат $\mathcal{A}$ категории $\operatorname{mod} k$ вполне определяется вектроидом $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ (полной подкатегорией $\mathcal{A}$, содержащей по одному представителю из каждого неразложимого изокласса), $\mathcal{A} = \oplus \mathcal{V}(\mathcal{A})$.

Два вектроида $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$ *изоморфны* ($\mathcal{V}_1 \simeq \mathcal{V}_2$), если существует функтор-изоморфизм Φ из категории $\mathcal{V}_1$ в категорию $\mathcal{V}_2$ и $\Phi^1 = \Phi \Phi^2$, где Φ^i — вложение $\mathcal{V}_i$ в $\operatorname{mod} k$, $i = 1, 2$.

Размерность $\dim \mathcal{V} = \max_{X \in \mathcal{V}} \dim X$. Если $\dim \mathcal{V} = 1$, то $\mathcal{V}$ с точностью до изоморфизма определяется чумом $\operatorname{Ob}(\mathcal{V}, \leq) : X \leq Y$, если $\mathcal{V}(X, Y) \neq 0$.

Будем далее в определениях пп. 0.2 считать, что $\mathcal{K} = \operatorname{mod} k$, $\mathcal{K}(i)$, $\mathcal{K}_i$, $\mathcal{K}_\alpha$ — агрегаты. Тогда $\mathcal{K}^Q$, $\mathcal{K}^Q_v$, $\operatorname{Rep}(Q, M)$ — также агрегаты. В частности, для вектроида $\mathcal{V}$ положим $\operatorname{Rep} \mathcal{V} = \mathcal{K}^Q_v$, где $Q = \Delta_1 = 0 \to 1$. $\mathcal{K}(0) = \operatorname{mod} k$, $\mathcal{K}(1) = \oplus \mathcal{V}$; а для пары вектроидов $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_1$ $\operatorname{Rep}(\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1) = \mathcal{K}^{\Delta_1}_v$, где $\mathcal{K}(0) = \oplus \mathcal{V}_0$, $\mathcal{K}(1) = \oplus \mathcal{V}_1$.

Каждый объект X агрегата $\mathcal{K}_i$ однозначно разлагается в прямую сумму $\oplus_{j=1}^{n(X)} X_j$, где $X_j \in \operatorname{Ind} \mathcal{K}_i$. *Размерность представления* $V \in \operatorname{Rep}(Q, M)$ — это набор $n(V_i)$, $i \in Q_v$. Представление $V \in \operatorname{Rep}(Q, M)$ невырожденное, если существует $\alpha \in Q_a$, $V_\alpha \neq 0$. $\overline{\operatorname{Ind}}(Q, M)$ (соответственно $\overline{\operatorname{Ind}}\, \mathcal{V}$, $\overline{\operatorname{Ind}}(\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1)$) — совокупность невырожденных неразложимых изоклассов $\operatorname{Rep}(Q, M)$ (соответственно $\operatorname{Rep} \mathcal{V}$, $\operatorname{Rep}(\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1)$). Маркировка M колчана Q *строгая* (соответственно *объектно строгая*), если для $\varepsilon \in \operatorname{Mor}(\mathcal{K}_i)$, $\varepsilon \neq 0$, $i \in Q_v$ (соответственно $A \in \operatorname{Ob}(\mathcal{K}_i)$, $A \neq 0$) существует $\alpha \in Q_a$ такая, что либо $t(\alpha) = i$ и $T_\alpha(\varepsilon) \neq 0$ (соответственно $T_\alpha(A) \neq 0$), либо $h(\alpha) = i$ и $H_\alpha(\varepsilon) \neq 0$ (соответственно $H_\alpha(A) \neq 0$). Из любой маркировки M можно „сделать" строгую маркировку $\overline{M}$, профакторизовав для каждой $i \in Q_v$ агрегат $\mathcal{K}_i$ по пересечению ядер функторов T_α и H_α для тех α, для которых $h_\alpha = i$ или $t_\alpha = i$.

Лемма. $\overline{\operatorname{Ind}}(Q, M) \simeq \overline{\operatorname{Ind}}(Q, \overline{M})$. $\operatorname{Ind}(Q, M) \setminus \overline{\operatorname{Ind}}(Q, M) \simeq \coprod_{i \in Q_v} \operatorname{Ind}(\mathcal{K}_i)$. *Если M объектно строгая, то* $\operatorname{Ind}(Q, M) \simeq \operatorname{Ind}(Q, \overline{M})$.

0.4. Категории $\operatorname{Rep} \mathcal{V}$ были введены в [15] и рассматривались, в частности, в [16]. В обозначениях [10] $\operatorname{Rep} \mathcal{V} = (\oplus \mathcal{V})^k$. В [17] показано, что к $\operatorname{Rep} \mathcal{V}$ может быть сведено описание представлений произвольной конечномерной алгебры. Известно [10], что если $|\operatorname{Ind} \mathcal{V}| < \infty$, то $\dim \mathcal{V} \leq 3$. Если $\dim \mathcal{V} = 1$, то $\operatorname{Rep} \mathcal{V}$ эквивалентна категории представлений чум $(\operatorname{Ob} \mathcal{V}, \leq)$ [10, 11], критерий конечной представимости которых дан в [18]. Цель этой статьи — дать явный критерий конечной представимости при $\dim \mathcal{V} = 2$.

В пп. 2.4 будет показано, как вопрос о конечной представимости пары вектроидов сводится к аналогичному вопросу для одного вектроида.

1. Мультиупорядоченные множества. *1.1.* Частично упорядоченное множество (чум) S назовем *мультиупорядоченным множеством* (мум), если каждой паре $s \le t$, $s, t \in S$, сопоставлено $\varphi(s, t)$ — натуральное число ($\neq 0$) или символ ∞ так, что если $s \le t \le r$, то $\varphi(s, r) \le \min\{\varphi(s, t), \varphi(t, r)\}$. Иногда нам удобно будет считать φ определенной на всем $S \times S$: $\varphi(s, t) = 0$, если $s \not\le t$. Мы часто будем писать также $\varphi(s)$ вместо $\varphi(s, s)$.

Ширина $w(S)$ чум S — это максимальное число его попарно несравнимых элементов.

1.2. Пример. Пусть $A = A_\Lambda$ — (правый) модуль над кольцом Λ. Положим $\overline{a} \simeq \overline{b}$, если $\overline{a}, \overline{b} \in A$, $\overline{a}\lambda = \overline{b}$; $\overline{b}\lambda' = \overline{a}$; $\lambda, \lambda' \in \Lambda$. Рассмотрим чум $S(A)$: $S(A) = (A \setminus 0)^{\simeq}$. $a \le b$ $(a, b \in S(A))$, если $\overline{a}\lambda = \overline{b}$, $\overline{a} \in a$, $\overline{b} \in b$, $\lambda \in \Lambda$. Если Λ — конечномерная алгебра над полем k и $\dim A < \infty$, то каждый элемент $\lambda \in \Lambda$ есть линейный оператор и, следовательно, имеет ранг. В этом случае на $S(A)$ можно ввести структуру мум, полагая $\varphi(a, b) = \min\{\operatorname{rank}\lambda \mid \overline{a}\lambda = \overline{b},\ \overline{a} \in a,\ \overline{b} \in b\}$.

Если алгебра Λ локальна, то следующие условия равносильны:

1) $|S(A)| < \infty$;

2) $w(S(A)) \le 1$;

3) A — цепной модуль, т. е. из $A_1, A_2 \subset A$ следует, что либо $A_1 \subset A_2$ либо $A_2 \subset A_1$.

Действительно, если R — радикал Λ $(\Lambda / R \simeq k)$ и найдется $A_1 \subset A$ такой, что $\dim A' / A'R > 1$, то ни одно из условий $1-3$ не выполняется. Пусть теперь $\dim A' / A'R = 1$ для любого $A' \neq 0$. Тогда все A' имеют вид AR^i и условия $1-3$ выполняются.

Пусть ψ_l — проекция A на A / AR^l. Базис $\{a_1, \ldots, a_m\}$ модуля A назовем *треугольным*, если при любом l элементы $\left\{\psi_l(a_i) \mid a_i \notin AR^l\right\}$ образуют базис в A / AR^l. В таком базисе (при соответствующей нумерации) матрицы, соответствующие элементам Λ, имеют треугольный вид. Если $|S(A)| < \infty$, то, выбирая по представителю в каждом классе $S(A)$, получаем треугольный базис A.

1.3. *Размерность* $\dim S$ (соответственно *ранг* $r(S)$) мум S — это $\sup_{x \in S} \varphi(x, x)$ (соответственно $\sup_{x, y \in S,\, x < y} \varphi(x, y)$). Из определения мум следует, что $r(S) \le \dim S$. Мум размерности 1 — это чум. Мум размерности 2 названы в [14] биупорядоченными множествами (= *бум*). Мум S *конечно-упорядоченное* (= *кум*), если $\dim S < \infty$. Пусть $s, t \in S$. Будем писать $s \asymp t$, если s и t не сравнимы; $s \lhd t$, если $s \le t$ и $\varphi(s, t) = 1$; $s \Rightarrow t$, если $s < t$ и $\varphi(s, t) > 1$; $\langle s, t\rangle = \langle t, s\rangle = \{x \in S \mid s < x < t\}$. Из $x \lhd y \le z$ или $x \le y \lhd z$ следует (по определению мум) $x \lhd z$.

Замечание. Биупорядоченное множество вполне определяется отношениями $\le$ и $\lhd$ такими, что:

1) из $a \lhd b$ следует $a \le b$;

2) из $a \le b \lhd c$ или $a \lhd b \le c$ следует $a \lhd c$.

Если $X, Y \subset S$, то положим $X \asymp Y$ (соответственно $X \lhd Y$), если из $x \in X$, $y \in Y$ следует $x \asymp y$ (соответственно $x \lhd y$); $X^{\asymp}(Y) = \{x \in X \mid x \asymp y$, при $y \in Y\}$ $(= X^{\asymp}(y_1, \ldots, y_n)$, если $\{y_1, \ldots, y_n\} = Y)$.

Пару $s \Rightarrow t$ назовем *ребром*, которое выходит из s и входит в t. Если $e_1 = \{s_1 \Rightarrow t_1\}$, $e_2 = \{s_2 \Rightarrow t_2\}$, то e_1 *содержит* e_2. $(e_1 \supset e_2)$, если $s_1 \le s_2$, $t_1 \ge t_2$ и либо $s_1 \neq s_2$, либо $t_1 \neq t_2$. Точка x *содержится* в ребре $\sigma = (a, b)$ $(x \in \sigma)$, если $a \le x \le b$; x *оснащает* σ, если $\{x\} \asymp \{a, b\}$. Ребро $\sigma =$

$= \{s \Rightarrow t\}$ *короткое*, если $\langle s, t\rangle = \varnothing$; *максимальное*, если $\sigma \not\subset \sigma'$; *оснащенное*, если $S^{\asymp}(s, t) \neq \varnothing$; *гомогенное*, если из $x \in \sigma$ следует $\varphi(x) = \varphi(\sigma)$ (в бум каждое ребро гомогенно). *Длина* $l(\sigma)$ ребра σ есть $|\langle s, t\rangle|$.

Мум *транзитивно*, если из $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow c$ следует $a \Rightarrow c$, и *гомогенно*, если кроме того каждое его ребро гомогенно.

Пусть $R_1(S)$ — совокупность *изолированных* точек мум S, т. е. таких, из которых не выходят и в которые не входят ребра. Если T — подмножество мум S, то T также наделено структурой мум. Будем говорить, что мум T β-*содержится* в мум S (и писать $T \overset{\beta}{\subset} S$), если существует вложение $\beta \in \mathrm{Sets}\,(T, S)$ такое, что:

1) $t_1 \leq t_2$, если и только если $\beta(t_1) \leq \beta(t_2)$;

2) $\varphi_T(t_1, t_2) \leq \varphi_S(\beta(t_1), \beta(t_2))$, где $t_1 \leq t_2$, $T = (T, \leq, \varphi_T)$, $S = (S, \leq, \varphi_S)$.

Если S транзитивно, то для каждой не изолированной точки x (соответственно каждого ребра γ) однозначно определено (единственное) максимальное ребро σ_x (соответственно σ_γ), содержащее x (соответственно γ). Для транзитивного S построим гомогенное $S_h \overset{\beta}{\subset} S$, $S_h = (S, \leq, \varphi_h)$, где $\varphi_h(x) = \varphi(x)$, если $x \in R_1(S)$; $\varphi_h(x) = \varphi(\sigma_x)$ при $x \notin R_1(x)$; $\varphi_h(\gamma) = \varphi(\sigma_\gamma)$.

1.4. Набор $P_X = \{X_1, \ldots, X_p\}$, $X_i \subset X$ (X — произвольное множество) назовем (p)-*разложением* X, если $X = \coprod_{i=1}^{p} X_i$ (т. е. $\bigcup_{i=1}^{p} X_i = X$, $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$). Если $S_i, \ldots, S_p$ — мум, то на $S = \coprod_{i=1}^{p} S_i$ можно ввести структуру мум двумя способами: $S^{\asymp} = \coprod^{\asymp} S_i$ (соответственно $S^{\triangleleft} = \coprod^{\triangleleft} S_i$), полагая $S_i \asymp S_j$ (соответственно $S_i \triangleleft S_j$) при $i < j$.

Чум S *примитивно*, если $S = \coprod_{i=1}^{n}{}^{\asymp} S_i$, S_i — цепи ($n = w(S)$); в этом случае будем писать $S = (s_1, \ldots, s_n)$, где $s_i = |S_i|$.

Обозначим через N чум $\{a, b, c, d \mid a < b > c < d\}$. Примитивные чум (1, 1, 1, 1), (2, 2, 2), (1, 3, 3) и непримитивное чум $N \coprod^{\asymp} (4)$ будем называть критическими. Согласно [18] чум конечнопредставимо, если и только если оно не содержит критических подмножеств.

Если $X_1, \ldots, X_p \subset X$ и подмножества X_i пересекаются, положим $\widetilde{\coprod} X_i = \{(x, X_i) \mid x \in X_i\} = \{(x, i) \mid x \in X_i\}$. Если $S_1, \ldots, S_p$ — мум, то определено $\widetilde{\coprod}^{\asymp} S_i$ и $\widetilde{\coprod}^{\triangleleft} S_i$.

1.5. Для мум S положим $\mathring{S} = \{s \in S \mid \varphi(s) > 1\}$; точки из $\mathring{S}$ будем называть *большими*, а из $S \setminus \mathring{S}$ — *малыми*. На диаграммах будем изображать $x \in S$ точкой, если $\varphi(x) = 1$; кружком — $\circ$, если $\varphi(x) = 2$; и ⓝ, если $2 < \varphi(x) = n \leq \infty$. Если $s < t$ и $\langle s, t\rangle = \varnothing$, то рисуем стрелку $s \to t$, если $\varphi(s, t) = 1$, и двойную стрелку $s \Rightarrow t$, если $\varphi(s, t) > 1$. Гомогенное конечное мум вполне определяется своей диаграммой (для негомогенных мум нужно было бы рисовать стрелку $s \to t$, если $\varphi(s, t) = 1$ и $\varphi(s, x) > 1$, $\varphi(x, t) > 1$ для $x \in \langle s, t\rangle$, и, кроме того, указывать значение $\varphi(\sigma)$ для негомогенных ребер σ; однако мы будем изображать диаграммами только гомогенные мум). Изоморфизм и двойственность мум определяются естественным образом (на диаграмме двойственное мум получается „переворотом" всех стрелок).

2. Вектроиды и их представления. *2.1.* Каждый объект A вектроида $\mathcal{V}$ есть (правый) модуль над (конечномерной) локальной алгеброй $\mathcal{V}(A, A)$.

Если $\Omega(A)$ — треугольный базис $A_{\mathcal{V}(A,A)}$ (пп. 1.2), то $\Omega_{\mathcal{V}} = \coprod_{A\in\mathcal{V}} \Omega(A)$ — *треугольный базис вектроида* $\mathcal{V}$.

Если $X = \oplus_{i=1}^{n} X_i$, $X_i \in \mathcal{V}$, $X \in \oplus\mathcal{V}$, то, выбирая в каждом X_i базис $\Omega(X_i) \subset \subset \Omega_{\mathcal{V}}$, получаем базис $\Omega(X)$ пространства X и отображение $\delta_X : \Omega(X) \to \Omega_{\mathcal{V}}$ (если $a \in \Omega(X_i) \subset \Omega_{\mathcal{V}}$, то $\left|\delta_x^{-1}(a)\right|$ есть число вхождений X_i прямым слагаемым в X). Вектроид *цепной*, если $|\mathrm{Ob}\,\mathcal{V}| < \infty$ и $A_{\mathcal{V}(A,A)}$ — цепной модуль для всех $A \in \mathcal{V}$, и *сверхцепной*, если, кроме того, $\dim\mathcal{V} = 1$ и $w(\mathrm{Ob}\,\mathcal{V}, \leq) = 1$.

Сверхцепной $\mathcal{V}^n$ определяется (с точностью до изоморфизма) числом $n = |\mathrm{Ob}\,\mathcal{V}|$. Простейшими примерами цепных, но не сверхцепных вектроидов являются

$$\mathcal{V}_1^2 : \mathrm{Ob}\,\mathcal{V} = \{A_1, A_2\}, \quad \dim\mathcal{V} = 1, \quad \mathcal{V}(A_i, A_i) = k, \quad \mathcal{V}(A_i, A_j) = \{0\}$$

и

$$\mathcal{V}_2^1 : \mathrm{Ob}\,\mathcal{V} = \{A\}, \quad \dim\mathcal{V} = 2, \quad \mathcal{V}(A, A) = k\{1, r\}, \quad r^2 = 0.$$

Если в каждом $A \in \mathcal{V}$ зафиксированы подпространства $A' \subset A''$ и $A_1'\mathcal{V}(A_1, A_2) \subset A_2'$, $A_1''\mathcal{V}(A_1, A_2) \subset A_2''$ (при $A_1, A_2 \in \mathcal{V}$), то обозначим через $\overline{A}$ фактор-пространство A''/A' и через $\psi_{A,B}$ естественное отображение $\mathcal{V}(A, B)$ в $\mathrm{mod}\,k(\overline{A}, \overline{B})$ $(B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{V})$.

Вектроид

$$\overline{\mathcal{V}} : \mathrm{Ob}\,\mathcal{V} = \{\overline{A} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{V} \,/\, A' \neq A''\}, \qquad \overline{\mathcal{V}}(\overline{A}, \overline{B}) = \mathrm{Im}\,\psi_{AB}$$

будем называть подфактор-вектроидом вектроида $\mathcal{V}$.

Лемма. *Если $\mathcal{V}$ цепной, но не сверхцепной вектроид, то $\mathcal{V}$ имеет подфактор-вектроид, изоморфный $\mathcal{V}_2^1$ или $\mathcal{V}_1^2$.*

Действительно, если $\dim\mathcal{V} > 1$, то $\mathcal{V}_2^1 \subset \mathcal{V}$, а если $\dim\mathcal{V} = 1$, но $w(\mathrm{Ob}\,\mathcal{V}, \leq) > 1$, то $\mathcal{V}_1^2 \subset \mathcal{V}$.

2.2. Сопоставим (аналогично пп. 1.2) вектроиду $\mathcal{V}$ кум $S_{\mathcal{V}}$, где, как множество, $S_{\mathcal{V}}$ есть $\coprod_{A\in\mathcal{V}} S(A_{\mathcal{V}(A,A)})$ и при $a \in S(A_{\mathcal{V}(A,A)})$, $b \in S(A_{\mathcal{V}(B,B)})$ положим $a \leq b$, если $\overline{a}\psi = \overline{b}$, где $\psi \in \mathcal{V}(A, B)$; $\varphi(a, b) = \min\{\mathrm{rank}\,\psi \mid \overline{a} \in a, \overline{b} \in b, \overline{a}\psi = \overline{b}, \psi \in \mathcal{V}(A, B)\}$. $\dim S_{\mathcal{V}} = \dim\mathcal{V}$, $|S_{\mathcal{V}}| < \infty$, если и только если $\mathcal{V}$ цепной.

Если T цепной, то, выбирая по представителю в каждом $x \in S_{\mathcal{V}}$, получаем треугольный базис $\mathcal{V}$ (и любой треугольный базис цепного вектроида получается таким способом). Положим $r(\mathcal{V}) = r(S_{\mathcal{V}})$.

Через ξ обозначим естественное отображение $S_{\mathcal{V}}$ в $\mathrm{Ob}\,\mathcal{V}$: $\xi(a) = A$, если $a \in S(A_{\mathcal{V}(A,A)})$, (т. е. $a \ni \overline{a} \in A$). ξ задает эквивалентность $\tilde{\xi}$ на $S_{\mathcal{V}}$: $a\tilde{\xi}b$, если $a\xi = b\xi$, $(S_{\mathcal{V}})^{\tilde{\xi}} \simeq \mathrm{Ob}\,\mathcal{V}$. $\tilde{\xi}$ индуцирует эквивалентность $\simeq$ на $\Omega(X)$ $(X \in \in \mathcal{V})$, и $\delta_X \in \mathcal{E}((\Omega(X), \simeq), (S_{\mathcal{V}}, \tilde{\xi}))$ (см. пп. 0.1).

Замечание. Вообще говоря, вектроид $\mathcal{V}$ не восстанавливается с точностью до изоморфизма по мум $S_{\mathcal{V}}$ с отношением эквивалентности $\tilde{\xi}$, но это имеет место, если $\mathcal{V}$ конечнопредставим [14].

2.3. Согласно пп. 0.3 представление вектроида $\mathcal{V}$ — это тройка (U, f, X), где $U \in \mathrm{mod}\,k$, $X \in \oplus\mathcal{V}$, $f \in \mathrm{mod}\,k(U, X)$. Размерность (U, f, X) — это пара

m, n, где $m = \dim_k U$, а n — число прямых слагаемых в разложении X на неразложимые (аналогично определяется размерность в $\operatorname{Rep}(\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1)$). $\operatorname{Is}^{m\times n}$ (соответственно $\operatorname{Ind}^{m\times n}$) — совокупность изоклассов (соответственно неразложимых изоклассов) размерности (m, n) в категории $\operatorname{Rep}\mathcal{V}$. $|\operatorname{Is}^{0\times 0}| = 1$, $|\operatorname{Ind}^{0\times 0}| = \varnothing$, $\operatorname{Is}^{1\times 0} = \operatorname{Ind}^{1\times 0} = \{R_0\} = \{(U_1, 0, 0)\}$ $(\dim U_1 = 1)$. Иногда удобнее рассматривать вместо $\operatorname{Rep}\mathcal{V}$ ее полную подкатегорию $\operatorname{Rep}'\mathcal{V} = \{(U, f, X) \mid \ker f = 0\}$ $\operatorname{Ind}'\mathcal{V} = \operatorname{Ind}\mathcal{V}\setminus\{R_0\}$. $\operatorname{Is}^{0\times 1}(\mathcal{V}) = \operatorname{Ind}^{0\times 1}(\mathcal{V}) \simeq \operatorname{Ob}\mathcal{V}(\mathrm{Sets})$; $\operatorname{Ind}^{1\times 1}(\mathcal{V}) \simeq$ $\simeq S_{\mathcal{V}}(\mathrm{Sets})$.

Таким образом, $S_{\mathcal{V}}$ вкладывается в $\operatorname{Ind}\mathcal{V}$, и, значит, конечнопредставимый вектроид — цепной (пп. 1.2).

Пусть $\mathcal{V}_2$ — (не цепной) вектроид: $\operatorname{Ob}\mathcal{V}_2 = \{A\}$, $\dim A = 2$, $\mathcal{V}_2(A, A) = k$, тогда $\operatorname{Rep}\mathcal{V}_2$ эквивалентен $\operatorname{mod} k^{Q}$, где $Q = \overset{x}{\bullet} \rightrightarrows \overset{y}{\bullet}$ $(= \tilde{A}_1)$, т. е. пучку матриц. В этом случае $m = \dim_k \mathcal{V}_x$, $n = \dim_k \mathcal{V}_y$ $|S_{\mathcal{V}_2}| = |\operatorname{Ind}\mathcal{V}_2| = |\operatorname{Ind}^{1\times 1}(\mathcal{V}_2)| = \infty$.

Лемма. *Если* $\mathcal{V}^n$ *сверхцепной и* $mn > 1$, *то* $\operatorname{Ind}^{m\times n} = \varnothing$ $(|\operatorname{Ind}\mathcal{V}^n| = 2^{n+1} = |\{R_0\}| + |\operatorname{Ob}\mathcal{V}^n| + |S_{\mathcal{V}_n}|)$.

2.4. **Лемма.** *Если ни один из вектроидов* $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_1$ *не сверхцепной, то* $|\operatorname{Ind}(\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1)| = \infty$.

Если $\overline{\mathcal{V}}_0$ (соответственно $\overline{\mathcal{V}}_1$) подфактор-вектроид $\mathcal{V}_0$ (соответственно $\mathcal{V}_1$), то $|\operatorname{Ind}(\overline{\mathcal{V}}_0, \overline{\mathcal{V}}_1)| \le |\operatorname{Ind}(\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1)|$. Следовательно, с учетом леммы 2.1 можно считать, что каждый из $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_1$ имеет вид $\mathcal{V}_2^1$ или $\mathcal{V}_1^2$. Если $\mathcal{V}_0 \simeq \mathcal{V}_1 \simeq \mathcal{V}_1^2$, то $\operatorname{Rep}(\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1) \simeq \operatorname{mod}_k^{Q}$, где $Q = \tilde{A}_3 = \begin{array}{ccc} \bullet & \rightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \uparrow \\ \bullet & \leftarrow & \bullet \end{array}$, $|\operatorname{Ind}| = \infty$ (см., например, [10]).

Если $\mathcal{V}_0 \simeq \mathcal{V}_1 \simeq \mathcal{V}_2^1$, рассмотрим множество $T_\lambda \in \operatorname{Ind}\mathcal{V}^{1\times 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. При $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_2^1$, $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_1^2$ предоставляем читателю построить аналогичную серию в $\operatorname{Ind}^{1\times 2}$.

Для двух произвольных вектроидов $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ построим вектроид $\mathcal{V} \coprod \mathcal{W}$: $\operatorname{Ob}(\mathcal{V} \coprod \mathcal{W}) = \operatorname{Ob}\mathcal{V} \coprod \operatorname{Ob}\mathcal{W}$. $\operatorname{Hom}(A, B) =$ 1) $\mathcal{V}(A, B)$, 2) $\mathcal{W}(A, B)$, 3) 0, если соответственно 1) $A, B \in \mathcal{V}$, 2) $A, B \in \mathcal{W}$, 3) $A \in \mathcal{V}$, $B \in \mathcal{W}$ или $A \in \mathcal{W}$, $B \in \mathcal{W}$.

Предложение. *Если* $\mathcal{V}$ — *произвольный, а* $\mathcal{V}^n$ — *сверхцепной вектроид,* $n > 1$, *то* $\operatorname{Ind}(\mathcal{V}^n, \mathcal{V}) \simeq \operatorname{Ind}(\mathcal{V} \coprod \mathcal{V}^{n-1}) \setminus \operatorname{Ob}\mathcal{V}^{n-1}(\mathrm{Sets})$.

Для доказательства рассмотрим колчан $Q = \overset{1}{\bullet} \leftarrow \overset{0}{\bullet} \rightarrow \overset{2}{\bullet}$ и категорию $\mathcal{K}_{\mathcal{V}}^{Q}$, где $\mathcal{K}_0 = \operatorname{mod} k$, $\mathcal{K}_1 = \oplus\mathcal{V}^{n-1}$, $\mathcal{K}_2 = \oplus\mathcal{V}$.

Тогда, с одной стороны, ясно, что $\mathcal{K}_{\mathcal{V}}^{Q} \simeq \operatorname{Rep}(\mathcal{V} \coprod \mathcal{V}^{n-1})$, а с другой (с учетом лемм 0.2 и 2.3) — $\operatorname{Ind}\mathcal{K}_{\mathcal{V}}^{Q} \simeq \operatorname{Ind}(\mathcal{V}^n, \mathcal{V}) \coprod \operatorname{Ob}\mathcal{V}^{n-1}$.

3. Диадические множества. *3.1.* Будем далее считать, что вектроид $\mathcal{V}$ цепной и $\dim\mathcal{V} \le 2$. Пусть $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{V}$. Выясним вид $\mathcal{V}(A, A)$, $\mathcal{V}(B, B)$ и $\mathcal{V}(A, B)$ (см. [10], п. 4.9). Если $\dim A = 2$, то $\mathcal{V}(A, A) = k\{1, r\}$, $r^2 = 0$. $\Omega(A) =$

$= \{a_1, a_2\}$, $a_1 r = a_2$. При $\dim B = 1$ возможны случаи:

a) $\mathcal{V}(A, B) = 0$;

b) $\mathcal{V}(A, B) = \mathrm{mod}\, k\, (A, B)$;

c) $\dim \mathcal{V}(A, B) = 1$, $\mathcal{V}(A, B) = k\{e_{11}\}$,

где $a_1 e_{11} = b$, $a_2 e_{11} = 0$ $(B = k\{b\})$.

Три двойственных случая (соответственно a′), b′), c′)) получаем при $\dim A = 1$, $\dim \mathcal{V} = 2$.

Пусть $\dim A = \dim B = 2$, $\Omega(A) = \{a_1, a_2\}$, $\Omega(B) = \{b_1, b_2\}$, $\mathcal{V}(A, A) = k\{1_A, r_A\}$, $\mathcal{V}(B, B) = k\{1_B, r_B\}$, $a_1 r_A = a_2$, $b_1 r_B = b_2$. Обозначим через e_{ij} $(1 \le i, j \le 2)$ „матричную единицу" в $\mathrm{mod}\, k\, (A, B)$ $(a_i e_{ij} = e_j,\ a_j e_{ij} = 0$ при $i \ne j)$. $\mathcal{V}(A, B)$ — подбимодуль в ${}_{\mathcal{V}(A,A)} k^{2\times 2}_{\mathcal{V}(B,B)}$.

Лемма. *Если* $A, B \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{V}$, $\dim A = \dim B = 2$, *то подпространство* $\mathcal{V}(A, B)$ *в* $\mathrm{mod}\, k\, (A, B)$ *при фиксированных треугольных базисах в* A, B *имеет один из следующих видов*: 1) 0; 2) $\mathrm{mod}\, k\, (A, B)$; 3) $k\{e_{12}\}$; 4) $k\{e_{12}, e_{11}, e_{22}\}$; 5) $k\{e_{12}, e_{11}\}$; 6) $k\{e_{12}, e_{22}\}$; 7) $k\{e_{12}, e_{11} + e_{22}\lambda\}$, *где* $\lambda \in k$, $\lambda \ne 0$.

Если $e_{12} \notin \mathcal{V}(A, B)$, то имеет место случай 1; если $e_{21} \in \mathcal{V}(A, B)$, то случай 2. Будем далее считать, что $e_{12} \in \mathcal{V}(A, B)$, $e_{21} \notin \mathcal{V}(A, B)$. Положим $\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{V}(A, B)/ k\{e_{12}\}$. $0 \le \dim \overline{\mathcal{V}} \le 2$. При $\dim \overline{\mathcal{V}} = 0$ и $\dim \overline{\mathcal{V}} = 2$ получаем случаи 3 и 4. Если же $\dim \overline{\mathcal{V}} = 1$, то возможны случаи $5 - 7$. В вектроиде типа 7 перевыбором b_2 (или a_2) и r_b (или r_a) можно сделать λ равным 1. Остальные вектроиды попарно не изоморфны.

3.2. *Диадическое множество* D — это конечное бум $(D, \le, \varphi)$, на котором задана инволюция $*$ такая, что:

a) $d = d^*$, если и только если $\varphi(d) = 1$;

b) если $a \Rightarrow b$, то $a^* \Rightarrow b^*$ (из пп. 1.1 и a) следует, что это возможно только при $a \ne a^*$, $b \ne b^*$);

c) d и d^* сравнимы (из пп. b) следует, что если $d < d^*$, то $d \lhd d^*$).

Если $\sigma = (a \Rightarrow b)$, то положим $\sigma^* = (a^* \Rightarrow b^*)$. Из пп. b) и 1.1 следует, что если σ — короткое (соответственно максимальное) ребро, то такое же σ^*, $l(\sigma^*) = l(\sigma)$. Таким образом, получаем инволюцию $*$ на множестве всех ребер бум D.

Если $\mathcal{V}$ — цепной вектроид и $\dim \mathcal{V} = 2$, то на $S_{\mathcal{V}}$ определяется инволюция: если $\xi(a) = A$, $\dim A = 1$, то $a^* = a$, а если $\xi(b) = B$, $\dim B = 2$, то $|\xi^{-1}(b)| = 2$ и положим $b^* = x$, где $\xi(x) = B$ и $x \ne b$. Из пп. 3.1 следует, что инволюция удовлетворяет условиям a) – c), т. е. $S_{\mathcal{V}}$ является диадическим множеством $D(\mathcal{V})$.

3.3. Пусть $\mathring{D} = \{d \in D \mid \varphi(d) = 2\}$. Построим в $\mathring{D}$ подмножества $H_1 \subset \subset H_2 \subset \ldots \subset H_i \subset \ldots$; $H_1 = \{d \in \mathring{D} \mid \mathring{D}^{\times}(d^*) = \varnothing\}$, $H_2 = \{d \in \mathring{D} \mid \mathring{D}^{\times}(d^*) \subset \subset H_1\}, \ldots$ $H_i = \{d \in \mathring{D} \mid \mathring{D}^{\times}(d^*) \subset H_{i-1}\}, \ldots$. Последовательность $\tilde{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ элементов $\mathring{D}$ назовем (D)-*зигзагом* длины $l(\tilde{d}) = n$, если $d_i \times d^*_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$. Зигзаг — *циклический* (или *цикл*), если $d_i = d_j$ при $i \ne j$; если $d_i = d^*_j$, то d_i — *особая точка* зигзага $\tilde{d}$. $\tilde{C}(D)$ — множество D-зигзагов; $\tilde{C}_d(D)$ — множество D-зигзагов с первой координатой d.

Лемма. *Следующие условия равносильны*:

1) $\left|\tilde{C}(D)\right| < \infty$;

2) *в* D *нет циклических* D*-зигзагов*;

3) $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \mathring{D}$ (*т. е. для некоторого* m $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \mathring{D}$).

D *ациклично*, если выполняются (эквивалентные) условия 1 – 3.

***3.4.* Лемма.** *Если* $\tilde{\tilde{d}} = (d_1, \ldots, d_n)$ — D*-зигзаг, все точки которого — особые, то существует циклический* D*-зигзаг* $\tilde{d}$, $l(\tilde{d}) \le l(\tilde{\tilde{d}})$.

Действительно, для каждого $i = \overline{1, n}$ существует j такое, что $d_i^* = d_j$. Выберем такое i, чтобы $|j - i|$ было минимальным. Будем (без ограничения общности) считать, что $j > i$. Заметим, что $j - i > 1$ (в противном случае $d_i^* \asymp d_{i+1} = d_j = d_i^*$). Пусть $i < m < j$. Тогда $d_m^* = d_l$, где либо $l < i$, либо $l > j$ (ввиду минимальности $|j - i|$). Рассмотрим первый случай (во втором доказательство аналогично и может быть сведено к первому случаю переходом к зигзагу $\tilde{\tilde{d}}^* = (d_n^*, d_{n-1}^*, \ldots, d_1^*)$).

Положим $\tilde{d} = d_m, d_{m+1}, \ldots, d_j = d_i^*, d_{i-1}^*, \ldots, d_l^* = d_m$. Ясно, что $l(\tilde{d}) \le l(\tilde{\tilde{d}})$.

Следствие. *Если* D *ациклично, то любой* D*-зигзаг содержит неособую точку.*

3.5. Назовем *полосой* совокупность $Y = x_1, \ldots, x_n$ точек мум или диадического множества, если $x_i \Rightarrow x_{i+1}$, $\langle x_i, x_{i+1}\rangle = \varnothing$, $i = \overline{1, n}$, и в x_1 не входят, а из x_n не выходят ребра.

Замечание. Точку $x \in \mathring{D}$ назовем *нижней*, а x^* — *верхней*, если $x < x^*$ (соответственно $x > x^*$). Ребро $x \Rightarrow y$ *нижнее*, а $x^* \Rightarrow y^*$ *верхнее*, если $x < x^*$ (тогда и $y < y^*$). Если $Y = x_1, \ldots, x_n$ — полоса, то либо каждая x_i *верхняя*, либо каждая x_i *нижняя*. Поэтому $Y \not\supset \{x, x^*\}$.

Предложение. *Если* D *ациклично, то из каждой точки выходит и в каждую точку входит не более одного короткого ребра, а следовательно,* $\mathring{D}$ *распадается в объединение непересекающихся полос.*

Действительно, пусть $a \Rightarrow b$ и $a \Rightarrow c$ — короткие ребра, тогда $b \asymp c$ и аналогично $b^* \asymp c^*$. т. е. имеем цикл (bc^*b).

3.6. Пусть D — произвольное диадическое множество. Отображение g: $\{(x < y) \mid x, y \in D\} \to k \setminus 0$ назовем D*-функционалом*. D-функционал можно рассматривать как точное одномерное представление $\overline{g}$ колчана $Q(D)$, вершины которого — элементы D, а стрелки — пары $(x < y)$. $\overline{g}(x) = k\{x\}$, $\overline{g}(x, y) \colon k\{x\} \to k\{y\}$, $x\overline{g}(x, y) = yg(x, y)$. Для каждого $A \in D^{\simeq *}$ (пп. 0.1) построим пространство $U_A = \oplus_{a \in A} k\{a\}$ и для $(x < y)$ — отображение $U^g(x, y)$: $U_X \to U_Y$, где $x \in X$, $y \in Y$; если $x \lhd y$, то $U^g(x, y) = \overline{g}(x, y)$, а если $x \Rightarrow y$, то $U^g(x, y) = U^g(x^*, y^*) = \overline{g}(x, y) + \overline{g}(x^*, y^*)$.

Положим далее $U^g(X, Y) = k\{U^g(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$. При этом если $\alpha \in U^g(X, Y)$, $\beta \in U^g(Y, Z)$, то не обязательно $\alpha\beta \in U^g(X, Z)$. Назовем D-функционал $*$*-функционалом*, если для каждого длинного (= не короткого) ребра $a \Rightarrow c$ из $a \Rightarrow b \Rightarrow c$ следует $f(a, b) f(b, c) f(a, c)^{-1} = f(a^*, b^*) \times f(b^*, c^*) f(a^*, c^*)^{-1}$.

Лемма. *Совокупность* $\mathcal{U}^g$, *где* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{U}^g = \{U_X \mid X \in D^{\simeq *}\}$, *является вект-*

роидом ($Ob\,\mathcal{U}^g = \{\mathcal{U}^g(X) \mid X \in D^{\simeq *}\}$), *если (и только если)* g *есть* $*$-*функционал.*

3.7. D-функционал e_D — *единичный*, если $e(x, y) = 1$ для любых $x, y \in \in D$. Положим $\mathcal{V}(D) = \mathcal{U}^{e_D}$. Ясно, что $D(\mathcal{V}(D)) = D$. D-функционал g назовем *нижнеединичным*, если $g(x, y) = 1$ при $x \Rightarrow y$, $x < x^*$, $y < y^*$. Нижнеединичный функционал g есть $*$-функционал, если $g(ab)g(bc) = g(ac)$ для любого длинного ребра ac, при $a < b < c$. Из лемм 3.6 и 3.1 непосредственно следует такое предложение.

Предложение. *Любой* $\mathcal{V}$ *имеет вид* $\mathcal{U}^g$, *где* g — *нижнеединичный* $*$, D-*функционал*, $D = D(\mathcal{V})$.

Рассмотрим в $Q(D)$ подколчан $\hat{Q}(D)$, вершины которого есть верхние точки, а стрелки — верхние короткие ребра.

D-функционал g задает точное одномерное представление $\overline{\overline{g}}$ колчана $\hat{Q}(D)$.

Лемма. *Если* h *и* g — *два нижнеединичных* $*$-*функционала, то вектроиды* $\mathcal{U}^h$ *и* $\mathcal{U}^g$ *изоморфны, если (и только если) эквивалентны представления* $\overline{\overline{h}}$ *и* $\overline{\overline{g}}$ *колчана* $\hat{Q}(D)$ (см. [10]).

Действительно, „уравняем" сначала h и g на верхних коротких ребрах (сохранив нижнеединичность за счет перевыбора образующих эндоморфизмов). Из $*$-функциональности будет следовать равенство функционалов и на длинных верхних ребрах. Затем уравняем функционалы на парах $x \lhd y$, перевыбирая базис в пространствах морфизмов. Из леммы и предложения 3.5 вытекает такое следствие.

Следствие. *Если* $D(V)$ *ациклично, то* $\mathcal{V} = \mathcal{V}(D(\mathcal{V}))$.

4. Формулировка основной теоремы. *4.1.* Введем числовую функцию $\mu(x, y, z) = xy + xz + zy + xyz$. Примитивные критические множества ширины 3 ((2, 2, 2), (1, 3, 3) и (1, 2, 5) (см. пп. 1.4)) могут быть характеризованы тем, что $\mu(x-1, y-1, z-1) = 4$.

Условимся считать, что $\mu(x, y, z) = \infty$, если хотя бы одно из x, y, z равно ∞.

4.2. Подмножество $Z = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset D$, $n \geq 0$, назовем *цепью*, если $z_i \lhd \lhd z_{i+1}$, $i = \overline{1, n}$. $\operatorname{Ch} D$ — множество цепей в D. Введем на D функцию Φ со значениями в $\mathbb{N} \cup \infty$:

1) $\Phi(d) = 1$, если $d \notin \overset{\circ}{D}$;

2) $\Phi(d) = \infty$, если $d \in \overset{\circ}{D}$ и либо $d \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} H(i)$ (пп. 3.3), либо $D^{\ltimes}(d^*) \notin \notin \operatorname{Ch} D$;

3) на $\left\{ d \in \bigcup H_i \,\middle|\, D^{\ltimes}(d^*) \in \operatorname{Ch} D \right\}$ определим Φ последовательно на $H_1, \ldots, H_i, \ldots$: $\Phi(d) = 2 + \sum_{x \in D^{\ltimes}(d^*)} \Phi(x)$ (если $d \in H_i$, то $D^{\ltimes}(d^*) \subset H_{i-1}$). Для $Y \subset D$ положим $\Phi(Y) = \sum_{y \in Y} \Phi(Y)$, если $Y \in \operatorname{Ch} D$, и $\Phi(Y) = \infty$, если $Y \notin \operatorname{Ch} D$.

Если $\mathcal{W} \subset D$, то определим чум $\mathcal{W}_f = \{ d \in \mathcal{W} \mid \Phi(d) < \infty \}$, $\overset{\infty}{\mathcal{W}} = \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_f$.

4.3. Для $\sigma = (a \Rightarrow b)$ положим $\operatorname{eq}(\sigma) = \Phi\left(D^{\ltimes}\{a, b\}\right)$ и $\operatorname{eq}(\sigma^*) = = \Phi\left(D^{\ltimes}\left\{a^*, b^*\right\}\right)$. Множество $X = Z^- \coprod^{\ltimes} Z^+ \coprod^{\ltimes} Z^e \subset D_f$, где $Z^-, Z^+, Z^e \subset \subset \operatorname{Ch} D$, назовем *окаймляющим* ребро σ, если $\{a\} < Z^- \ltimes (\langle a, b \rangle \cup \{b\})$; $b >$

$> Z^+ \asymp (\langle a, b\rangle \cup \{a\})$; $Z^e \asymp (\langle a, b\rangle \cup \{a, b\})$; и при $l(\sigma) \geq 2$ $Z^- = Z^+ = \varnothing$.

Если X окаймляет σ, то положим $\mathrm{eq}(\sigma, X) = \Phi(Z^e)$, $\mathrm{eq}^*(\sigma, X) = \mathrm{eq}(\sigma^*) + \min\left\{\Phi(Z^-), 2 - l(\sigma)\right\} + \min\left\{\Phi(Z^+), 2 - l(\sigma)\right\}$.

Пример. Если $D_{4.3} = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & x & y & \\ \underset{a}{\circ} \arrow[r, Rightarrow] & \underset{b}{\circ} \arrow[u] \arrow[r] & \underset{a^*}{\circ} \arrow[u] \arrow[r, Rightarrow] & \underset{b^*}{\circ} \end{tikzcd}$ и $\sigma = (a^*, b^*)$, $X = \{x, y\}$, то $Z^- = \{x\}$, $Z^+ = \varnothing$, $Z^e = \{y\}$, $\mathrm{eq}(\sigma, X) = 1$, $\mathrm{eq}(\sigma^*) = 0$, $\mathrm{eq}^*(\sigma, X) = 1$, $l(\sigma) = 0$, $\mu(l(\sigma), \mathrm{eq}(\sigma, X), \mathrm{eq}^*(\sigma, X)) = 1$.

***4.4.* Теорема.** *$\mathcal{V}$ конечнопредставим тогда и только тогда, когда диадическое $D = D(\mathcal{V})$ удовлетворяет следующим условиям:*

I. *Если A — антицепь (в $(D, \leq)$), то* $|A| + |\overset{\infty}{A}| < 4$.

II. $\mu(\Phi(Z_1) - 1, \Phi(Z_2) - 1, \Phi(Z_3) - 1) < 4$, *если* $Z_1 \coprod^{\asymp} Z_2 \coprod^{\asymp} Z_3 \subset D_f$, Z_1, Z_2, Z_3 *— непустые цепи;*

III. $\Phi(Z) < 4$, *если* $Z_1 \coprod^{\asymp} N \subset D_f$, $Z_1 \in \mathrm{Ch}\, D$ *(см. пп.* 1.4);

IV. $\mu\big(l(\sigma), \mathrm{eq}(\sigma, X), \mathrm{eq}^*(\sigma, X)\big) < 4$, *если σ — ребро в D, X окаймляет σ;*

V. *Если* $l(\sigma) = 1$, $\sigma = \{a \Rightarrow b\} \subset D$, $\mathrm{eq}(\sigma) = 3$, *то* $D_f^{\asymp}(\{a\}) \cup D_f^{\asymp}(\{b\}) = D_f^{\asymp}\left(\{b\} \cup D_f^{\asymp}\{\sigma\}\right) \doteq \varnothing$;

VI. *Если* $\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] \overset{a}{\circ} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr] & \overset{b}{\circ} \\ \underset{c}{\circ} \arrow[r, Rightarrow] & \underset{d}{\circ} \end{tikzcd} \subset D$, *то* $\mu(\Phi(D_f^{\asymp}(a, d)), \mathrm{eq}(a^*, b^*), \mathrm{eq}(c^*, d^*)) = 0$.

Замечание. Положим $\mu(\sigma) = \mu\big(l(\sigma), \mathrm{eq}(\sigma), \mathrm{eq}(\sigma^*)\big)$. Из условия IV следует условие $\mathrm{IV}_{\varnothing}$: $\mu(\sigma) < 4$ для любого σ $(X = \varnothing)$.

4.5. Из условия IV (или $\mathrm{IV}_{\varnothing}$) непосредственно следует такая лемма.

Лемма. *Если (a, b) — ребро, то* $\Phi\big(D^{\asymp}(a, b)\big) < \infty$, *т. е.* $D^{\asymp}(a, b)$ *— цепь в D_f* ($\mathrm{eq}^*(\sigma, X) = \mathrm{eq}(\sigma^*) = \infty$ *при* $\sigma = (a^*, b^*)$).

Замечание. Если D удовлетворяет условиям I – VI, то D удовлетворяет и условиям II$'$ – VI$'$, где в условиях II – VI снято ограничение о том, чтобы рассматриваемые точки принадлежали D_f (например, в условии IV — $X \subset D$ и не обязательно $X \subset D_f$).

Для доказательства достаточно заметить, что каждая точка x в условиях II – VI, от которой требуется принадлежность к D_f, или оснащает ребро и тогда $x \in D_f$ по лемме, или $w\big(D^{\asymp}(x)\big) > 1$ и тогда $x \in D_f$ ввиду условия I.

4.6. Если $\dim D = 1$ (т. е. D — чум), то условия I – III превращаются в критерий Клейнера (см. пп. 4.1). Условия I – III (как будет показано ниже) остаются критерием конечной представимости и при $\dim D = 2$, $r(D) = 1$.

4.7. Замечание. Обозначим через $\tilde{\tilde{C}}(D) \subset \tilde{D}$ совокупность зигзагов, содержащих особые точки (пп. 3.3). Положим $D_{\tilde{f}} = \left\{d \in D_f \,\middle|\, C_d(D) \cap \tilde{\tilde{C}}(D)\right\} = \varnothing$. Тогда в формулировке теоремы можно заменить D_f на $D_{\tilde{f}}$, но мы не будем это доказывать и использовать.

5. Матричная интерпретация и дальнейшие определения. ***5.1.*** В определении матриц в [19] предполагается, что строки и столбцы занумерованы элементами произвольных конечных множеств. Обозначим (при фиксированном поле k) через $\mathcal{M}$ категорию, объекты которой — конечные множества, а множество морфизмов $\mathcal{M}(X, Y)$ ($= k^{X\times Y}$ [19]) из X в Y состоит из матриц $M^{X\times Y}$, т. е. функций, определенных на $X \times Y$ со значениями в k, умножающихся ($M^{X\times Y} M^{Y\times Z}$) по матричному правилу. $\mathcal{M}(X, Y)$ содержит нулевую матрицу $0^{X\times Y}$, $\mathcal{M}(X, Y) = \{0^{X\times Y}\}$, если (и только если) $X = \varnothing$ или $Y = \varnothing$. $\mathcal{M}(X, X)$ содержит единичную матрицу $1^{X\times Y}$. Разумеется, $\mathcal{M}$ эквивалентна $\operatorname{mod} k$. Положим $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}^{\Delta_1}$ (пп. 0.1). $\operatorname{Ob}\mathcal{M}_1 = \operatorname{Mor}\mathcal{M} = \{M^{X\times Y} \in \mathcal{M}(X, Y) \mid X, Y \in \in \mathcal{M}\}$, $\mathcal{M}_1\left(M^{X\times Y}, \overline{M}^{\overline{X}\times \overline{Y}}\right) = \left\{\left(A^{X\times \overline{X}}, B^{Y\times \overline{Y}}\right) \middle| \, A\overline{M} = MB\right\}$. $X \simeq Y(\mathcal{M})$, если $|X| = |Y|$; $M^{X\times Y} \simeq \overline{M}^{\overline{X}\times \overline{Y}}(\mathcal{M}_1)$, если $|X| = |\overline{X}|$, $|Y| = |\overline{Y}|$, $\operatorname{rank} M = \operatorname{rank} \overline{M}$.

Если на $X \times Y$ определена инволюция $*$, то $M \in \mathcal{M}(X, Y)$ — $*$-*матрица*, если $M\left((x, y)^*\right) = M(x, y)$ ($x \in X$, $y \in Y$).

5.2. Согласно пп. 2.2 D — треугольный базис $\mathcal{V}(D)$. Выбирая соответствующий базис $\mathcal{X}$ в каждом $X = \oplus X_i \subset \oplus \mathcal{V}(D)$, получаем инволюцию $*$ на $\mathcal{X}$ и $*$-отображение (пп. 0.1). $\delta_{\mathcal{X}}\colon \mathcal{X} \to D$. Следуя П. Габриелю, можно „переопределить" агрегаты $\oplus \mathcal{V}(D)$ и $\operatorname{Rep} \mathcal{V}(D)$ в матричной форме.

Назовем D-*множеством* конечное множество $\mathcal{A}$ с инволюцией $*$ и фиксированным $*$-отображением $\delta = \delta_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A} \to D$ (см. пп. 0.1). D-множества можно рассматривать как объекты категории I_D, $I_D(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \{\psi \in I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mid \psi\delta_{\mathcal{B}} = = \delta_{\mathcal{A}}\}$. Матрицу $M^{m\times \mathcal{X}}$ назовем D-матрицей, если $\mathcal{X} \in I_D$ (мы отождествляем m и $[1, m]$).

Если $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in I_D$, введем инволюцию на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$: $(x, y)^* = (x^*, y^*)$, если $\varphi\left(\delta_{\mathcal{X}}(x), \delta_{\mathcal{Y}}(y)\right) = 2$, и $(x, y)^* = (x, y)$, если $\varphi(x, y) \le 1$. Матрицу $M \in \mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, где $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in I_D$, назовем $D \times D$-*матрицей*, если M — $*$-матрица (пп. 5.1) и $M(x, y) = 0$ при $\varphi\left(\delta_{\mathcal{X}}(x), \delta_{\mathcal{Y}}(y)\right) = 0$ (т. е. $\delta_{\mathcal{X}}(x) \not\leq \delta_{\mathcal{Y}}(y)$).

Предоставляем читателю убедиться, что произведение $D\times D$-матриц есть $D\times D$-матрица. Рассмотрим в $\mathcal{M}$ подагрегат $\mathcal{M}_{D\times D}$, объекты которого есть D-множества, а морфизмы — $D\times D$-матрицы, и в $\mathcal{M}_1$ подагрегат $\mathcal{M}_D$, объекты которого — D-матрицы и морфизмы пары (A, B), где B — $D\times D$-матрица $\left(\mathcal{M}_D\left(M^{m\times \mathcal{X}}, M^{m\times \mathcal{Y}}\right) = \left\{(A, B) \middle| \, A \in k^{m\times n},\ B \in \mathcal{M}_{D\times D}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\right\}\right)$. $\mathcal{M}_{D\times D}$ эквивалентен $\oplus \mathcal{V}$, а $\mathcal{M}_D$ — $\operatorname{Rep} \mathcal{V}$.

5.3. Если $M \in \mathcal{M}_{D\times D}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $d \in D$, то положим $d(M) = = M^{\mathcal{X}'\times \mathcal{Y}'}$, где $\mathcal{X}' = \delta_{\mathcal{X}}^{-1}(d)$, $\mathcal{Y}' = \delta_{\mathcal{Y}}^{-1}(d)$. (Из наших определений следует, что $d(M) = d^*(M)$). Если $\psi = (A, B) \in \operatorname{Mor} \mathcal{M}_D$, то положим $d(\psi) = d(B)$. D-матрица $M \in k^{m\times \mathcal{X}}$ — *точная в точке* d, если $\delta_{\mathcal{X}}^{-1}(d) \ne \varnothing$ (тогда M точно и в d^*). $d(1^{\mathcal{X}\times \mathcal{X}}) = 1^{\left[\delta_{\mathcal{X}}^{-1}(d)\right]\times\left[\delta_{\mathcal{X}}^{-1}(d)\right]}$, $d(1 \in \mathcal{M}_D(M, M)) \ne 0$, если (и только если) M точна в d.

Из треугольности базиса D следует, что после перестановки строк и столбцов $D\times D$-матрицы имеют блочно-треугольный вид. Отсюда следует такая лемма.

Лемма. $d(M_1, M_2) = d(M_1) \cdot d(M_2)$.

5.4. Возвращаясь к обычным матрицам из $k^{m\times n}$, нужно занумеровать элементы $\mathcal{X}\in I_D$. При этом естественно „собрать вместе" столбцы M из $\delta_{\mathcal{X}}^{-1}(d)$ для каждого $d\in D$ и нумеровать столбцы так, чтобы номера в M_d и M_{d^*} совпадали для $h, h^*\in\mathcal{X}$. В результате сопоставляем $(U,f,X)\in \operatorname{Rep} V(D)$ матрицу $M(f)$. $M(f)$ разделена на вертикальные полосы $M_d(f)$; если $M_{d_1(f)}\in k^{m\times n_1}$, $M_{d_2(f)}\in k^{m\times n_2}$ и $d_2=d_1^*$, то $n_1=n_2$.

Из наших определений непосредственно следует, что $(U,f,X)\simeq(U',f',X')$, если $M(f')$ получается из $M(f)$ путем следующих преобразований:

1) произвольных элементарных строчных преобразований;

2) элементарных столбцевых преобразований внутри M_d одновременно с теми же столбцевыми преобразованиями внутри M_{d^*};

3) прибавлений столбцов из M_a к столбцам M_b, если $a\lhd b$;

4) прибавлений i-го столбца из M_a к j-му столбцу из M_b одновременно с прибавлениями i-го столбца из M_{a^*} к j-му столбцу из M_{b^*}, если $a\Rightarrow b$.

Верно и обратное: если $(U,f,X)\simeq(U',f',X')$, то $M(f')$ получается из $M(f)$ преобразованиями $1-4$.

Замечание. Бум D' с отношением инволюции $*$ *обобщенно-диадическое*, если выполняются условия a), b) (но не обязательно c)) из пп. 3.2. Все построения и результаты п. 4 дословно переносятся на обобщенно-диадические множества.

5.5. Пример. Пусть $D=D_{4.3}$, $M=M(f)=\left(M_a\middle| M_b\middle| M_x\middle| M_y\middle| M_{a^*}\middle| M_{b^*}\right)$. Число столбцов M_a (соответственно M_b) равно числу столбцов M_{a^*} (соответственно M_{b^*}).

Допустимы:

1) все строчные преобразования;

2) столбцевые преобразования внутри M_a (соответственно M_b) одновременно с теми же столбцевыми преобразованиями внутри M_{a^*} (соответственно M_{b^*}), внутри M_x и M_y произвольные столбцевые преобразования;

3) прибавления столбцов M_a (и M_b) к столбцам M_x, M_y, M_{a^*}, M_{b^*}, столбцов M_{a^*} к столбцам M_y;

4) прибавление i-го столбца M_a к j-му столбцу M_b одновременно с прибавлением i-го столбца M_{a^*} к j-му столбцу M_{b^*}.

Допустимыми преобразованиями приведем M к виду

$$M'=\left(\begin{array}{cc|cc|c|c|cc|cc}
\multicolumn{2}{c|}{\overbrace{\quad\quad}^{M_a}} & \multicolumn{2}{c|}{\overbrace{\quad\quad}^{M_b}} & \overbrace{\quad}^{M_x} & \overbrace{\quad}^{M_y} & \multicolumn{2}{c|}{\overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{M_{a^*}}} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{M_{b^*}}}\\
0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & M'_x & M'_y & M_{(a^*,0)} & M_{(a^*,1)} & M_{(b^*,0)} & M_{(b^*,1)}
\end{array}\right). \tag{1}$$

Проводя с M' только преобразования $1-4$, не портящие вида (1), мы должны разбить M_{a^*} (соответственно M_{b^*}) на две части $M_{(a^*,0)}$, $M_{(a^*,1)}$ (соответственно $M_{(b^*,0)}$, $M_{(b^*,1)}$).

Задача о приведении $M'' = \left(M'_x \middle| M'_y \middle| M_{(a^*,0)} \middle| M_{(a^*,1)} \middle| M_{(b^*,0)} \middle| M_{(b^*,1)} \right)$ разрешенными преобразованиями равносильна задаче о представлениях чум $\hat{Z}$:

$$\hat{Z} = \begin{tikzcd}[column sep=small] y & & (b^*,1) & & & \\ & (a^*,1) \arrow[ul] \arrow[ur] & & (b^*,0) \arrow[ul] & & x \\ & & (a^*,0) \arrow[ul] \arrow[ur] & & & \end{tikzcd} .$$

Таким образом, $\operatorname{Ind} D \simeq \operatorname{ind} \hat{Z}$. Чум $\hat{Z}$ конечнопредставимо, поскольку удовлетворяет критерию Клейнера. С другой стороны, легко видеть, что $D_{4.3}$ удовлетворяет условиям I – VI.

5.6. Если S — кум, то сопоставим ему чум $\hat{C}(S)$: $\hat{C}(S) = \{ (s, i) \mid s \in S,\ i = \overline{1, \varphi(s)} \}$; $(s, i) \le (t, j)$, если $s \le t$ и $i + \varphi(s, t) \le j + \varphi(s, s)$. В частности, если $s \lhd t$, то $(s, i) \le (t, j)$ при любых i, j. Если S гомогенно, то сравнимость формулируется проще: $(s, i) \le (t, j)$, если либо $s \lhd t$, либо $s \le t$ и $i \le j$. Если $\hat{D}_{4.3} = \left\{ a^*, b^*, x, y \right\} \subset D_{4.3}$, то $\hat{C}\left(\hat{D}_{4.3}\right) = \hat{Z}$.

Лемма. *Если* S_1, S_2 *— гомогенные кум и* $S_1 \overset{\beta}{\subset} S_2$, *то* $\hat{C}(S_1) \subset \hat{C}(S_2)$.

5.7. Пусть T — чум. Введем на T (бинарное) отношение α: $s \alpha t$, если:

1) $T^{\divideontimes}(s) = T^{\divideontimes}(t)$;

2) $w(\langle s, t \rangle) \le 1$.

Лемма.

1. α — *Отношение эквивалентности.*

2. *Если* $s_1 \alpha s_2$, $t_1 \alpha t_2$, $s_1 < t_1$, *то либо* $s_1 \alpha t_1$, *либо* $s_2 < t_2$.

Таким образом, на T^α возникает структура чум. T^α естественно считать мумом ранга 1: $\varphi(A, A) = |A|$, $\varphi(A, B) = 1$ при $A < B$ $(A, B \in T^\alpha)$. Если $|T| < \infty$, то $\hat{C}\left(T^\alpha\right) \simeq T$. Таким образом, чум T однозначно восстанавливается по мум T^α.

5.8. Для мум S введем вначале отношение эквивалентности α на $R_1(S)$ (пп. 1.3) аналогично пп. 5.7 ($s \alpha t$, если $S^{\divideontimes}(s) = S^{\divideontimes}(t)$ и $w(\langle s, t \rangle) \le 1$) и тривиально достроим его на S ($s \alpha t$ при $s \ne t$, только если $s, t \in R_1(S)$). На S^α естественно задается структура чум. Зададим на S^α мум, т. е. функцию $\varphi^\alpha(X, Y)$, где $X \le Y$, $X, Y \in S^\alpha$; $\varphi^\alpha(X, X) = \sum_{x \in X} \varphi(x, x)$, $\varphi^\alpha(X, Y) = 1$, если $X \subset R_1(S)$ или $Y \subset R_1(S)$, и $\varphi^\alpha(X; Y) = \varphi(X, Y)$, если $X = \{x\} \not\subset R_1(S)$, $Y = \{y\} \not\subset R_1(S)$. S^α гомогенно, если и только если гомогенно S.

S_1 α*-содержится* в S_2 ($S_1 \overset{\alpha}{\subset} S_2$), если существуют такие мум $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, что $\overline{S}_1 \overset{\beta}{\subset} \overline{S}_2$, $\overline{S}_1^\alpha \simeq S_1^\alpha$, $\overline{S}_2^\alpha \simeq S_2^\alpha$.

Лемма. *Пусть* S_1, S *— гомогенные кум. Тогда если* $S^\alpha \simeq S_1^\alpha$, *то* $\hat{C}(S) \simeq \hat{C}(S_1)$, *а если* $S \overset{\alpha}{\subset} S_1$, *то* $\hat{C}(S) \subset \hat{C}(S_1)$. *Если* $r(S) = 1$, *то* $\left(\hat{C}(S)\right)^\alpha \simeq S^\alpha$.

6. Блочно-диагональные представления и лемма Габриеля. *6.1.* Для фиксированного натурального p рассмотрим категории $\mathcal{M}^{\boxslash}$ $(=\mathcal{M}_p^{\boxslash})$ и $\mathcal{M}^t$ $\left(=\mathcal{M}_p^t\right)$ p*-блочно-диагональных* и *блочно-треугольных* матриц. $\operatorname{Ob}\mathcal{M}^t = \operatorname{Ob}\mathcal{M}^{\boxslash} = \{P_{\mathcal{X}}\}$, где $\mathcal{X} \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$. $P_{\mathcal{X}}$ — p-разложение $\mathcal{X}$ (пп. 1.4). $\mathcal{M}^{\boxslash}(P_{\mathcal{X}}, P_{\mathcal{Y}})$ (соответственно $\mathcal{M}^t(P_{\mathcal{X}}, P_{\mathcal{Y}})) = \{M \in \mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \mid M(x, y) = 0$ при $x \in X_i$, $y \in Y_i$, $i \neq j$ (соответственно $i > j$)$\}$ $(1 \le i, j \le p)$.

Сопоставим матрице $M \in \mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ матрицу $M^{\boxslash}$ $(= M_p^{\boxslash}(P_{\mathcal{X}}, P_{\mathcal{Y}})) \in \mathcal{M}^{\boxslash}(P_{\mathcal{X}}, P_{\mathcal{Y}})$, $M^{\boxslash}(x, y) = M(x, y)$ при $x \in \mathcal{X}_i$, $y \in \mathcal{Y}_i$.

Лемма. *Если* $M = M^{\boxslash}(P_{\mathcal{X}}, P_{\mathcal{Y}})$ *или* $N = N^{\boxslash}(P_{\mathcal{Y}}, P_{\mathcal{Z}})$, *то* $(MN)^{\boxslash}(P_{\mathcal{X}}, P_{\mathcal{Z}}) = M^{\boxslash} N^{\boxslash}$.

6.2. Аналогичным образом введем категории $\operatorname{mod} k^{\boxslash}$ и $\operatorname{mod} k^t$, рассматривая p*-разложения*, т. е. разложения в прямую сумму k-пространств: $(\operatorname{mod} k^{\boxslash} \simeq \mathcal{M}^{\boxslash}$, $\operatorname{mod} k^t \simeq \mathcal{M}^t)$.

Лемма. *Для произвольных* $\varphi \in \operatorname{mod} k(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *и разложения* $P_{\mathcal{Y}}\colon \mathcal{Y} = \oplus \mathcal{Y}_i$ *существует* $P_{\mathcal{X}}\colon \mathcal{X} = \oplus \mathcal{X}_i$ *такое, что* $\varphi \in \operatorname{mod} k^t((\mathcal{X}, P_{\mathcal{X}}), (\mathcal{Y}, P_{\mathcal{Y}}))$ *и* $\ker \varphi_{ii} = 0$ *при* $\varphi = \sum_{i, j=1}^{p} \varphi_{ij}$, $\varphi_{ij}\colon \mathcal{X}_i \to \mathcal{Y}_j$.

6.3. Пусть $\mathcal{X}$ — D-множество, $P_{\mathcal{X}}$ — D-(p)*-разложение*, если из $a, b \in \mathcal{X}_i$ и $\varphi(\delta(a), \delta(b)) > 1$ следует $a^*, b^* \in \mathcal{X}_j$ $(1 \le i, j \le p)$. Рассмотрим $\mathcal{M}_{D\times D}^{\boxslash}$ — подагрегат в $\mathcal{M}^{\boxslash}$ и в $\mathcal{M}_{D\times D}$: его объекты — D-разложения, а $\mathcal{M}_{D\times D}^{\boxslash}(P_{\mathcal{X}}, P_{\mathcal{Y}}) = \mathcal{M}^{\boxslash}(P_{\mathcal{X}}, P_{\mathcal{Y}}) \cap \mathcal{M}_{D\times D}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ $(\mathcal{M}^{\boxslash}(P_{\mathcal{X}}, P_{\mathcal{Y}}), \mathcal{M}_{D\times D}(X, Y) \subset \mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$.

Аналогично $\mathcal{M}_D^{\boxslash}$ — „пересечение“ $\mathcal{M}^{\boxslash}$ и $\mathcal{M}_D$. $\operatorname{Ob}\mathcal{M}_D^{\boxslash} = \coprod \mathcal{M}^{\boxslash}(P_{\mathcal{U}}, P_{\mathcal{X}})$, где $P_{\mathcal{U}}$ — разложение множества $\mathcal{U}$, а $P_{\mathcal{X}}$ — D-разложение множества $\mathcal{X}$

Лемма. *Если* $M \in \mathcal{M}_{D\times D}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, $P_{\mathcal{X}} \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}_{D\times D}^{\boxslash}$, *то* $\mathcal{M}^{\boxslash}(P_{\mathcal{X}}, P_{\mathcal{X}}) \in \mathcal{M}_{D\times D}^{\boxslash}(P_{\mathcal{X}}, P_{\mathcal{X}})$.

6.4. Пусть $\Pi \subset D \times p$, $\delta_\Pi\colon \Pi \to D$, $\delta_\Pi(d, i) = d$, $\nu_\Pi\colon \Pi \to [1, p]$, $\nu_\Pi(d, i) = i$. Для $d \in D$ положим $d(\Pi) = \left|\nu_\Pi^{-1}(d)\right|$. Назовем Π D*-связкой*, если на Π задана инволюция $*$ так, что $\delta_\Pi \in I(\Pi, D)$ (пп. 0.1) и если $\delta_\Pi(x) \Rightarrow \delta_\Pi(y)$ и $\nu_\Pi(x) = \nu_\Pi(y)$, то $\nu_\Pi(x^*) = \nu_\Pi(y^*)$. Для p-разложения $P_{\mathcal{X}}$ обозначим $\nu_{\mathcal{X}} \in \operatorname{Sets}(\mathcal{X}, \overline{1, p})\colon \nu_{\mathcal{X}}(x_i) = i$, если $x_i \in \mathcal{X}_i$.

D-разложение $P_{\mathcal{X}}$ назовем Π-разложением, если для каждого $x \in \mathcal{X}$ $\zeta(x) = (\nu_{\mathcal{X}}(x), \delta(x)) \in \Pi$ и $\zeta \in I_D((\mathcal{X}, *, \delta_{\mathcal{X}}), (\Pi, *, \delta_\Pi))$. Рассмотрим (для фиксированной Π) полные подкатегории $\mathcal{M}_{D\times D}^{\Pi}$ в $\mathcal{M}_{D\times D}^{\boxslash}$ и $\mathcal{M}_D^{\Pi}$ в $\mathcal{M}_D^{\boxslash}$: $P_{\mathcal{X}} \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}_{D\times D}^{\Pi}$ и $(P_U, f, P_{\mathcal{X}}) \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}_D^{\Pi}$, если $P_{\mathcal{X}}$ — Π-разложение. Можно теперь усилить лемму 6.3.

Лемма. *Если* $M \in \mathcal{M}_{D\times D}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$; $P_{\mathcal{X}}, P_{\mathcal{Y}} \in \mathcal{M}_{D\times D}^{\Pi}$, *то* $\mathcal{M}^{\boxslash}(P_{\mathcal{X}}, P_{\mathcal{Y}}) \in \mathcal{M}_{D\times D}^{\Pi}(P_{\mathcal{X}}, P_{\mathcal{Y}})$.

6.5. **Лемма Габриеля.** *Пусть* $d \in D$, Π — D*-связка.* $T_i \in \mathcal{M}_D^{\Pi}$ $(i = 1, 2)$, $d(\Pi) = 1$, T_1 *точно в* d. *Тогда если* $T_1 \simeq T_2(\mathcal{M}_D)$ *и* T_1 *неразложим в* $\mathcal{M}_D$, *то* $T_1 \simeq T_2\left(\mathcal{M}_D^{\Pi}\right)$.

Действительно, пусть $\psi = (A, B)\colon T_1 \to T_2$ и $\psi^{-1} = (A^{-1}, B^{-1})\colon T_2 \to T_1$ —

изоморфизмы в $\mathcal{M}_D$. $\psi^{\boxslash} = \left(A^{\boxslash}, B^{\boxslash}\right) \in \mathcal{M}^{\Pi}_{D\times D}(T_1, T_2)$, $(\psi^{-1})^{\boxslash} \in \mathcal{M}^{\Pi}_{D\times D}(T_2, T_1)$ (леммы 6.1 и 6.4), $\psi^{\boxslash}(\psi^{-1})^{\boxslash} = \xi \in \mathcal{M}^{\boxslash}_{D\times D}(T_1, T_1)$.

Ввиду неразложимости T_1 алгебра $\mathcal{M}^{\boxslash}_{D\times D}(T_1, T_1)$ локальна и, значит, ξ либо обратим, либо нильпотентен. Из $d(\Pi) = 1$ следует $d(B) = d(\,B^{\boxslash})$ (см. пп. 5.3). Если $\xi^r = 0$, то $d\left(\xi^r\right) = 0 = d(\xi)^r$ (пп. 5.3). С другой стороны, $d(\xi) = d(B^{\boxslash}(B^{-1})^{\boxslash}) = d(B^{\boxslash})d((B^{-1})^{\boxslash}) = d(B)d(B^{-1}) = d(1_X) = 1^{t\times t}$, где $t \neq 0$, поскольку T_1 точно в d.

Итак, ξ обратим, значит, T_1 должно в $\mathcal{M}^{\boxslash}_D$ выделяться из T_2 прямым слагаемым. Но так как размеры T_1 и T_2 совпадают, то $T_1 \simeq T_2$ (в $\mathcal{M}^{\Pi}_D$).

***6.6.* Предложение.** *Конечнопредставимое D ациклично.*

Предположим противное. Пусть $\tilde{d} = \left(d_1, \ldots, d_{p+1}\right)$ — самый короткий циклический D-зигзаг. Тогда $d_{p+1} = d_1$, $d_p^* \asymp d_1$; $d_i \neq d_j$ при $i \neq j = \overline{1, p}$ и найдется $l = \overline{1, p}$ такое, что при $m = \overline{1, p}$, $d_l^* \neq d_m$ (лемма 3.4).

Положим $D_1 = \{d_1^* \asymp d_2\}$, $D_2 = \{d_2^* \asymp d_3\}$, $D_{p-1} = \{d_{p-1}^* \asymp d_p\}$, $D_p = \{d_p^* \asymp d_1\}$, $\Pi = \left\{(d \times i) \mid i = \overline{1, p}, d \in D_i\right\}$, $d_l(\Pi) = 1$. Легко убедиться, что $\mathcal{M}^{\Pi}_D$ эквивалентна $\operatorname{mod} k^Q$ — категории представлений колчана Q, где (см. [10])

$$Q = \tilde{A}_{2p-1} = \begin{tikzcd} \overline{D}_1 & D_1 \arrow[l, "\beta_1"'] \arrow[r, "\alpha_2"] & \overline{D}_2 & \cdots \arrow[l, "\beta_2"'] \arrow[r, "\alpha_p"] & \overline{D}_p \\ & & D_p \arrow[llu, "\alpha_1"] \arrow[rru, "\beta_p"'] & & \end{tikzcd} \qquad \left(\tilde{D}_i = \left\{d_i, d_i^*\right\}\right).$$

Хорошо известно, что $\left|\operatorname{Ind} \tilde{A}_n\right| = \infty$, причем имеется бесконечно много попарно неизоморфных неразложимых представлений, точных во всех точках колчана (а значит, и во всех точках D-связки Π). Таким образом, предложение следует из леммы Габриеля.

Следствие. *Если $\mathcal{V}$ конечнопредставим, то* $\mathcal{V} = \mathcal{V}(D)$ (см. следствие 3.7).

С другой стороны, легко видеть, что если $\tilde{C}(D)$ содержит цикл $(d_1, \ldots, d_n)$, то условие I в теореме не выполняется: $d_i \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$, $d_i^* \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$, $\Phi(d_i) = \Phi(d_i^*) = \infty$, $1 = \overline{1, n}$, $A = \{d_1^*, d_2\}$, антицепь $A' = A$, $|A| + |A'| = 4$. Поэтому в дальнейшем без ограничения общности в доказательстве теоремы 4.4 будем считать, что $\mathcal{V} = \mathcal{V}(D)$ $(D = D_{\mathcal{V}})$ и D ациклично.

6.7. Диадическое $D^{\lhd}$ *p-расщепляемое*, если $D^{\lhd} = \coprod_{i=1}^{p} {}^{\lhd}D_i$ и D_i — непустые (см. пп. 1.4). Положим $\Pi^{\lhd} = \{(d, i) \mid d \in D_i\}$ $\Pi^{\lhd}$ — $D^{\lhd}$-связка ($d(\Pi^{\lhd}) = 1$ для любого $d \in D^{\lhd}$).

Предложение. $\operatorname{Ind}' D^{\lhd} \simeq \operatorname{Ind}' \mathcal{M}^{\Pi^{\lhd}}_{D^{\lhd}}$ (Sets) (*где* $\operatorname{Ind}' \mathcal{M}^{\Pi^{\lhd}}_{D^{\lhd}}$ — *совокупность неразложимых изоклассов* $\operatorname{Rep}' D \cap \mathcal{M}^{\Pi^{\lhd}}_{D^{\lhd}}$).

Для доказательства нужно сначала „привести” произвольное представление из $\mathcal{M}^{\Pi^{\lhd}}_{D^{\lhd}}$ к блочно-треугольному виду с помощью преобразований 3 из пп. 5.4

(представлению $T_0 \in \operatorname{Ind} D^{\triangleleft} \setminus \operatorname{Ind}' D^{\triangleleft}$ „соответствуют" p представлений из $\operatorname{Ind} \mathcal{M}_{D^{\triangleleft}}^{\Pi^{\triangleleft}} \setminus \operatorname{Ind}' \mathcal{M}_{D^{\triangleleft}}^{\Pi^{\triangleleft}}$).

Для произвольного D и D-связки Π построим $D^{\triangleleft}(\Pi) = \coprod_{i=1}^{p} {}^{\triangleleft} D_i(\Pi)$, где $D_i(\Pi) = \nu_{\Pi}^{-1}(i) \simeq \{ d \mid (d, i) \in \Pi \}$ (отношения $\leq$ и φ внутри $D_i^{\triangleleft}$, как в D, а $*$ на $D^{\triangleleft}$, как в $\Pi^{\triangleleft}$) и $D^{\triangleleft}(\Pi)$-связку $\Pi^{\triangleleft}$.

Лемма. $\mathcal{M}_D^{\Pi} \simeq \mathcal{M}_{D^{\triangleleft}(\Pi)}^{\Pi^{\triangleleft}}$.

7. Диадические связки и их представления. *7.1. Связкой функторов* назовем набор $\mathcal{P} = \Phi_1, \ldots, \Phi_p$ функторов из агрегата $\mathcal{A}$ в $\operatorname{mod} k$ таких, что если $0 \neq \alpha \in \operatorname{Mor} A$, то существует i, $\Phi_i(\alpha) \neq 0$. $\mathcal{W}_i = \mathcal{V}(\operatorname{Im} \Phi_i)$ — вектроиды $(i = \overline{1, p})$. Связка *цепная*, если цепной каждый W_i. Для $A \in \operatorname{Ind} \mathcal{A}$, $\alpha \in \operatorname{Mor} \mathcal{A}$ положим $\dim A = \sum_{i=1}^{p} \dim \Phi_i(A)$, $\operatorname{rank} \alpha = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{rank} \Phi_i(\alpha)$, $\dim \mathcal{P} = \max (\dim A)$.

Для каждого i построим кум $S_i(\mathcal{P}) = S_{\mathcal{W}_i}$ (пп. 2.2) ($|S_i(\mathcal{P})| < \infty$, если W_i — цепной). На $\coprod_{i=1}^{p} S_i(\mathcal{P})$ аналогично пп. 2.2 задается эквивалентность ξ — $a \xi b$, если $a, b \in \Phi_i(A)$, $A \in \operatorname{Ind} \mathcal{A}$ (для произвольной размерности) или инволюция $*$ (для $\dim \mathcal{P} \leq 2$). Будем далее считать, что $\mathcal{P}$ — цепная и $\dim \mathcal{P} \leq$ ≤ 2. Можно построить два кум $D_{\mathcal{P}}^{\triangleleft} = \coprod_{i=1}^{p} {}^{\triangleleft} S_i(\mathcal{P})$ и $D_{\mathcal{P}}^{\bowtie} = \coprod_{i=1}^{p} {}^{\bowtie} S_i(\mathcal{P})$ с инволюцией $*$.

Лемма. $D_{\mathcal{P}}^{\triangleleft}$ *— диадическое, а* $D_{\mathcal{P}}^{\bowtie}$ *— обобщенно-диадическое множество* (замечание пп. 5.4).

Согласно пп. 0.2, 0.3 $\mathcal{P}$ можно рассматривать как строгую маркировку колчана Q_p: $(Q_p)_v = \overline{0, p}$, $(Q_p)_a = \{ \alpha_i \mid t(\alpha_i) = i,\ h(\alpha_i) = 0,\ i = \overline{1, p} \}$. $\mathcal{K}_0 = \mathcal{A}$ и при $i = \overline{1, p}$ $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_{\alpha_i} = \operatorname{mod} k$, $H_i = \Phi_i$, T_i — тождественные функторы.

7.2. Набор $D_{\coprod} = D_1, \ldots, D_p$ биупорядоченных множеств с отношением инволюции на $\coprod_{i=1}^{p} D_i$ есть *диадическая связка*, если $D_{\coprod}^{\triangleleft} = \coprod_{i=1}^{p} {}^{\triangleleft} D_i$ — диадическое множество. (В частности, $D_{\coprod}(\mathcal{P}) = S_1(\mathcal{P}), \ldots, S_p(\mathcal{P})$ — диадическая связка, если $\dim \mathcal{P} \leq 2$.) Положим $\mathcal{A}(D_{\coprod}) = \mathcal{M}_{D^{\bowtie}, D^{\bowtie}}$, где $D^{\bowtie} = \coprod_{i=1}^{p} {}^{\bowtie} D_i$ (замечание 5.4).

Естественно определяется связка $\mathcal{P}(D_{\coprod})$ функторов $\Phi_i : \mathcal{A}(D_{\coprod}) \to \operatorname{mod} k$, для которой набор $S_i(\mathcal{P})$ есть $D_{\coprod}$ (заметим, что для $\mathcal{A}^{\triangleleft}(D_{\coprod}) = \mathcal{M}_{D^{\triangleleft}, D^{\triangleleft}}$ набор функторов $\Phi_i^{\triangleleft} : \mathcal{A}^{\triangleleft} \to \operatorname{mod} k$ не будет связкой, поскольку маркировка будет только объектно строгой).

Положим $\operatorname{Rep} \mathcal{P} = \operatorname{Rep} (Q_p, \mathcal{P})$ и $\operatorname{Rep} D_{\coprod} = \operatorname{Rep} \mathcal{P}(D_{\coprod})$.

Лемма. $\operatorname{Rep} (D_{\coprod}) \simeq \mathcal{M}_{D^{\triangleleft}}^{\Pi^{\triangleleft}}$ (*см. пп.* 6.7).

Зафиксируем $i = \overline{1, p}$. Для произвольной связки функторов $\mathcal{P}$, применяя к $\alpha_i \in (Q_p)a$ лемму 0.2, получаем $\operatorname{Rep} (Q_p', \mathcal{P}')$, где $Q_p' \simeq Q_{p-1}$, а маркировка $\mathcal{P}'$ не обязательно строгая. Применяя затем лемму 0.3, получаем $\operatorname{Rep} (Q_{p-1}, \overline{\mathcal{P}'})$, т. е. представление $(p-1)$ связки $\overline{\mathcal{P}'}$. При этом $\operatorname{Ind} (\mathcal{P}) \setminus \operatorname{Ind} (\overline{\mathcal{P}'}) \simeq$

Обозначим эти представления парами (x, z), где $z \in \{0, 1\} \coprod Y^{\times}(x)$ ($\dim(x, 0) = (0, 1)$, $\dim(x, 1) = (1, 1)$, $\dim(x, z) = (1, 2)$ при $z \times x$). Если $Y^{\times}(x') \leq 1$, то $\operatorname{Rep} Y((x, z), (x', z'))$ содержит „ненулевой морфизм, переводящий x в x'" (т. е. $\operatorname{Rep}((x, z), (x', z')) \ni (A, B)$, $B(x, x') \neq 0$), если и только если выполняется хотя бы одно из условий a) $x < z'$, b) $z' < x$, c) $z \leq z'$. Таким образом, предложение следует из лемм 0.2, 0.3 и 7.3.

7.5. Положим $D_i^- = \bigcup_{j<i} D_{i,j}$ и $D_i^+ = \bigcup_{j>i} D_{i,j}$, $D^+ = \bigcup_{i=1}^{p} D_i^+$. Если D — диадическое множество и $d \in D$, то построим $C_d(D) = \{(d_1, \ldots, d_n, d_{n+1})\}$ ($n \geq 0$), где $d_1 = d$, $(d_1, \ldots, d_n) \in \tilde{C}_d(D)$ (пп. 3.3) $d_{n+1} \in \{0, 1\} \coprod (D \setminus \mathring{D})^{\times}(d_n^*)$ и $C(D) = \bigcup_{d \in D} C_d(D)$. Для $\mathcal{A} = (d_1, \ldots, d_n, d_{n+1})$ положим $l(\mathcal{A}) = n + 1$. Для связки $D_{\coprod}$ и $d \in D_i$ положим $C_d^+(D_i) = \{(d_1, \ldots, d_{n+1}) \in C_d(D^{\lhd}) / d_i \in D^+$ при $i = \overline{1, n}\}$. $C_i^+(D_{\coprod}) = \bigcup_{d \in D} C_d^+(D_i)$. Если $d \notin \mathring{D}$, то $C_d^+(D) = \{(d)\}$, $l((d)) = 1$.

Введем на $C(D)$ и $C_i^+(D_{\coprod})$ структуру чум, считая $(x_1, \ldots, x_{m+1}) \leq (y_1, \ldots, y_{t+1})$, если либо $x_1 \lhd y_1$, либо $x_i \leq y_i$ при $i \leq r$ и имеет место одно из трех условий: a) $x_r^* \lhd y_{r+1}$, b) $x_{r+1} \lhd y_r^*$, c) $x_{r+1} \lhd y_{r+1}$ ($0 \lhd \{\{0, 1\} \coprod D\} \lhd 1$).

Лемма. *Если D_p — элементарная компонента, то $C_i^+(D_{\coprod}) \simeq C_i^+(\overline{D})$ при $i = \overline{1, p-1}$.*

Построим $\gamma\colon C(D) \to D$ ($\gamma_i\colon C_i^+(D_{\coprod}) \to D_i$), $\gamma(d_1, \ldots, d_{n+1}) = d_1$.

7.6. Компонента D_i *верхнелинейна*, если: 1) $D_{i,i} = \varnothing$, 2) $w(D_i^-) \leq 1$, и *верхнеэлементарна*, если, кроме того, 3) если $x \in D_i^-$, то $D_i^{\times}(x)$ — цепь (пп. 5.2).

Для $i = p$ верхнеэлементарность (соответственно верхнелинейность) совпадает с элементарностью (линейностью).

Лемма. *Если D_p элементарна, а D_{p-1} верхнеэлементарна (соответственно верхнелинейна), то $\overline{D}_{p-1}$ элементарна (соответственно линейна).*

Из лемм 7.5, 7.6 и предложения 7.4 вытекает такое следствие.

Следствие. *Если все компоненты $D_{\coprod}$ верхнеэлементарны, то $\operatorname{Ind} D_{\coprod} \simeq \coprod_{i=1}^{p} \operatorname{Ind} C_i^+(D_{\coprod})$ и, следовательно, конечная представимость всех $C_i^+(D_{\coprod})$ необходима и достаточна для конечной представимости $D_{\coprod}$.*

Аналогично доказывается следующее предложение.

Предложение. *Если все компоненты $D_{\coprod}$ верхнелинейны, то каждое $\operatorname{Ind} C^+(D_{\coprod})$ вкладывается в $\operatorname{Ind} D_{\coprod}$ и, следовательно, конечная представимость $C_i^+(D_{\coprod})$ необходима для конечной представимости $D_{\coprod}$.*

(Для доказательства аналога предложения 7.4 нужно рассматривать только элементарные представления.)

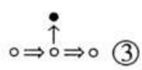
8. α-Критические множества. *8.1.* Сопоставим диадическому множеству $D = (D, \leq, \varphi, *)$ мум $D^{\Phi} = (D, \leq, \Phi)$, где $\Phi(x, x) = \Phi(x)$ (пп. 4.2), $\Phi(x, y) = 1$, если $x \lhd y$ ($x \neq y$) и $\Phi(x, y) = 2 + \Phi(D^{\times}(x^*, y^*))$ при $x \Rightarrow y$.

В терминах $C(D)$ (пп. 7.5) функция Φ (из пп. 4.2) может быть переопределена так: если $w(\gamma^{-1}(x)) > 1$, то $\Phi(x) = \infty$, а если $w(\gamma^{-1}(x)) \leq 1$, то

$\Phi(x) = |\gamma^{-1}(x)|$. Пусть $D_f^\Phi = (D_f, \leq, \Phi_f)$, где Φ_f — ограничение Φ на D_f. D_f^Φ — кум и для него определено $\hat{C}(D_f^\Phi)$ (пп. 5.6).

Лемма. *Если* $U \subset D$ *и* $\Phi(U) < \infty$, *то* $\gamma^{-1}(U)$ — *цепь* (*в* $C(D)$). $\hat{C}(D_f^\Phi) \simeq \bigcup_{d \in D_f} C_d(D)$.

***8.2.* Предложение.** *Если* D *не удовлетворяет условиям* I – VI (*пп.* 4.4), *то* D^Φ α-*содержит одно из следующих мум* K_i, $1 \leq i \leq 28$, *или двойственных к ним* K_i^{op} (*которые назовем* α-*критическими*):

1)	$\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet$	15)	$\bullet \leftarrow \circ \Rightarrow \circ$ ④
2)	$\circ\ \circ\ \circ$	16)	$\bullet \leftarrow \circ \Rightarrow \circ \leftarrow \bullet\ \circ$
3)	③ ③ $\bullet$	17)	$\circ \leftarrow \circ \Rightarrow \circ \leftarrow \circ\ \bullet$
4)	⑤ $\circ\ \bullet$	18)	$\bullet \leftarrow$ ③ $\Rightarrow$ ③ $\circ$
5)	 ④	19)	$\circ \leftarrow$ ③ $\Rightarrow$ ③ $\leftarrow \bullet\ \bullet$
6)	(∞) (∞)	20)	$\circ \leftarrow$ ④ $\Rightarrow$ ④ $\bullet$
7)	(∞) $\bullet\ \bullet$	21)	$\bullet \leftarrow$ ④ $\Rightarrow$ ④ $\leftarrow \bullet\ \bullet$
8)	(∞) $\Rightarrow$ (∞)	22)	$\bullet \leftarrow$ ⑤ $\Rightarrow$ ⑤ $\bullet$
9)	④ $\Rightarrow$ ④ $\circ$	23)	$\bullet \leftarrow$ ⑤ $\Rightarrow$ ⑤ $\Rightarrow$ ⑤
10)	③ $\Rightarrow$ ③ ④	24)	$\bullet \leftarrow$ ④ $\Rightarrow$ ④ $\Rightarrow$ ④ $\leftarrow \bullet$
11)	$\circ \Rightarrow \circ \Rightarrow \circ$ ④	25)	
12)	$\circ \Rightarrow \circ \Rightarrow \circ \Rightarrow \circ \Rightarrow \circ \Rightarrow \circ\ \bullet$	26)	$\bullet \leftarrow \circ \Rightarrow \circ \leftarrow$ ③ $\Rightarrow$ ③
13)	③ $\Rightarrow$ ③ $\Rightarrow$ ③ $\bullet$	27)	③ $\Rightarrow$ ③ $\leftarrow$ ③ $\Rightarrow$ ③
14)	④ $\Rightarrow$ ④ $\Rightarrow$ ④ $\Rightarrow$ ④	28)	$\bullet \leftarrow \circ \Rightarrow \circ \leftarrow \circ \Rightarrow \circ \leftarrow \bullet$

8.3. Если D не удовлетворяет условию 1, то возможны три случая: $|A| = |A^\infty| = 2$; $|A| = 3$, $|A^\infty| = 1$; $|A| = 4$. Соответствующие $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_6, K_7, K_1$. Если D не удовлетворяет условию II, то D^Φ α-содержит одно из K_2, K_3, K_4 (см. пп. 4.1). Если D не удовлетворяет условию III, то $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_5$. Будем далее считать, что условия I, II, III выполняются. Если D не удовлетворяет условию IV и $\mu = \infty$, то $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_8$ ($\mathrm{eq}(\sigma^*) = \infty$).

Пусть $4 \leq \mu$ ($l(\sigma)$, eq, eq*) $< \infty$). ($\mathrm{eq} = \mathrm{eq}(\sigma, X)$, $\mathrm{eq}^* = \mathrm{eq}^*(\sigma, X)$). Для множества $X = Z^- \coprod Z^+ \coprod Z^e$ (окаймляющего $\sigma = a \Rightarrow b$) положим $m^- = \min(\Phi(Z^-), 2 - l(\sigma))$, $m^+ = \min(\Phi(Z^+), 2 - l(\sigma))$. Будем считать, что $m^- \geq m^+$ (остальные случаи аналогичны этим с точностью до двойственности).

8.4. Пусть $l(\sigma)=0$.

Если $\mathrm{eq}\ge 2$, $\mathrm{eq}^*\ge 2$, то возможны случаи: a) $m^-=m^+=1$, $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{16}$; b) $m^-=1$, $\mathrm{eq}(\sigma^*)\ge 1$, $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{18}$; c) $m^-=2$, не выполняется условие II ($Z_1 = Z^-, Z_2=Z^e, Z_3=\{b\}$), d) $\mathrm{eq}(\sigma^*)\ge 2$, $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_9$.

Если $\mathrm{eq}\ge 4$, $\mathrm{eq}^*\ge 1$, то: a) $\mathrm{eq}(\sigma^*)\ge 1$, $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{10}$; b) $m^-\ge 1$, $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{15}$.

Если $\mathrm{eq}\ge 1$, $\mathrm{eq}^*\ge 4$, то: a) $m^-=m^+=2$, $D^\Phi \overset{\alpha}{\supseteq} K_{17}$; b) $m^-=2$, $m^+=1$ ($\mathrm{eq}(\sigma^*)\ge 1$), $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{19}$; c) $m^-=2$, $\mathrm{eq}(\sigma^*)\ge 2$, $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{20}$; d) $m^-=m^+=1$ ($\mathrm{eq}(\sigma^*)\ge 2$), $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{21}$; e) $m^-=1$, $\mathrm{eq}(\sigma^*)\ge 3$, $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{22}$; f) $\mathrm{eq}(\sigma^*)\ge 4$, $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{10}$.

8.5. Пусть $l(\sigma)=1$ ($m^-\le 1$).

Если $\mathrm{eq}\ge 1$, $\mathrm{eq}^*\ge 1$, то возможны случаи: a) $\mathrm{eq}(\sigma^*)\ge 1$, $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{13}$; b) $m^-=1$, $D \overset{\alpha}{\supseteq} \overset{u}{\bullet} \leftarrow \overset{a}{\circ} \Rightarrow \overset{x}{\circ} \Rightarrow \overset{b}{\circ}\ \overset{v}{\bullet}$, а значит, $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_8=\{x^*, b^*\}$.

Если $\mathrm{eq}\ge 4$, то $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{11}$.

Если $\mathrm{eq}\ge 1$, $\mathrm{eq}^*\ge 4$, то возможны случаи: a) $m^-=1$, $\mathrm{eq}(\sigma^*)\ge 3$, $D^\Phi \overset{\alpha}{\supseteq} K_{23}$; b) $m^-=m^+=1$, $\mathrm{eq}(\sigma^*)\ge 2$, $D^\Phi \overset{\alpha}{\supseteq} K_{24}$; c) $\mathrm{eq}(\sigma^*)\ge 4$, $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{11}$.

8.6. Пусть $l(\sigma)\ge 2$ ($m^-=m^+=0$), $\mathrm{eq}^*(\sigma,x)=\mathrm{eq}(\sigma^*)$. В этом случае eq и $\mathrm{eq}^*=\mathrm{eq}(\sigma^*)$ равноправны. Будем считать, что $\mathrm{eq}\le\mathrm{eq}^*$.

Если $\mathrm{eq}\ne 0$, то $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{13}$. Пусть $\mathrm{eq}=0$. Если $\mathrm{eq}(\sigma^*)\ge 2$, то $D^\Phi \overset{\alpha}{\supseteq} K_{14}$. Если $\mathrm{eq}(\sigma^*)=1$, $l(\sigma)\ge 4$, то $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{12}$.

8.7. Если D не удовлетворяет условию V, то $D \overset{\alpha}{\supset} K_{25}$, или $D \overset{\alpha}{\supset} K_{25}^{op}$.

8.8. Пусть D не удовлетворяет условию VI. Если $D^{\asymp}(a,d)=\varnothing$, то $\mathrm{eq}(a^*,b^*)\ne 0$, $\mathrm{eq}(c^*,d^*)\ne 0$, $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{27}$. Пусть $x\in D^{\asymp}(a,d)$. Тогда $x\in D^{\asymp}(b)\cup D^{\asymp}(c)$. Пусть $x\asymp b$ ($x\asymp c$ — двойственно). Если $x\in \overset{\circ}{D}$, то $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_2=\{x,b,d\}$. Поэтому если $\Phi(D^{\asymp}(a,d))=\infty$, то $\{x\asymp y\}\asymp\{a,d\}$. Если при этом $y\asymp b$, то противоречие с леммой 4.5 ($\{x,y\}\asymp\{a,b\}$), а если $y\asymp c$, то $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{28}$. Итак, $\Phi(D^{\asymp}(a,d))<\infty$. Если $\mathrm{eq}(a^*,b^*)\ne 0$, то $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{26}$, а если $\mathrm{eq}(c^*,d^*)\ne 0$, то $D^\Phi \overset{\alpha}{\supset} K_{18}=\{c,d,x,b\}$. Предложение 8.2 доказано.

8.9. Все K_i гомогенны (пп. 1.5) (мы не располагаем априорным объяснением этого факта) и, кроме K_6, K_7, K_8, конечно упорядочены. Следовательно, при $i\ne 6,7,8$ определено $\hat{C}(K_i)$. Тривиальным вычислением и применением критерия Клейнера проверяется следующая лемма.

Лемма. *Для всех* α*-критических кум* K_i, $i\ne 6,7,8$, $\left|\mathrm{Ind}\,\hat{C}(K_i)\right|=\infty$.

8.10. Пусть $X\subset D$, $X=X^-\coprod^{\asymp} X^+$. Согласно пп. 3.5 $\overset{\circ}{X}{}^{+}=\coprod_{i=1}^t Y_i$, где Y_i — полосы в X^+ (X^+-полосы). X^+-полоса не обязательно полоса в D, но содержится в D-полосе, поэтому $Y_i\cap Y_i^*=\varnothing$ ($Y_i^*=\{y\mid y^*\in Y_i\}$), замечание 3.5. Построим набор $\partial(X)=\left(X^\partial\right)_1,\left(X^\partial\right)_2,\ldots,\left(X^\partial\right)_t$, где $\left(X^\partial\right)_i=X_i^-\coprod X_i^+$, $X_i^-=Y_i^*$, $X_i^+=D^{\asymp}\left(X_i^-\right)$. Если $\mathcal{A}=A_1,\ldots,A_r$ ($A_i\subset D$, $A_i^-=A_i^-\coprod^{\asymp}A_i^+$), то положим $\partial(\mathcal{A})=\partial(A_1),\ldots,\partial(A_r)$.

Для произвольного $K \subset D$ положим $K^- = \varnothing$, $(K^+ = K)$ и $D_{\amalg}(K) = K$, $\partial(K)$, $\partial^2(K), \ldots, \partial^j(K), \ldots = D_1, \ldots, D_p$ ($\partial^j(K) = \partial\left(\partial^{j-1}(K)\right)$ (последовательность конечна из-за ацикличности D, пустые множества мы исключаем). $D_{\amalg}(K)$ — диадическая связка, если считать, что D_i — биупорядоченные множества и инволюция на $\coprod_{i=1}^{p} D_i$ задана так, что если $d \in Y_i \subset D_j^+ \subset D_j$, то $d^* \in D_e^- = Y_i^* \subset D_e = \left(D_j^{\partial}\right)_i$.

Пример. Пусть $K = \overset{c}{\circ} \leftarrow \overset{a}{\circ} \Rightarrow \overset{b}{\circ}$, $D^{\bowtie}\left\{a^*, b^*\right\} = t \notin \mathring{D}$, $D^{\bowtie}\left\{c^*\right\} = s \in \mathring{D}$, $D^{\bowtie}\left\{s^*\right\} = \varnothing$, $Y_1 = \{a, b\}$, $Y_2 = \{c\}$ (или наоборот). $D_{\amalg}(K) = K$, $\left\{a^*, b^*, t\right\}$, $\left\{c^*, s\right\}$, $\left\{s^*\right\}$ (нумерация D_i зависит от нумерации полос, но это не отражается на $C_1^+\left(D_{\amalg}(K)\right)$.

С другой стороны, можно рассмотреть D-связку $\Pi(K) = \{(d, i) \in D \times p \mid d \in D_i\}$. $\mathcal{M}_D^{\Pi(K)} \simeq \operatorname{Rep}\left(D_{\amalg}(K)\right)$ (леммы 6.7, 7.2). $d\left(D_{\amalg}(K)\right) = |\{i \mid d \in D_i\}|$. Компоненты $D_{\amalg}(K)$ верхнелинейны, а если $K \subset D_f$, то верхнеэлементарны. Если K транзитивно, то построим $K^{\Phi} \in D^{\Phi}$ $(K^{\Phi} = (K, \leq, \Phi)$ и $\left(K^{\Phi}\right)_h \overset{\beta}{\subset} D^{\Phi})$ (см. пп. 1.3).

Лемма. *Конечная представимость* $C_1^+\left(D_{\amalg}(K)\right)$ *необходима для конечной представимости* $D_{\amalg}(K)$. *Если* K *транзитивно и* $\dim\left(K^{\Phi}\right)_h < \infty$, *то* $\hat{C}\left(\left(K^{\Phi}\right)_h\right) \simeq C_1^+\left(D_{\amalg}(K)\right)$.

8.11. Назовем *полизигзагом* $\hat{W}$ набор $W_1, \ldots, W_n$ непустых подмножеств $\mathring{D}$, если 1) $W_i \cap W_i^* = \varnothing$, 2) $W_{i+1} \bowtie W_i^*$.

Выбирая по представителю в каждом W_i, получаем D-зигзаг. Для $d \in \mathring{D}$ положим $D\left(\hat{W}\right) = \left|\left\{W_i \in \hat{W} \mid W_i \cap \left\{d, d^*\right\} \neq \varnothing\right\}\right|$. Аналогично лемме 3.4 (с учетом ацикличности D) доказывается следующая лемма.

Лемма. *Для каждого* $\hat{W}$ *существует* d *такое, что* $d\left(\hat{W}\right) = 1$.

8.12. В этом подпункте мы докажем следующее предложение.

Предложение. *Если* D^{Φ} α*-содержит* α*-критическое множество, то* $|\operatorname{Ind} D| = \infty$.

Для всех K_i $K_i^{\alpha} = K_i$ (см. пп. 5.8). $K_i \overset{\alpha}{\subset} D^{\Phi}$ означает, что $(\overline{K}_i)^{\alpha} = K_i$ и $\overline{K}_i \overset{\beta}{\subset} D^{\Phi}$. Положим $\mathcal{K}_i' = \operatorname{Im}\beta$ (пп. 5.8). $\mathcal{K}_i'' = (\mathcal{K}_i')_h$ (K_i' не обязательно гомогенно). Поскольку $\mathcal{K}_i$ (и значит, $\overline{\mathcal{K}}_i$) гомогенно, то $\overline{\mathcal{K}}_i \overset{\beta}{\subset} \mathcal{K}_i''$, $\mathcal{K}_i \overset{\alpha}{\subset} \mathcal{K}_i''$. Поэтому если $\dim \mathcal{K}_i'' < \infty$, то $\hat{C}(K_i) \subset C_1^+\left(D_{\amalg}(\mathcal{K}_i')\right)$ (леммы 5.6, 5.8, 8.10). Для доказательства мы будем строить $D_{\amalg}(K_i')$ и при $\dim K_i < \infty$ базироваться на лемме 8.9.

Итак, до конца пункта будем считать, что $K_i \overset{\alpha}{\subset} D^{\Phi}$ (случай двойственных K_i^{op}, разумеется, совершенно аналогичен), $1 \leq i \leq 28$.

8.13. Предположим сначала, что $\dim K_i = \infty$, т. е. $i = 6, 7, 8$. Пусть $i = 6$, $K_6' = \{a, b\}$, $\Phi(a) = \Phi(b) = \infty$, $a \bowtie b$. $\Phi(a) = \infty$ означает, что $\tilde{C}_a(D)$ содержит зигзаг $\tilde{a} = (a = a_1,\ a_2, \ldots, a_t)$ и $D^{\asymp}\left(a_t^*\right)$ — не цепь, т. е. либо $w\left(D^{\asymp}\left(a_t^*\right)\right) > 1$, либо $D^{\asymp}\left(a_t^*\right)$ содержит ребро (c, d). Положим $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \left\{a^*, a_2\right\}, \ldots$ $\ldots, A_j = \left\{a_{j-1}^*, a_j\right\}$, $1 \le j \le t$, $A_{t+1} = \left\{a_t^*, c, d\right\}$, где $a_t^* \asymp \{c, d\}$ и либо $c \asymp d$, либо $c \Rightarrow d$, $A_{t+2} = \left\{c^*, d^*\right\} \cap \mathring{D}$ (может быть $A_{t+2} = \varnothing$). Аналогично построим $B_1,\ B_2, \ldots, B_r, B_{r+1},\ B_{r+2}$, диадическую связку $D_{\amalg} = \{a, b\},\ A_2, \ldots, A_{r+1}$, $A_{r+2},\ B_2, \ldots, B_{r+1},\ B_{r+2}$ с естественной инволюцией и соответствующую D-связку П. Связка $D_{\amalg}$ верхнелинейна. Легко видеть, что $w\left(C_1^+\left(D_{\amalg}\right)\right) \ge 4$, $\left|\operatorname{Ind}\left(C_1^+\left(D_{\amalg}\right)\right)\right| = \infty$, а значит, $\left|\operatorname{Ind}\left(D_{\amalg}\right)\right| = \infty$ (пп. 7.6). С другой стороны, если $A_{t+2} \ne \varnothing$, рассмотрим полизигзаг $\hat{W} = A_{t+2},\ \left\{a_t^*\right\},\ \left\{a_{t-1}^*\right\}, \ldots, \left\{a_1^*\right\} = \left\{a^*\right\}$, $\{b\},\ \{b_2\}, \ldots, \{b_r\},\ \mathring{B}_{r+1}$, а если $A_{t+2} = \varnothing$, то рассмотрим $\hat{W}$ без A_{t+2} $\left(\left\{a_t^*\right\}, \ldots\right)$. Из лемм Габриеля и 8.11 следует $|\operatorname{Ind} D| = \infty$.

Для K_7 и K_8 доказательство аналогично.

8.14. Будем теперь считать, что $D^{\Phi} \overset{\alpha}{\supset} K_i$ при $i \notin \{6, 7, 8\}$ и $D^{\Phi} \overset{\alpha}{\not\supset} K_i$ при $i \in \{6, 7, 8\}$. Из вида K_i непосредственно следует такая лемма.

Лемма. *Если* $d \in R_1(\overline{K}_i)$, *то* $\Phi\left(\overline{K}_i^{\asymp}(d)\right) = \infty$.

Покажем, что $\dim K_i'' < \infty$. Для $x \in \overline{K}_i$ положим $x' = \beta(x)$, x'' — соответствующий элемент K_i''. Если $x \in R_1\left(\overline{K}_i\right)$, $\Phi(x') = \infty$, то из леммы следует, что $D^{\Phi} \overset{\alpha}{\supset} K_i$, $i \in \{6, 7\}$. Если же $x \in Y$, где Y — полоса в K', $|Y| > 1$ и $\Phi_h(x) = \infty$, то $\Phi_h(y) = \infty$ при $y \in Y$, и $D^{\Phi} \supset K_8$.

Таким образом, $\left|\operatorname{Ind} C_1^+\left(D_{\amalg}(K_i')\right)\right| = \infty$ (пп. 8.9, 8.10, 8.12), $\left|\operatorname{Ind}\left(D_{\amalg}(K_i')\right)\right| = \infty$ (лемма 8.9), и осталось убедиться только в применимости леммы Габриеля.

8.15. Пусть $D^{\Phi} \overset{\alpha}{\supset} K_i$, $1 \le i \le 4$.

Если $D \supset K_2 = \mathring{K}_2 = \{a, b, c\}$, то положим $D_{\amalg} = D_1,\ D_2\colon D_1 = K_2, D_2 = K_2^*$. Ясно, что $K_2 \cap K_2^* = \varnothing$, $a\left(D_{\amalg}\right) = b\left(D_{\amalg}\right) = c\left(D_{\amalg}\right) = 1$ и $|\operatorname{Ind} D| = \infty$. Будем далее считать, что $D \not\supset K_2$; $\ddot{w}\left(\mathring{K}_i'\right) \le 2$.

Пусть $\mathring{K}_i' = Z_1 \coprod^{\asymp} Z_2$, $i = \overline{1, 4}$, $Z_1 \ne \varnothing$ (иначе $\left|\operatorname{Ind}\left(D \setminus \mathring{D}\right)\right| = \infty$). Рассмотрим два случая: a) $\max\{|Z_1|, |Z_2|\} = 1$, b) $\max\{|Z_1|, |Z_2|\} \ge 1$. В п. a) доказательство аналогично пп. 8.13. Пусть $\mathring{K}_i' = \{a, b\}$ (или $\mathring{K}_i' = \{a\}$), $D_{\amalg}(a) =$ $= \{a\}, A_2, \ldots, A_m$, $D_{\amalg}(b) = B_1, \ldots, B_n$. Если $m < n$, то $D_{\amalg}(K_i') = K_i', A_2, B_2, \ldots$ $\ldots, A_m, B_m, A_{m+1}, \ldots, A_n$. Рассмотрим в $D_{\amalg}(a)$ подсвязку $D_{\amalg}'(a)$ так, что если $\left|\mathring{A}_t\right| > 1$, то положим $A_{t+1}' = (\mathring{A}_t)^*$ и $A_l' = \varnothing$ при $l > t+1$. Аналогично построим $D_{\amalg}'(b)$ и $D_{\amalg}'(K_i')$. Легко видеть (из явного вида примитивных клейнеровских критических множеств), что $\left|\operatorname{Ind}\left(C_1^+\left(D_{\amalg}'(K_i')\right)\right)\right| = \infty$. Для применения леммы Габриеля полизигзаг $\hat{W}$ строится, как в пп. 8.13: из каждого A_j', B_j' берется $\mathring{A}_j'$, $\mathring{B}_j'$. ($\left|W_j\right|$ может быть больше 1 только для первого и последнего множеств из $\hat{W}$.) Нужно только убедиться, что если $W_t = \{u, v\}$, то $u^* \ne v$. Однако в этом случае имеем

$$a \sim a^* \asymp a_2 \sim a_2^* \ldots a_t \sim a_t^* \asymp u \sim u^* \asymp a_t^* \sim a_t \asymp a_{t-1}^* \ldots \sim a_2^* \sim a_2 \asymp a^* .$$

$w\left(D^{\asymp}(a)\right) > 1$ (из вида K_i), значит, $\Phi\left(a^*\right) = \infty$, $\Phi\left(a_2^*\right) = \infty$, $(a_2 \asymp a^*)$, $\Phi\left(a_j\right) = \Phi\left(a_j^*\right) = \Phi(u) = \Phi\left(u^*\right) = \infty$ и $D^{\Phi} \overset{\alpha}{\supset} K_6$.

b) Пусть $\overset{\circ}{Z}_1 \supset \{b_1, b_2\}$, $b_1^* \neq b_2$, поскольку в противном случае $\Phi(b_1) = \Phi(b_2) = \infty$ и $D^{\Phi} \overset{\alpha}{\supset} K_7$. Мы можем считать, что, „исключив" одну из точек b_1, b_2 из K_i', мы не получим α-критического подмножества. Отсюда следует, что $\left|\overset{\circ}{D}_j\right| = 1$ при $\overset{\circ}{D}_j \in D_{\coprod}(b_\varepsilon)$ $(\varepsilon = 1, 2)$.

Далее, „уменьшая" связку с сохранением бесконечной представимости $C_1^+\left(D_{\coprod}'(K_i')\right)$, можно добиться того, что $\overset{\circ}{D}{}_j' = \varnothing$ в $D_{\coprod}(b_1)$ при $j > 3$ и в $D_{\coprod}(b_2)$ при $j > 2$. Если же $\overset{\circ}{Z}_2 \ni \alpha$, то если $\overset{\circ}{D}{}_3' \neq \varnothing$ в $D_{\coprod}(b_1)$, то $\overset{\circ}{D}{}_j' = \varnothing$ для $D_j' \in D_{\coprod}(a)$, $j > 1$. Таким образом, в уменьшенной связке может быть не более одной пары больших „дополнительных" точек, т. е.

$$\left|\left\{ d \in \overset{\circ}{D} \,\middle|\, \{d, d^*\} \subset \textstyle\coprod_{j>1} \overset{\circ}{D}{}_j'(K_i') \right\}\right| \leq 2.$$

Число „основных" (больших) точек $|\overset{\circ}{K}{}_i'| > 1$. При этом если $x, y \in D_1 = K_i'$, то $x^* \neq y$. Значит, найдется $d \in \overset{\circ}{D}$, для которой $d(D'(K_i')) = 1$ и по лемме Габриеля $|\operatorname{Ind} D| = \infty$.

8.16. Пусть D^{Φ} α-содержит одно из нерассмотренных примитивных (как чум) K_i, т. е. K_i при $9 \leq i \leq 14$, $\overset{\circ}{K}{}_i' = A \coprod^{\asymp} B$. Доказательство аналогично случаю a) из пп. 8.15 (с заменой $\{a\}$ на A и $\{b\}$ на B).

8.17. Предположим, наконец, что D^{Φ} не α-содержит примитивных K_i (и K_i^{op}), но $D^{\Phi} \overset{\alpha}{\supset} K_i$, $i = 5, \overline{15, 28}$. Нетрудно видеть, что $K_i'' \simeq \overline{K}_i$ (в противном случае D^{Φ} α-содержит примитивное K_i). В этом случае доказательство аналогично п. b) из пп. 8.15, т. е. мы сравниваем число m_i основных точек из $\overset{\circ}{D}_1$ и число a_i дополнительных пар точек — $\left|\left\{ d \in \overset{\circ}{D} \,\middle|\, \{d, d^*\} \in \coprod_{j>1} \overset{\circ}{D}_j(K_i') \right\}\right|$.

Ясно, что если a) $\max_{i \in K_i} \Phi(x) < 4$, то $a_i = 0$. Это имеет место во всех случаях, кроме K_{15}, K_{20}, K_{21}, K_{23}, K_{24}. Поэтому в случае a) для применения леммы Габриеля достаточно убедиться в том, что $\overset{\circ}{D}_1 \neq \overset{\circ}{D}{}_1^*$. При $i < 26$ очевидно даже, что $\overset{\circ}{D}{}_1^* \cap \overset{\circ}{D}_1 = \varnothing$ (с учетом замечания 3.5). В случаях $26 - 28$, где $\overset{\circ}{D}_1 = \overset{c}{\circ} \Rightarrow \overset{d}{\circ} \leftarrow \overset{a}{\circ} \Rightarrow \overset{b}{\circ}$, не исключено, что $a^* = d$, но другие случаи $x = y^*$ (в $\overset{\circ}{D}_1$) исключены, поскольку не может быть $x \asymp x^*$. Итак, в случае a) лемма Габриеля применима и $|\operatorname{Ind} D| = \infty$.

b) $\max_{i \in K_i} \Phi(x) \geq 4$. Ясно, что во всех случаях $a_i \leq 1$ и $m_i > 1$; при этом, кроме $i = 20$, $\overset{\circ}{D}{}_1^* \cap \overset{\circ}{D}_1 = \varnothing$. При $K_{20} \overset{\alpha}{\subset} D^{\Phi}$, $K_{20} = \overset{x}{\bullet} \leftarrow \overset{a}{④} \Rightarrow \overset{b}{④} \quad \overset{t}{\bullet}$ не исключено, что $a^* = x$, но тогда дополнительная точка $z \asymp \{a^*, b^*\}$ не может совпадать с x или x^*.

Предложение 8.12 доказано. Вместе с предложением 8.2 оно влечет необходимость условий теоремы 4.4.

9. Ширина, ранг и локальная линейность предкритических множеств. *9.1.* Перейдем к доказательству достаточности условий I–VI теоремы 4.4 для конечной представимости D. Будем далее считать, что D удовлетворяет условиям I – VI, а следовательно, и II′ – VI′ (замечание 4.5). В [9,4] доказано, что если $|\operatorname{Ind} C(D)| < \infty$, то и $|\operatorname{Ind} D| < \infty$, значит, нам достаточно доказать, что $C(D)$ не содержит (клейнеровских) критических множеств (пп. 1.4). Далее везде $\mathcal{A} = (a = a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$, $\mathcal{B} = (b = b_1, b_2, \ldots, b_{m+1}) \in C(D)$, $\gamma(\mathcal{A}) = a$, $\gamma(\mathcal{B}) = b$. Подмножество $\hat{\mathcal{A}} \subset C(D)$ — *локально линейное*, если $w(\gamma^{-1}(d) \cap \hat{\mathcal{A}}) \le 1$ для любого $d \in D$.

Из леммы 4.5 следует такая лемма.

Лемма. *Если* $\hat{\mathcal{A}}$ *— локально линейное подмножество* $C(D)$; $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \hat{\mathcal{A}}$ *и* $a \le b$, *то* $\mathcal{A} \asymp \mathcal{B}$, *если и только если* $\{a^* \Rightarrow b^*\} \asymp \{b_2 < a_2\}$.

Положим $C(\mathring{D}) = \gamma^{-1}(\mathring{D})$ $(= \{\mathcal{X} \subset C(D) \mid l(\mathcal{X}) > 1\}$ (пп.7.5)); $C_0(D) = \{(d, 0) \mid d \in \mathring{D}\}$, $C_1(D) = \{(d, 1) \mid d \in \mathring{D}\}$, $\mathring{C}(D) = C(\mathring{D}) \setminus (C_0(D) \cup C_1(D))$. Для $\mathcal{A} \in \mathring{C}(D)$ положим $\mathcal{A}' = (a_2, \ldots, a_{n+1})$. Для $\hat{\mathcal{A}} \in \mathring{C}(D)$ положим $\hat{\mathcal{A}}' = \{\mathcal{X}' \mid \mathcal{X} \in \hat{\mathcal{A}}\} \subset C(D)$.

Предложение. *Пусть* $\hat{\mathcal{A}}$ *— антицепь в* $C(D)$, *тогда*:

1) *если* $\hat{\mathcal{A}} \supset \{\mathcal{A}, \overline{\mathcal{A}}, \mathcal{B}\}$ *и* $\gamma(\overline{\mathcal{A}}) = a$, *то* $b \asymp a$;

2) $|\hat{\mathcal{A}}| < 4$.

Предположим противное. Пусть $l(\hat{\mathcal{A}}) = \sum_{\mathcal{A} \in \hat{\mathcal{A}}} l(\mathcal{A})$. Будем считать, что для любой антицепи $\hat{\mathcal{B}}$ при $l(\hat{\mathcal{B}}) < l(\hat{\mathcal{A}})$ утверждения 1, 2 выполняются. Если $\mathcal{A}, \overline{\mathcal{A}} \in \hat{\mathcal{A}}$ и $\gamma(\mathcal{A}) = \gamma(\overline{\mathcal{A}})$, то $\mathcal{A}, \overline{\mathcal{A}} \in \mathring{C}(D)$ (поскольку $\mathcal{A} \asymp \overline{\mathcal{A}}$).

Пусть 1) $\overline{\mathcal{A}} = (a, \overline{a}_2, \ldots)$ и a сравним с b. Если $b = a$, то положим $\hat{\mathcal{B}} = \{\mathcal{A}' \overline{\mathcal{A}}', \mathcal{B}', (a^*, 0)\}$. $l(\hat{\mathcal{B}}) < l(\hat{\mathcal{A}}) - 1$, $w(\hat{\mathcal{B}}) = 4$. Если $a \Rightarrow b$ (случай $b \Rightarrow a$ аналогичен), $a_2 \in D^{\asymp}(a^*, b^*)$ и из лемм 8.1 и 4.5 следует сравнимость $\mathcal{A}$ и $\overline{\mathcal{A}}$.

Пусть 2) $|\hat{\mathcal{A}}| = 4$. Предположим сначала, что $\hat{\mathcal{A}}$ не локально линейно: $\hat{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A}, , \overline{\mathcal{A}}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$, $\gamma(\mathcal{A}) = \gamma(\overline{\mathcal{A}}) = a$, тогда в соответствии с 1) $a \asymp b = \gamma(\mathcal{B})$, $a \asymp c = \gamma(\mathcal{C})$. $\Phi(a) = \infty$. Если $b \Rightarrow c$ или $c \Rightarrow b$, то имеем противоречие с леммой 4.5, если $b \asymp c$ или $b = c$, то противоречие с условием 1 $(A = \gamma(\hat{\mathcal{A}})$, $|A^{\infty}|$ равно 1 или 2). Пусть теперь $\hat{\mathcal{A}}$ локально линейно. $\hat{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A}, , \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$, $\gamma(\mathcal{A}) = a$, $\gamma(\mathcal{B}) = b$, $\gamma(\mathcal{C}) = c$, $\gamma(\mathcal{D}) = d$. Возможны случаи: 2a) $\{a \Rightarrow b\} \asymp \{c \asymp d\}$, 2b) $\{a \Rightarrow b\} \asymp \{c \Rightarrow d\}$, 2c) $\{a \Rightarrow b \Rightarrow c\} \asymp \{d\}$, 2d) $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d$, 2e) a, b, c, d попарно не сравнимы. 2a) и 2b) противоречат лемме 4.5; в случае 2c) $\operatorname{eq}(a^*, c^*) \ne 0$, $\operatorname{eq}(a, c) \ne 0$ и противоречие с условием IV $(l = 1, \operatorname{eq} \ge 1, \operatorname{eq}^* \ge 1)$; в 2d) $\operatorname{eq}(a^*, d^*) \ge 2$, $l = 2$, $\operatorname{eq}^*(a, d) = \operatorname{eq}(a^*, d^*) \ge 2$, $\mu(a, d) \ge 4$ (IV); 2e) противоречит условию I.

9.2. Пусть далее $\mathcal{K}$ — критическое подмножество $C(D)$ ширины 3 (т. е. (2,2,2), (1,3,3), (1,2,5) или $N \coprod^{\asymp} (4)$. Подмножество $\mathcal{L}$ в $\mathring{C}(D)$ назовем *предкритическим*, если оно имеет вид (2,2,2), (1,3,3) или (1,2,4).

Замечание. Таким образом, либо $|\mathcal{L}| = 7$, либо $\mathcal{L} = (2,2,2)$.

Лемма. *Если* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{K}$ *и* $\mathcal{A} \asymp \mathcal{B}$, *то* $\mathcal{K} \supset \mathcal{L} \supset \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$.

Предложение. *Если* $\mathcal{L}$ — *не локально линейное предкритическое подмножество* $C(D)$, *то* $C(D)$ *содержит локально линейное примитивное* (см. пп. 1.4) *критическое подмножество* $\mathcal{K}$.

$\mathcal{A}, \overline{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}$, $\gamma(\overline{\mathcal{A}}) = a$, $\mathcal{A} \asymp \overline{\mathcal{A}}$. Из примитивности $\mathcal{L}$ и $w(\mathcal{L}) = 3$ следует, что $\mathcal{L} = \hat{\mathcal{A}} \coprod^{\asymp} \hat{C}$, где $\hat{\mathcal{A}} \ni \mathcal{A}, \overline{\mathcal{A}}$; $w(\hat{C}) = 1$. Предположим сначала, что $\gamma(\overline{\mathcal{A}}) \neq \{a\}$. Каждая точка $\hat{\mathcal{A}}$ сравнима в точности с одной из точек $\mathcal{A}, \overline{\mathcal{A}}$. Если $b \in \gamma(\hat{\mathcal{A}})$ (и $b \neq a$), то $b \Rightarrow a$ или $a \Rightarrow b$ (если $b \lhd a$, то $\mathcal{B} < \{\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}\}$, а если $b \asymp a$, то $\hat{\mathcal{B}} \asymp \{\mathcal{A}, \overline{\mathcal{A}}\}$), $\gamma(\hat{\mathcal{A}}) \subset Y$, где Y — полоса D, содержащая a (см. пп. 3.5). Из предложения 9.1 следует, что $\gamma(\hat{C}) \asymp \{a\}$, а значит, $\gamma(\hat{C}) \cap Y = \varnothing$ и $\gamma(\hat{C}) \asymp \gamma(\hat{\mathcal{A}})$ (если $c \in \gamma(\hat{C})$ и $c \lhd b$, то $C < \mathcal{B}$).

Пусть $\mathcal{B} \in \hat{\mathcal{A}}$, $\mathcal{B} < \mathcal{A}$, $\mathcal{B} \asymp \overline{\mathcal{A}}$, тогда $\overline{a}_2 \asymp \{b^*, a^*\}$, $\overline{\mathcal{A}} = (a, \overline{a}_2, \dots)$ $b^* \lhd a_2$ или $b_2 \lhd a_2$, значит, $a_2 \neq \overline{a}_2$ и $a_2 \asymp \overline{a}_2$. Если $a_2 \asymp b^*$, то противоречие с леммой 4.5, $b^* \lhd a_2$. Если $\mathcal{B} \in \mathring{C}(D)$, то $b_2 \asymp \{a^*, b^*\}$ (поскольку $\mathcal{B} \asymp \overline{\mathcal{A}}$), $\overline{a}_2 \leq$ $\leq b_2$ (лемма 4.5). Если $\overline{a}_2 = b_2$, то $\Phi(b_2) > 1$ (иначе $\mathcal{B} < \overline{\mathcal{A}}$), $a_2 \asymp b_2$ (если $a_2 < b_2$, то $b^* < b_2$, а если $b_2 < a_2$, то $\overline{a}_2 < a_2$). Приходим к противоречию с условием IV, положив $(a^*, b^*) = \sigma$, $X^- = \{a_2\}$, $X^e = \{\overline{a}_2, b_2\}$ (или $X^e = \{b_2\}$ при $b_2 = \overline{a}_2$). $\mathrm{eq}(\sigma^*) \neq 0$, поскольку $C \neq \varnothing$, $\mathrm{eq}^*(\sigma, x) \geq 2$, $\mathrm{eq}(\sigma, x) \geq 2$, $\mu \geq 4$.

Итак, $\mathcal{B} \notin \mathring{C}(D)$, $\mathcal{B} \in C_1(D)$ (при $\mathcal{B} \in C_0(D)$, $\mathcal{B} < \overline{\mathcal{A}}$), $\mathcal{B} = (b, 1)$. Если $\hat{\mathcal{A}} \ni \overline{\mathcal{B}} < \mathcal{A}$, то $\overline{\mathcal{B}} = (\overline{b}, 1)$, $\overline{b} \Rightarrow a$, $l(\overline{b}, a) > 0$, $a_2 \asymp (\overline{b}^*, a^*)$ и противоречие с условием IV; $l \geq 1$, $\mathrm{eq} \geq 1$, $\mathrm{eq}^* \geq 1$. Если $\overline{\mathcal{B}} < \overline{\overline{\mathcal{A}}}$, то противоречие с леммой 4.5 (и a_2, и $\overline{a}_2$ должны оснащать короткое ребро, входящее в a). Итак, $|\{\mathcal{B} | \mathcal{B} < \mathcal{A}$ или $\mathcal{B} < \overline{\mathcal{A}}\}| \leq 1$ и $\mathcal{B} = (b, 1)$. Аналогично $|\{\overline{\mathcal{B}} | \overline{\mathcal{B}} > \mathcal{A}$ или $\overline{\mathcal{B}} > \overline{\mathcal{A}}\}| \leq 1$ и $\overline{\mathcal{B}} = (\overline{b}, 0)$. При этом $b \lhd \overline{b}$, так как при $b \Rightarrow \overline{b}$ $l(b, \overline{b}) \geq 1$ и $\mathrm{eq} \geq 1$, $\mathrm{eq}^* \geq 1$ (противоречие с условием IV). Значит, если $\mathcal{B} < \mathcal{A}$, то $\overline{\mathcal{B}} > \mathcal{A}$ (при $\overline{\mathcal{B}} > \overline{\mathcal{A}}$, $\mathcal{B} < \overline{\mathcal{B}}$ — противоречие с примитивностью $\mathcal{L}$). $|\{\hat{\mathcal{A}} \setminus \gamma^{-1}(a)| \leq 2$, $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{A}}_1 \coprod \hat{\mathcal{A}}_2$, где $\mathcal{A} \in \hat{\mathcal{A}}_1$, $\overline{\mathcal{A}} \in \hat{\mathcal{A}}_2$, $\gamma(\mathcal{A}_2) = \{a\}$. Если $|\hat{\mathcal{A}}_2| > 1$, то $\Phi(b^*, a^*) > 1$ (будем для определенности считать, что существует $\mathcal{B} < \mathcal{A}$) и снова приходим к противоречию с условием IV. $\mathrm{eq} \geq 2$, $\mathrm{eq}^* \geq 2$ для ребра $\sigma =$ (b^*, a^*) $(\{a_2\} = X^-)$. Значит, $|\hat{\mathcal{A}}_2| = 1$. Если $|\hat{C}| \geq 3$, то $\mathrm{eq}(\sigma^*) \geq 3$, $\mathrm{eq}^*(\sigma, X) \geq 4$, $\mathrm{eq}(\sigma, X) \geq 1$. $|\hat{C}| \geq 1$ (из вида предкритических). Если $|\hat{C}| = 2$, то $|\hat{\mathcal{A}}_1| = 4$, $|\hat{\mathcal{A}}_1 \cap \gamma^{-1}(a)| \geq 2$, значит, есть $\overline{\overline{\mathcal{A}}} \subset \hat{\mathcal{A}}_1$, $\overline{\overline{a}}_2 > b^*$ (и $\overline{\overline{a}}_2 < \overline{b}^*$ при $\overline{\mathcal{B}} > \mathcal{A}$) и либо $\overline{\overline{a}}_2 = \overline{a}_1$ и $\Phi(\overline{a}_1) \geq 2$, либо $\overline{a}_2 \neq \overline{a}_1$ и $\Phi\{\overline{a}_1, \overline{a}_2\} \geq 2$. В обоих случаях положим $\{a_1, a_2\} = X^-$ и имеем $\Phi(X^-) \geq 2$, $\mathrm{eq}(\sigma, X) \geq 1$, $\mathrm{eq}(\sigma^*) = 2$, $\mathrm{eq}^*(X, \sigma) \geq 4$, $\mu \geq 4$.

Пусть теперь $\gamma(\hat{\mathcal{A}}) = \{a\}$. Тогда $\hat{\mathcal{A}}' \simeq \hat{\mathcal{A}}$. $\hat{C} \asymp \{a\}$ по предложению 8.1. Положим $a^*(\hat{C}) = \{(a^*, C) | C \in \hat{C}\}$ $((a^*, C) = (a^*, c_1, \dots, c_{n+1})$, где $C = (c_1, \dots$ $\dots, c_{n+1}))$.

$\mathcal{L} \simeq \hat{\mathcal{A}}' \coprod^{\asymp} a^*(\hat{C}) = \mathcal{L}_1$. $\mathcal{L}_1$ примитивно. Если $\mathcal{L}_1$ критическое, положим $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_1$. Если $\mathcal{L}_1$ не критическое, т. е. $\mathcal{L}_1 = (1, 2, 4)$, то рассмотрим $\hat{\mathcal{L}} =$ $= \mathcal{L} \cup \{(a^*, 0)\}$.

Ясно, что $\hat{\mathcal{L}}$ примитивно, поскольку $(a^*, 0) \asymp \hat{\mathcal{A}}'$ и $(a^*, 0) < a^*(\hat{C})$. Следовательно, $\hat{\mathcal{L}}$ имеет вид $(2, 2, 4)$, $(1, 3, 4)$ или $(1, 2, 5)$. Выберем в $\hat{\mathcal{L}}$

примитивное критическое $\mathcal{K}^1$. Если $\mathcal{K}^1$ не локально линейное, т. е. $\mathcal{A}' \asymp \overline{\mathcal{A}}$; $\gamma(\mathcal{A}') = \gamma(\overline{\mathcal{A}})$; $\overline{\mathcal{A}}, \mathcal{A}' \in \hat{\mathcal{A}}'$, то рассмотрим $\mathcal{K}^2 = (\mathcal{K}^1)^1$ и т. д. Ясно, что в результате получим локально линейное примитивное критическое $\mathcal{K}^r$.

***9.3.* Предложение.** *Если* $r(D) = 1$, *то* $D \not\supset \mathcal{K}$.

С учетом леммы и предложения 9.2 можно (в противном случае) считать, что $\mathcal{K}$ локально линейно. Далее, поскольку при $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, $w(\mathcal{K}^{\asymp}(\hat{\mathcal{A}})) > 1$, то $\mathcal{K} \in D_f$ (иначе противоречие с условием 1 и $w(C(D)) \geq 4$). Из лемм 1.7 и 8.1 следует, что $\mathcal{K} \overset{\alpha}{\subset} D_f$, что для примитивного $\mathcal{K}$ противоречит условию II, а для непримитивного $\mathcal{K}$ — условию III (см. пп. 4.1).

9.4. Если $\sigma = (a, b)$ — максимальное ребро в D, то через $D^-(\sigma)$ обозначим диадическое множество, полученное из D „удалением ребра σ" (т. е. $D^-(a, b) = (D^-(a, b), \leq, \varphi^-)$, где $(D^-(a, b), \leq) = (D, \leq)$, а $\varphi^-(x, y) = \varphi(x, y)$ при $(x, y) \notin \{(a, b), (a^*, b^*)\}$, $\varphi^-(a, b) = \varphi^-(a^*, b^*) = 1$). $C(D^-(a, b))$, как множество, совпадает с $C(D)$, но отношение порядка на $C(D^-(a, b))$ сильнее.

Подмножество $\mathcal{X} \subset C(D)$ назовем *точным*, если для каждого максимального ребра (a, b), $\mathcal{X} \supset \{\mathcal{F} \asymp \mathcal{G}\}$ и $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ сравнимы в $D^-(a, b)$.

Ребро $\sigma = (a, b)$ *$\mathcal{L}$-существенное* ($\mathcal{L} \subset C(D)$), если $\mathcal{L} \supset \{\mathcal{A} \asymp \mathcal{B}\}$.

Из леммы 9.1 следует такая лемма.

Лемма. *Если $\mathcal{L}$ локально линейно, $\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}} \in \mathcal{L}$, $\overline{\mathcal{A}} \asymp \overline{\mathcal{B}}$, но $\overline{\mathcal{A}} < \overline{\mathcal{B}}$ в $C(D^-(a, b))$, то либо (a, b), либо (a^*, b^*) $\mathcal{L}$-существенно.*

Предложение. *Если $\mathcal{K} \subset C(D)$, то существуют диадическое $\overline{D}$ (удовлетворяющее условиям I – VI), предкритическое $\overline{\mathcal{L}} \subset C(\overline{D})$ и максимальное $\mathcal{L}$-существенное ребро $\overline{\sigma}$ в $\overline{D}$.*

Очевидным образом можно („удаляя" последовательно некоторые максимальные ребра) построить $\overline{D}$, удовлетворяющее условиям I – VI, так что $\overline{\mathcal{K}}$ будет точным в $C(\overline{D})$ $((\overline{D}, \leq) = (D, \leq)$, $\overline{\mathcal{K}} \simeq \mathcal{K})$. Согласно предложению 9.3 $r(\overline{D}) > 1$. Пусть σ — максимальное ребро в $\overline{D}$. Из точности $\mathcal{K}$ следует, что $\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}} \in C(\overline{D})$, $\overline{\mathcal{A}} \asymp \overline{\mathcal{B}}$ и $\overline{\mathcal{A}} < \overline{\mathcal{B}}$ в $C(\overline{D}^-(\sigma))$.

Из леммы 9.2 следует, что $\overline{\mathcal{K}} \supset \overline{\mathcal{L}}$, где $\overline{\mathcal{L}}$ — предкритическое и $\overline{\mathcal{L}} \ni \overline{\mathcal{A}}$, $\overline{\mathcal{B}}$. Не ограничивая общности, можно считать $\overline{\mathcal{L}}$ локально линейным, поскольку в противном случае при „перестройке" не локально линейного $\overline{\mathcal{L}}$ в примитивное $\mathcal{K}^r$ (доказательство предложения 9.2) $\overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{\mathcal{B}}$ перейдут в $\overline{\mathcal{A}}_r \asymp \overline{\mathcal{B}}_r$ и $\overline{\mathcal{A}}_r < \overline{\mathcal{B}}_r$ в $C(\overline{D}^-(\sigma))$. В соответствии с леммой положим $\overline{\sigma} = (a, b)$ или $\overline{\sigma} = (a^*, b^*)$.

9.5. Пусть $u < v$ — две точки полосы $Y \subset D$. Положим $l(u, v) = |\{y \in Y \mid u < y < v\}|$, $\mathrm{eq}(u^*, v^*) = |D^{\asymp}(u^*, v^*)|$. Из леммы 4.5 следует, что $D^{\asymp}(u^*, v^*)$ — цепь в D_f ($D^{\asymp}(u, v) \subset D^{\asymp}(u', v')$), если $u \leq u'$, $v' \leq v$. Положим $C(u, v) = \{\mathcal{A} \in C(D) \mid u \leq a \leq v,\ a_2 \in \{0, 1\} \coprod D^{\asymp}(u^*, v^*)\}$.

Лемма. *Пусть $\mathcal{X}$ — примитивное локально линейное подмножество $C(D)$, $\mathcal{G} \in \mathcal{X}$, $\gamma(\mathcal{G}) = g$. Пусть далее $u \leq g \leq v$ и при $u < g$ (соответственно $g < v$) (ug) (соответственно (gv)) — $\mathcal{X}$-существенное ребро. Тогда $\mathcal{G} \in C(u, v)$.*

Пусть $\mathcal{G} = (g, g_2, \ldots) \in \mathcal{X}$, $g_2 \in D \setminus D^{\asymp}(u^*, v^*)$. Тогда $u^* < g_2$ или $g_2 < v^*$ (если $g_2 < u^*$ $(v^* < g_2)$, то $g_2 < g^*$ $(g^* < g_2)$). Пусть $u^* < g_2$, тогда $u^* < g^*$, $u \Rightarrow g$ — существенное ребро. Значит, $\mathcal{X} \supset \{ \mathcal{U} \asymp \overline{\mathcal{G}} \}$, $\gamma(\mathcal{U}) = u$, $\gamma(\overline{\mathcal{G}}) = g$. Но $\mathcal{U} < \mathcal{G}$ $(u^* < g_2)$. Имеем противоречие с локальной линейностью или примитивностью $\mathcal{X}$.

Предложение. *Если* $\mathcal{X}$ — *примитивное подмножество* $C(u, v)$, *то* $|\mathcal{X}| \leq \max\{ l(u, v), \mathrm{eq}\,(u^*, v^*) \} + 2$.

Справедливость утверждения следует из того, что если Z_1, Z_2 — цепи, то порядок примитивного подмножества в $Z_1 \times Z_2$ не превышает $\max(|Z_1|, |Z_2|)$.

9.6. С учетом предложений 9.1, 9.3, 9.4 нам осталось (для доказательства достаточности в теореме 4.4) доказать следующее утверждение.

Предложение. *Если* $\mathcal{L}$ — *примитивное точное локально линейное подмножество* $C(D)$ *и* σ — $\mathcal{L}$-*существенное максимальное ребро, то* $\mathcal{L}$ — *не предкритическое.*

(Точность, разумеется, не является существенным ограничением, поскольку если $\mathcal{L} \subset C(D)$, то $\mathcal{L}$ точное в $C(\overline{D})$, а все остальные условия сохраняются.)

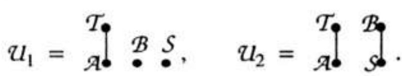
Далее будем считать, что $\mathcal{L}$ и $\sigma = (a, b)$ удовлетворяют условиям этого предложения. $\mathcal{L} = \hat{\mathcal{A}} \coprod^{\asymp} \hat{\mathcal{B}} \coprod^{\asymp} \hat{\mathcal{C}}$, где $\hat{\mathcal{A}} \ni \mathcal{A}$, $\hat{\mathcal{B}} \ni \mathcal{B}$, $\hat{\mathcal{C}} \neq \varnothing$. Отображение $\gamma: C(D) \to D$ (пп. 7.5) ограничим на $\mathcal{L}$.

10. Сведение к одной существенной полосе. ***10.1.*** Положим $L = \gamma(\mathcal{L})$, Y_σ — полоса в L, содержащая σ. В этом пункте докажем следующее предложение.

Предложение. *Если* η — $\mathcal{L}$-*существенное ребро и* η *не содержится в* Y_σ, *то* $\mathcal{L}$ *не предкритическое.*

Пусть $\eta = (s, t)$. $\mathcal{L} \supset \{ \mathcal{S}, \mathcal{T} \}$, $\mathcal{S} \asymp \mathcal{T}$, $\gamma(\mathcal{S}) = s$, $\gamma(\mathcal{T}) = t$. Заметим, прежде всего, что из примитивности $\mathcal{L}$ следует, что $a \asymp b$, $b \asymp t$ (например, при $a < s$, $\mathcal{A} < \{ \mathcal{S} \asymp \mathcal{T} \}$). Далее $\eta \not\subset Y_\sigma^*$. Действительно, пусть $a^* \leq s$, $t \leq b^*$ (σ максимально), тогда если $a < a^*$, то $a < s$; и если $a^* < a$, то $b^* < b$ и $t < b$. Теперь можно считать, что η максимальное, так как при $\eta \subset \overline{\eta}$, где $\overline{\eta}$ максимальное, можно (с учетом точности $\mathcal{L}$) выбрать $\overline{\eta}$ или $\overline{\eta}^*$ вместо η (с учетом леммы 9.4).

Если $\sigma \asymp \eta$, то имеем противоречие с леммой 4.5. Таким образом, имеется либо одно из сравнений $a \lhd t$, $s \lhd b$, либо оба $(a \asymp s$, $b \asymp t)$. Будем без ограничения общности считать, что $a \lhd t$. Таким образом, имеем два случая: $L = L_1 \supset U_1 = \{ s \Rightarrow t \rhd a \Rightarrow b \}$ и $L = L_2 \supset U_2 = \{ s \Rightarrow t \rhd a \Rightarrow b,\ s \lhd b \}$. Соответственно $\mathcal{L}_1 = \gamma^{-1}(L_1)$, $\mathcal{L}_2 = \gamma^{-1}(L_2)$. Будем рассматривать оба случая параллельно.



Положим $Z_1 = \mathcal{L}_1^{\asymp}(\mathcal{A}, \mathcal{T}) \setminus \{ \mathcal{B}, \mathcal{S} \}$, $Z_2 = \mathcal{L}_2^{\asymp}(\mathcal{U}_2)$.

Легко доказывается (с учетом лемм 4.5 и 9.5, максимальности σ и η, примитивной и локальной линейности $\mathcal{L}$) следующая лемма.

Лемма. $Z_1 = Z_1' \coprod Z_1''$, $Z_2 = Z_2' \coprod Z_2''$, *где если* $x \in \gamma(Z_1')$, то $x \asymp \{a, t\}$; *если* $y \in \gamma(Z_1'')$, *то* $y \asymp \{b, s\}$ *и при* $y = b$ (*соответственно* s) $\mathrm{eq}(a^*,$

$b^*) \neq 0$ (*соответственно* $\mathrm{eq}(s^*, t^*) \neq 0$); *если* $x \in \gamma(\mathcal{Z}_2'')$, *то* $x \asymp \{a, b, s, t\}$; *если* $y \in \gamma(\mathcal{Z}_2'')$, *то* $y \in \langle a, b\rangle$, $y \asymp \{s, t\}$, $\mathrm{eq}(a^*, b^*) \geq 1$ *или* $y \in \langle s, t\rangle$, $y \asymp \{a, b\}$, $\mathrm{eq}(s^*, t^*) \geq 1$.

$\mathcal{L}_1 \setminus (\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{Z}_1) = \mathcal{X}_1' \amalg \mathcal{X}_1'' = \mathcal{X}_1$, $\mathcal{L}_2 \setminus (\mathcal{U}_2 \cup \mathcal{Z}_2) = \mathcal{X}_2' \amalg \mathcal{X}_2'' = \mathcal{X}_2$, *где если* $z \in \gamma(\mathcal{X}_2')$ *или* $z \in \gamma(\mathcal{X}_1')$, *то* $a \lhd z \lhd t$; *если* $z \in \gamma(\mathcal{X}_1'')$, *то* $z \in \{a, t, \langle a, b\rangle, \langle s, t\rangle\}$; *если* $z \in \gamma(\mathcal{X}_2'')$, *то* $z \in \{a, b, s, t, \langle a, b\rangle, \langle s, t\rangle\}$, *причем в обоих случаях если* $z \in \{a, b\}$ (*соответственно* $z \in \{s, t\}$), *то* $\mathrm{eq}(a^*, b^*) \neq 0$ (*соответственно* $\mathrm{eq}(s^*, t^*) \neq 0$), *а если* $z \in \langle a, b\rangle$ (*соответственно* $z \in \langle s, t\rangle$), *то имеет место одно и только одно из сравнений* $z < t$, $s < z$ (*соответственно* $a < z$, $z < b$).

***10.2.* Лемма.** $|\mathcal{Z}_1| \leq 1$, $|\mathcal{Z}_2| \leq 1$.

Пусть $|\mathcal{Z}_1'| > 1$.

Пусть для определенности $\mathcal{G} \in \mathcal{Z}_1'$, $\gamma(\mathcal{G}) = g < b$, а значит, $g \lhd b$ (случай $g > s$ аналогичен). $\mathcal{Z}_1' \not\supset \{\mathcal{G}, \overline{\mathcal{G}} \mid \gamma(\overline{\mathcal{G}}) > s, \gamma(\mathcal{G}) < b\}$, поскольку из условия VI следовало бы $\gamma(\mathcal{G}) < \gamma(\overline{\mathcal{G}})$, что противоречит примитивности $\mathcal{L}$. $|\mathcal{Z}_1'| \leq \Phi(\gamma^{-1}(\mathcal{Z}_1'))$ (пп. 8.1). $\Phi(\gamma^{-1}(Z_1))$ противоречит условию II′ (замечание 4.5) $Z_1 = \gamma^{-1}(\mathcal{Z}_1')$, $Z_2 = \{a\}$, $Z_3 = \{s\}$, $\Phi(Z_i) \geq 2$, $i = 1, 2, 3$.

Пусть $|\mathcal{Z}_1''| > 1$. $\mathcal{Z}_1'' = (\mathcal{Z}_1'' \cap \hat{\mathcal{B}}) \amalg (\mathcal{Z}_1'' \cap \hat{\mathcal{S}})$ (пп. 9.6). $|\mathcal{Z}_1'' \cap \hat{\mathcal{B}}| \leq \mathrm{eq}(a^*, b^*)$; $|\mathcal{Z}_1'' \cap \hat{\mathcal{S}}| \leq \mathrm{eq}(s^*, t^*)$, $\mathrm{eq}(a^*, b^*) \leq 1$ и $\mathrm{eq}(s^*, t^*) \leq 1$ согласно условию $\mathrm{IV}_\varnothing$ ($\mathrm{eq}(a, b) \geq 2$, $\mathrm{eq}(s, t) \geq 2$). Поэтому $|\mathcal{Z}_1'' \cap \hat{\mathcal{B}}| \leq 1$ и $|\mathcal{Z}_1'' \cap \hat{\mathcal{S}}| \leq 1$. Значит, $|\mathcal{Z}_1'' \cap \hat{\mathcal{B}}| = |\mathcal{Z}_1'' \cap \hat{\mathcal{S}}| = 1$, что противоречит условию VI′ ($\mathrm{eq}(a^*, b^*) \geq 1$, $\mathrm{eq}(s^*, t^*) \geq 1$).

Случай $|\mathcal{Z}_1'| = |\mathcal{Z}_1''| = 1$ противоречит условию VI ($T^{\asymp}(a, t) \neq 0$ и либо $\mathrm{eq}(a^*, b^*) \neq 0$, либо $\mathrm{eq}(s^*, t^*) \neq 0$).

Пусть $|\mathcal{Z}_2'| > 1$. Противоречие с леммой 4.5 или условием II′ ($Z_1 = \mathcal{Z}_2'$, $Z_2 = \{a\}$, $Z_3 = \{s\}$).

Пусть $|\mathcal{Z}_2''| > 1$. Если $\mathcal{Z}_2'' \ni \mathcal{H}$, $\gamma(\mathcal{H}) = h$, $a \Rightarrow h \Rightarrow b$, то $\mathrm{eq}(a^*, b^*) \geq 1$ (лемма 10.1). Если $\mathrm{eq}(a^*, b^*) = 2$, то противоречие с условием IV ($\mathrm{eq}(a, h) = 2$, $\mathrm{eq}(a^*, h^*) \geq 2$). Если $\mathcal{Z}_2'' \supset \{\mathcal{H} < \overline{\mathcal{H}}\}: a \Rightarrow h \Rightarrow \overline{h} \Rightarrow b$, то противоречие с леммой 4.5 ($\{h, \overline{h}\} \asymp \{s, t\}$). Из $a \Rightarrow h_1 \Rightarrow b$ и $s \Rightarrow h_2 \Rightarrow t$, $h_1 < h_2$ следует $h_1 < t$.

Пусть $|\mathcal{Z}_2'| = |\mathcal{Z}_2''| = 1$. Тогда $l(s, t) = \mathrm{eq}(s, t) = 1$, $\mathrm{eq}(s^*, t^*) \geq 1$ или $l(a, b) = 1$, $\mathrm{eq}(a^*, b^*) \geq 1$ и $\mathrm{eq}(a, b) = 1$ (предложение 9.5), что противоречит условию IV′. Лемма доказана.

Обозначим через z_1', z_2', z_1'', z_2'' единственную точку соответственно в $\gamma(\mathcal{Z}_1')$, $\gamma(\mathcal{Z}_2')$, $\gamma(\mathcal{Z}_1'')$, $\gamma(\mathcal{Z}_2'')$. Из пп. 10.2 следует, что эти точки малые. Будем без ограничения общности (в силу двойственности) считать, что $s \lhd z_1'$, z_1'', $z_2'' \in \sigma$.

***10.3.* Лемма.** *Если* $\mathcal{Z}_1 \neq \varnothing$, *то* $\mathcal{X}_1' = \varnothing$, $|\mathcal{X}_1''| \leq 1$.

Пусть $\mathcal{Z}_1' \neq \varnothing$. Пусть $\mathcal{H} \in \mathcal{X}_1'$. $\gamma(\mathcal{H}) = h$, $a \lhd h \lhd t$ (лемма 10.1). Далее из условия II следует, что $\Phi(h) = 1$ (иначе $Z_1 = \{h\}$, $Z_2 = \{b\}$, $Z_3 = \{s\}$), $\Phi(Z_i) \geq 2$, $i = 1, 2, 3$. Если $h \in \{a, t\}$, то $\mathrm{eq}(a^*, b^*) \neq 0$ или $\mathrm{eq}(s^*, t^*) \neq 0$, что противоречит условию VI. Если $h \in \langle a, b\rangle$, то из леммы 4.5 следует, что $h < t$. Покажем, что еще одной $\overline{\mathcal{H}}$, $\gamma(\overline{\mathcal{H}}) \in \langle a, b\rangle$, нет. Если такая $\overline{\mathcal{H}}$ есть, то либо $l(a, b) = 2$, либо $\mathrm{eq}(a^*, b^*) \geq 2$ (предложение 9.5) (и $\mathrm{eq}(a, b) = 2$). Имеем противоречие с условием IV. Случай $h \in \langle s, t\rangle$ рассматривается аналогично.

Пусть $\mathcal{Z}_1'' \neq \varnothing$, $z_2'' = b$. В этом случае $\mathrm{eq}(a^*, b^*) \neq 0$. Пусть $\mathcal{H} \in \mathcal{X}_1'$, $a \lhd \gamma(\mathcal{H}) = h \lhd t$ (пп. 10.1). Тогда $\mathrm{eq}^*(\sigma, X = \{h\}) = 2$, $\mathrm{eq}(a, b) = 2$ — противоречие с условием IV. Если $h = a$, то $\mathrm{eq}(a^*, b^*) \geq 2$, и опять противоречие с условием IV. Если $h = t$ — противоречие с условием VI (так как $\mathrm{eq}(s^*, t^*) \neq 0$). Если $h \in \langle a, b\rangle$, то $l(a, b) = 1$, $\mathrm{eq}(a^*, b^*) = 1$. $\mathrm{eq}(a, b) = 2$ — противоречие с условием IV.

Возможно $h \in \langle s, t\rangle$, $a < h$. Если есть $\mathcal{A} < \mathcal{H} < \overline{\mathcal{H}} < \mathcal{T}$, то либо $l(s, t) = 2$, что противоречит условию $\mathrm{IV}_\varnothing$, поскольку $\mathrm{eq}(s, t) = 2$, либо $\mathrm{eq}(s^*, t^*) \neq 0$, что противоречит условию VI. Лемма доказана.

***10.4.* Лемма.** *Если* $\mathcal{Z}_2' \neq \varnothing$, *то* $|\mathcal{X}_2| \leq 1$; *если* $\mathcal{Z}_2'' \neq \varnothing$, *то* $\mathcal{X}_2 = \varnothing$.

Пусть $\mathcal{Z}_2' \neq \varnothing$. Из леммы 4.5 следует, что $l(a, b) = l(s, t) = 0$.

Пусть $\mathcal{H} \in \mathcal{X}_2'$, $\mathcal{A} < \mathcal{H} < \mathcal{T}$, $a \lhd h \lhd t$ (случай $s \lhd h \lhd b$ аналогичен). Если $\Phi(h) \geq 2$, то имеем противоречие с условием II: $Z_1 = \{h, t\}$, $Z_2 = \{s, b\}$, $Z_3 = \{g\}$, $\Phi(Z_1) \geq 3$, $\Phi(Z_2) \geq 3$. Аналогичным образом получаем противоречие с условием II, допуская кроме $\mathcal{H}$ наличие точки $\overline{\mathcal{H}}$, $\gamma(\overline{\mathcal{H}}) \in \{a, b, s, t\}$, что возможно при $\mathrm{eq}(a^*, b^*) \neq 0$, или $\mathrm{eq}(s^*, t^*) \neq 0$ (пп. 10.1).

Если $a \lhd h \lhd t$ и $s \lhd \overline{h} \lhd b$, то имеем противоречие с условием II: $Z_1 = \{h, t\}$, $Z_2 = \{\overline{h}, b\}$, $Z_3 = \{z_2'\}$, $\Phi(Z_1) \geq 3$, $\Phi(Z_2) \geq 3$.

Если $\gamma(\mathcal{H}) \in \{a, b, s, t\}$ (пусть для определенности $h = a$), то $\mathrm{eq}(a^*, b^*) \geq 1$ (пп. 10.1). Если $\mathrm{eq}(a^*, b^*) \geq 2$ или $\mathrm{eq}(a^*, b^*) = \mathrm{eq}(s^*, t^*) = 1$, аналогично предыдущему имеем противоречие с условием II. $a < h < b$ противоречит лемме 4.5: $(a, h) \asymp \{z_2' \asymp s\}$.

Пусть $\mathcal{Z}_2'' \neq \varnothing$ и $a \Rightarrow z_2'' \Rightarrow b$. Из пп. 10.1 следует $\mathrm{eq}(a^*, b^*) \geq 1$. Пусть $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}_2'$, $\gamma(\mathcal{H}) = h$ и для определенности $a \lhd h \lhd t$. Тогда $\mathrm{eq}(a, z_2'') \geq 2$, $\mathrm{eq}^*((a, g), X) \geq 2$, $X = \{h\}$, что противоречит условию IV.

Пусть $\mathcal{X}_2'' \ni \mathcal{H}$, $\gamma(\mathcal{H}) = h$. Предположим сначала, что $a \leq h \leq b$. Пусть для определенности $h \Rightarrow z_2''$ ($h = z_2''$ противоречит локальной линейности), тогда $h \lhd t$. Если $a \neq h$, то $\mathrm{eq}(a, z_2'') \neq 0$, $\mathrm{eq}\left(a^*, (z_2'')^*\right) \neq 0$, $l(a, z_2'') \neq 0$ — противоречие с условием IV. Если $a = h$, то ввиду $\mathcal{H} \asymp \{\mathcal{S}, \mathcal{B}\}$ должно быть $\mathrm{eq}(a^*, b^*) > 1$ (предложение 9.5), тогда $\mathrm{eq}(a, z_2'') > 1$, и $\mathrm{eq}\left(a^*, (z_2'')^*\right) > 1$, что противоречит условию IV.

Пусть $s < h < t$. Тогда если $a < h$, то $(z_2'', b) \asymp (h, t)$, если же $h < b$, то $(a, z_2'') \asymp (s, h)$, что в обоих случаях противоречит лемме 4.5 (если $a < h < b$, то $a \lhd h \lhd b$, пп. 3.5).

Если $h = s$ (случай $h = t$ аналогичен), то ввиду $\{\mathcal{H}, \mathcal{S}\} \asymp T$ $\mathrm{eq}(s^*, t^*) \neq 0$, что противоречит условию VI относительно ребер (a, z_2'') и (s, t) $\mathrm{eq}\left(a^*, (z_2'')^*\right) \neq 0$, $\mathrm{eq}(s^*, t^*) \neq 0$.

Следствие (из лемм 10.1, 10.3, 10.4). *Если* $\mathcal{Z}_1 \neq 0$ (*соответственно* $\mathcal{Z}_2 \neq 0$), *то* $|\mathcal{X}_1| \leq 1$ (*соответственно* $|\mathcal{X}_2| \leq 1$).

Предложение 10.1 следует из леммы 10.2, следствия 10.4 (и замечания 9.2).

Действительно, пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$ (пп. 10.1), тогда по лемме 10.2 $|\hat{\mathcal{B}}| + |\hat{\mathcal{S}}| \le 3$ ($|\hat{\mathcal{B}}| + |\hat{\mathcal{S}}| = 2 + |\mathcal{Z}_1|$). Если $|\hat{\mathcal{B}}| + |\hat{\mathcal{S}}| = 3$ (иначе $\mathcal{L}_1 = (1, 1, n)$), то $|\hat{\mathcal{A}}| < 4$ ($|\hat{\mathcal{A}}| = 2 + |\mathcal{X}_1|$). Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2$, $\mathcal{S} \ne \varnothing$, $|\hat{\mathcal{S}}| = 1$ (лемма 10.2); $|\hat{\mathcal{A}}| + |\hat{\mathcal{B}}| \le 5$ ($|\hat{\mathcal{A}}| + |\hat{\mathcal{B}}| = 4 + |\mathcal{X}_2|$).

11. Сведение к одному существенному ребру.

11.1. **Предложение.** *Если $\mathcal{L}$ — предкритическое, $x \in L \cap Y_\sigma$, то $a \le \le x \le b$.*

Предположим противное. Пусть $d \in L \cap Y_\sigma$, $d \notin \sigma$. Пусть для определенности $d > b$. Тогда $\mathcal{D} \in \mathcal{L}$, $\gamma(\mathcal{D}) = d$. $\mathcal{A} < \mathcal{D}$ (из-за максимальности σ), $\mathcal{B} \asymp \mathcal{D}$, $b \Rightarrow d$ (из-за примитивности). $\hat{\mathcal{A}} \subset \{\mathcal{A}, \mathcal{D}\}$, $\hat{\mathcal{B}} \supset \mathcal{B}$. Из $\mathcal{B} \asymp \{\mathcal{A}, \mathcal{D}\}$ следует, что $\mathcal{D}^{\asymp}\{a^*, b^*, d^*\} \ne \varnothing$. $\hat{C} = C' \coprod C''$, где $\gamma(C') \cap Y_\sigma = \varnothing$, $\gamma(C'') \subset \subset Y_\sigma$. $a < \gamma(C'') < b$ ввиду максимальности σ и локальной линейности $\mathcal{L}$.

Лемма. *Если $C' \ne \varnothing$, то $l(\sigma) = 0$, а значит, $C'' = \varnothing$.*

В противном случае $\mathrm{eq}(\sigma) > 0$, $\mathrm{eq}(\sigma^*) > 0$, $l(\sigma) > 0$ (см. условие IV).

11.2. Пусть $|C'| = 1$. Тогда $|\hat{\mathcal{B}}| \ne 1$ (иначе $\mathcal{L} = (1, 1, ?)$). $\hat{\mathcal{B}} \ni \overline{\mathcal{B}} \ne \mathcal{B}$, $\overline{b} = \gamma(\overline{\mathcal{B}}) \in Y_\sigma$ (иначе $\overline{\mathcal{B}} < \mathcal{D}$ или $\mathcal{A} < \overline{\mathcal{B}}$), значит, $a \le \overline{b} \le b$ ввиду максимальности σ, а ввиду $l(\sigma) = 0$ (лемма 11.1), $\overline{b} \in \{a, b\}$. $\overline{b} \ne a$, так как $a \lhd d$, а $\overline{\mathcal{B}} \asymp \mathcal{D}$, значит, $\overline{b} = b$. Положим $\hat{\mathcal{A}} \setminus \{\mathcal{A}, \mathcal{D}\} = \mathcal{A}' \coprod \mathcal{A}''$, где $\gamma(\mathcal{A}') \cap Y_\sigma = \varnothing$, а $\gamma(\mathcal{A}'') \subset Y_\sigma$. $\gamma(\mathcal{A}'') = a$, поскольку $\gamma(\mathcal{A}'') \ni b$ или $\gamma(\mathcal{A}'') \ni \ni d$ противоречит локальной линейности; при $\gamma(\mathcal{A}'') \cap \langle b, d \rangle \ne \varnothing$, $l > 0$, $\mathrm{eq} > > 0$, $\mathrm{eq}^* > 0$ для ребра (c, d). $(\hat{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}'') \coprod \hat{\mathcal{B}}$ удовлетворяет условиям леммы 9.5. Значит, из предложения 9.5 следует, что $|\mathcal{A}''| + |\hat{\mathcal{B}}| \le \mathrm{eq}(\sigma^*)$.

Если $\mathcal{L}$ — предкритическое, то $|\hat{\mathcal{A}}| + |\hat{\mathcal{B}}| = 6$ ($|\hat{C}| = 1$), т. е. $|\mathcal{A}'| + + |\mathcal{A}''| + |\hat{\mathcal{B}}| = 4$. Значит возможны случаи: 1) $\mathrm{eq}(\sigma^*) = 2$ и $|\mathcal{A}'| = 2$; 2) $\mathrm{eq}(\sigma^*) = 3$, $|\mathcal{A}'| = 1$; 3) $\mathrm{eq}(\sigma^*) = 4$. Во всех случаях получаем $\mathrm{eq}^*(\sigma, X) = 4$, где $X^- = \gamma(\mathcal{A}')$, и противоречие с условием IV относительно σ.

11.3. Пусть $|C'| > 1$. Тогда $|\hat{\mathcal{B}}| = 1$ — так как иначе, как в пп. 11.2, получаем $\mathrm{eq}(\sigma^*) > 1$ и поскольку $\mathrm{eq}(\sigma) > 1$ — противоречие с условием IV. Как и в пп. 11.2, $\gamma(\mathcal{A}'') = a$ (иначе $\mathrm{eq} \ge 1$, $\mathrm{eq}^* \ge 1$ для σ или (b, d), либо не локальная линейность). Тогда $|\hat{\mathcal{A}}| + |\hat{C}| = 6$ возможно при 1) $|C'| = 2$, $|\mathcal{A}'| = 2$, 2) $|C'| = 3$, $|\mathcal{A}'| = 1$, 3) $|C'| = 4$ и снова имеем противоречие с условием IV.

11.4. Пусть $C' = \varnothing$, $C'' \ne \varnothing$, $\gamma(C'') \ni x$, $a \Rightarrow x \Rightarrow b$. Легко видеть, что $\mathrm{eq}(\sigma^*) > 1$ ($\mathcal{B} \ne (b, 0)$), так как $\mathcal{B} \asymp \mathcal{D}$. $l(\sigma) = 1$ (иначе противоречие с условием IV, $l \ge 2$, $\mathrm{eq}(\sigma^*) \ge 2$); $x \Rightarrow d$ (так как $\mathcal{X} \asymp \mathcal{D}$). $\gamma(\mathcal{L}) \subset Y_\sigma$ (если $a \lhd z \asymp \{x, b, d\}$ или $d \rhd z \asymp \{a, x, b\}$, то имеем $l = 1$, $\mathrm{eq} = 1$, $\mathrm{eq}^* = 1$ для ребра σ или (x, d)). $L = \{a, x, b, d\}$, поскольку иначе $l(a, b) > 1$ или $l(x, d) > 1$ и получаем ребро ξ: $l(\xi) \ge 2$, $\mathrm{eq}(\xi^*) \ge 2$, $\mu \ge 4$.

Легко видеть, что $\mathcal{L} \subset C(a, d)$ (пп. 9.5). Действительно, если $a_2 \ne 0$, то $a_2 \asymp \{x^*, b^*\}$, и если $\mathcal{U} = (u, u_2, \ldots) \in \hat{\mathcal{B}} \cup \hat{C}$ и $u_2 \notin \{0, 1\}$ ($\hat{\mathcal{B}} \cup \hat{C} \ne (1, 1)$), то $\{a_2 \asymp u_2\} \asymp \{x^* \Rightarrow b^*\}$ — противоречие с леммой 4.5. Согласно предложению 9.5 и ввиду $|\mathcal{L}| \ge 6$ имеем $\mathrm{eq}(\sigma^*) \ge 4$ — противоречие с условием $\mathrm{IV}_\varnothing$ $(l = 1)$.

11.5. Следствие (из предложений 10.1 и 11.1). *$\mathcal{L} = \mathcal{L}' \coprod \mathcal{L}''$, где $a \le$*

$\leq \gamma(\mathcal{L}'') \leq b$ *при* $x \in \gamma(\mathcal{L}'')$ *и если* $\{C \asymp \mathcal{D}\} \subset \mathcal{L}$ *и* $\{C, \mathcal{D}\} \not\subset \mathcal{L}''$, *то* $\gamma(C) \asymp \gamma(\mathcal{D})$, *т. е. все* $\mathcal{L}$*-существенные ребра содержатся в* C.

Согласно условию IV $\mu(\mathrm{eq}(\sigma), \mathrm{eq}(\sigma^*), l(\sigma)) < 4$, значит, σ — либо короткое, либо неоснащенное, либо *конеоснащенное* $(l(\sigma^*) = 0)$. Эти случаи мы рассмотрим в пп. 12 – 14.

Положим $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}' \coprod \mathcal{A}''$, $\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B}' \coprod \mathcal{B}''$, $\hat{C} = C' \coprod C''$ $(\mathcal{A}' = \hat{\mathcal{A}} \cap \mathcal{L}'$, $\mathcal{A}'' = \hat{\mathcal{A}} \cap \mathcal{L}''$, $\mathcal{B}' = \hat{\mathcal{B}} \cap \mathcal{L}'$, $\mathcal{B}'' = \hat{\mathcal{B}} \cap \mathcal{L}''$, $C' = \hat{C} \cap \mathcal{L}'$, $C'' = \hat{C} \cap \mathcal{L}'')$; $A' = \gamma(\mathcal{A}')$, $A'' = \gamma(\mathcal{A}'')$, $B' = \gamma(\mathcal{B}')$, $B'' = \gamma(\mathcal{B}'')$, $C' = \gamma(C')$, $C'' = \gamma(C'')$.

12. Случай короткого ребра. Пусть $l(\sigma) = 0$. $\mathcal{L}$ — предкритическое. Из локальной линейности $C'' = \varnothing$.

12.1. Покажем прежде всего, что $|\mathcal{A}'| < 3$. Действительно, в противном случае $|\mathcal{A}| = 4$, $|\mathcal{B}| = 2$ или $|C| = 2$. Положим $Z_1 = \gamma(\mathcal{A}')$, $Z_2 = \gamma(C)$, $Z_3 = \gamma(\mathcal{B})$. По следствию 11.5 $Z_1 \coprod \asymp Z_2 \coprod \asymp Z_3$. $\Phi(Z_1) \geq 3$; если $|\mathcal{B}| = 2$, то и $\Phi(Z_3) \geq 1$, а если $|C| = 2$, то $\Phi(Z_2) \geq 2$ и $\Phi(Z_3) \geq 1$. Противоречие с условием II. Аналогично $|\mathcal{B}'| < 3$.

12.2. Построим $X = Z^- \coprod Z^+ \coprod Z^e$, где $Z^- = \gamma(\mathcal{A}')$, $Z^+ = \gamma(\mathcal{B}')$, $Z^e = \gamma(C)$. X окаймляет σ (пп. 11.5). $|\mathcal{L}| = |\mathcal{A}'| + |\mathcal{B}'| + |C'| + |\mathcal{L}''|$. Согласно пп. 9.5 $\mathcal{L}'' \leq \mathrm{eq}(\sigma^*) + 2$. $|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{A}'| + |\mathcal{B}'| + |C| + \mathrm{eq}(\sigma^*) + 2$. $\Phi(Z^-) \geq |\mathcal{A}'|$, $\Phi(Z^+) \geq |\mathcal{B}'|$, $\Phi(Z^e) \geq C$.

С учетом пп. 12.1 $\mathrm{eq}^*(\sigma) = \Phi(Z^-) + \Phi(Z^+) + \mathrm{eq}(\sigma^*)$, значит, $|\mathcal{L}| - 2 \leq \mathrm{eq}^*(\sigma) + C$.

12.3. Пусть $|C| = 1$, тогда $|\mathcal{L}| = 7$, $\mathrm{eq}^*(\sigma) = 4$ $(\mathrm{eq}(\sigma) \geq 1)$.

12.4. Пусть $|C| = 2$, тогда $|\mathcal{L}| = 6$, $\mathrm{eq}^*(\sigma) \geq 2$ $(\mathrm{eq}(\sigma) \geq 2)$.

12.5. Пусть $|C| = 3$, тогда $|\mathcal{L}| = 7$, $\mathrm{eq}^*(\sigma) \geq 2$ $(\mathrm{eq}(\sigma) \geq 2)$.

12.6. Пусть $|C| = 4$, тогда $|\mathcal{L}| = 7$, $\mathrm{eq}^*(\sigma) \geq 1$ $(\mathrm{eq}(\sigma) \geq 4)$.

Во всех случаях имеем противоречие с условием IV$'$.

13. Случай конеоснащенного ребра. $l(\sigma) > 0$ (см. п. 12), $\mathrm{eq}(\sigma^*) = \varnothing$. Тогда $C'' = \varnothing$. $C' \neq \varnothing$, $C' \ni (c, \dots)$, $\mathrm{eq}(\sigma) \neq 0$.

13.1. Предположим сначала, что $\mathcal{L} \ni \mathcal{X} = (x_1, x_2, \dots)$, где $x_2 \in D$ (т. е. $x_2 \notin \{0, 1\}$). Из $\mathrm{eq}(\sigma^*) = 0$ следует, что $a^* \lhd x_2$ или $x_2 \lhd b^*$. Пусть для определенности $x_2 \lhd b^*$, тогда $a^* \asymp x_2$. $\mathcal{X} \in \mathcal{B}''$, $x \neq a$ из=за локальной линейности, $a \Rightarrow x$, $l(a, x) = 0$, так как $\mathrm{eq}(a, x) \neq 0$, $\mathrm{eq}(a^*, x^*) \neq 0$ $(x_2 \asymp \{a^*, x^*\})$. Покажем, что $|\hat{\mathcal{A}}| = 1$, т. е. $\hat{\mathcal{A}} = \{(a, 1)\}$. Пусть $Y = (y, y_2, \dots) \in \mathcal{A}''$ и $Y \neq (a, 1)$. Если $y = a$, то $y_2 \in D^{\asymp}(a^*, b^*) = \varnothing$, значит, $x < y$ $(x \neq y$ из-за локальной линейности) и ввиду $Y \asymp \mathcal{X}$ $y_2 < x_2$ (лемма 9.1). Но тогда $y_2 < b^*$, $Y < \mathcal{B}$, что противоречит $\hat{\mathcal{A}} \asymp \hat{\mathcal{B}}$.

Пусть $Z = (z, \dots) \in \mathcal{A}'$, $a \lhd z$, но $x \asymp z$ $(\mathcal{X} \in \hat{\mathcal{B}})$, тогда $\{z, c\} \asymp \{x \Rightarrow b\}$ и $z \asymp c$, поскольку $\hat{\mathcal{A}} \asymp \hat{C}$ — противоречие с леммой 4.5. Итак, $|\hat{\mathcal{A}}| = 1$, тогда $|\hat{C}| > 1$ $(\mathcal{L} \neq (1, 1, ?))$, т. е. $\mathrm{eq}(\sigma) \geq 2$. Имеем $l(\sigma) = 1$. $\gamma(\mathcal{L}' \setminus \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}) = x$. Покажем, что $|\hat{\mathcal{B}}| = 2$, т. е. $\hat{\mathcal{B}} = \{(b, 0)(x, x_2, \dots)\}$. Если $\overline{\mathcal{B}} = (b, b_2, \dots) \in \mathcal{B}''$, то $\overline{b} = b$ противоречит $\mathrm{eq}(\sigma^*) = 0$ (иначе $b_2 \asymp (a^*, b^*)$), $\overline{a} = a$ противоречит локальной линейности, а при $\overline{b} = x$, $\overline{b} \neq x_2$ или $\overline{b}_2 = x_2$ и $\Phi(x_2) > 1$ получаем $\mathrm{eq}^*(ax) \geq 2$ (и $\mathrm{eq}(ax) \geq 2$). Если же $\overline{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}'$, то $\overline{b} < b$, и получаем $\mathrm{eq}((ax),$

$X) \geq 2$, $\mathrm{eq}^*((ax), X) \geq 2$ ($Z^+ = \{\bar{b}\}$, $\mathrm{eq}(a^*, x^*) \geq 1$). Итак, $|\hat{\mathcal{B}}| = 2$. Если же $|C| = |C'| > 2$, то имеем $X(a^*, b^*) = Z^+ = \{x_2\}$, $l(\sigma^*) = 1$ и $\mathrm{eq}^*(\sigma^*) = 4$.

13.2. Итак, $\mathcal{L}'' \subset C(a, d)$ (т. е. $\mathcal{L}'' \in (x, \varepsilon)$, где $\varepsilon \in \{0, 1\}$). Значит, $a \leq x < y \leq b$ ($l(x, y) = 0$), $\mathcal{A}'' = \{(u, 1) \mid a \leq u \leq x\}$, $\mathcal{B}'' = \{(v, 0) \mid y \leq v \leq b\}$.

Для определенности будем считать, что $a < x$ (случай $y < b$ аналогичен, а $a = x$, $b = y$ невозможно из-за $l(\sigma) \neq 0$). Тогда $\mathcal{B}' = \varnothing$ по лемме 4.5 ($(a, x) \asymp (c, \bar{b})$, где $c \in \gamma(C)$, $\bar{b} \in \gamma(\mathcal{B}_1)$).

13.3. Пусть $|C| = 1$, тогда $|\mathcal{B}| > 1$, $y \neq b$, $\mathcal{A}' = \varnothing$ (см. пп. 13.2). Если $\mathcal{L}$ предкритическое, то $|\mathcal{L}| \geq 7$, $|\mathcal{A}'| + |\mathcal{B}'| \geq 6$, т. е. $l(\sigma) \geq 4$ (и $\mathrm{eq}(\sigma) \neq 0$).

13.4. Пусть $|C| \geq 2$. Тогда $l(\sigma) \leq 2$, $y = b$, $|\mathcal{B}| = 1$, $|\mathcal{A}''| = 2$, $|\mathcal{L}| \geq 7$ (если $\mathcal{L}$ предкритическое) $|C| + |\mathcal{A}'| \geq 4$. При $|C| = 2$, $|\mathcal{A}'| \geq 2$ строим X для (a, x): $Z^e = \gamma(C)$, $Z^+ = \gamma(\mathcal{A}')$, $l = 0$, $\mathrm{eq} = 2$, $\mathrm{eq}^* = 2$. При $|C| \geq 4$ имеем $l(\sigma) = 1$, $\mathrm{eq}(\sigma) \geq \geq 4$.

Наконец, при $|C| = 3$, $|\mathcal{A}'| \geq 1$ имеем противоречие с условием V$'$.

14. Случай неоснащенного ребра. $l(\sigma) \geq 1$, $\mathrm{eq}(\sigma^*) \geq 1$, $\min\{l(\sigma), \mathrm{eq}(\sigma^*)\} = 1$ ($\mathrm{IV}_\varnothing$), $\mathrm{eq}(\sigma) = 0$, $a < c < b$, $\hat{C} \ni (c, t, \ldots)$, $t \asymp \{a^*, b^*\}$.

14.1. $l(\sigma) = \mathrm{eq}(\sigma^*) = 1$, $\hat{C} = \{(c, t)\}$, $t \notin \mathring{D}$, $|\hat{C}| = 1$, $\mathcal{A}'' = \{(a, 1)\}$, $\mathcal{B}'' = \{(b, 0)\}$ (пп. 9.5). $A' \asymp \{b, c\}$, $B' \asymp \{a, c\}$, $A' \asymp B'$ (пп. 11.5). Таким образом, $X = A' \coprod B'$ можно рассматривать как окаймляющее множество и для (ac) ($A' = Z^-$, $B' = Z^e$) и для (cb) ($A' = Z^e$, $B' = Z^+$). $\Phi(A') \geq |\mathcal{A}'| = |\hat{\mathcal{A}}| - 1$, $\Phi(B') \geq |\mathcal{B}'| = |\hat{\mathcal{B}}| - 1$, $|\hat{\mathcal{A}}| = |\hat{\mathcal{B}}| = 6$ (если $\mathcal{L}$ предкритическое) $\Phi(A') + \Phi(B') \geq 4$. Выбирая одно из ребер (ac) и (cb), можем считать, что $\Phi(Z^e) \geq \Phi(Z^-)$ и $\Phi(Z^e) + \Phi(Z^-) \geq 4$ или $\Phi(Z^e) \geq \Phi(Z^+)$ и $\Phi(Z^e) + \Phi(Z^+) \geq 4$, т. е. $\Phi(Z^e) \geq 2$ и $\max\{\Phi(Z^+), \Phi(Z^-)\} \geq 4 - \Phi(Z^e)$, что приводит к противоречию с условием IV для (ac) или (cb).

14.2. $l(\sigma) = 1$, $\mathrm{eq}(\sigma^*) > 1$. $\gamma(\mathcal{A}'') = \{a\}$, $\gamma(\mathcal{B}'') = \{b\}$, $\gamma(C'') = \{c\}$, $|\mathcal{L}''| \leq 2 + \mathrm{eq}(\sigma^*)$ (пп. 9.5), $|\mathcal{L}''| + |\mathcal{L}'| \geq 6$, следовательно, $|\mathcal{L}'| + \mathrm{eq}(\sigma^*) \geq 4$. $\mathcal{L}' = \mathcal{A}' \coprod \mathcal{B}'$ ($C' = \varnothing$), $|\mathcal{L}'| = \Phi(Z^-) + \Phi(Z^+)$, $\Phi(Z^-) + \Phi(Z^+) + \mathrm{eq}(\sigma^*) \geq 4$, если $Z^- \neq \varnothing$, $Z^+ \neq \varnothing$, то имеем противоречие с условием $\mathrm{IV}_\varnothing$ ($l = 1$), а если $\Phi(Z') \geq 2$, то $\mathrm{eq}(c, b) \geq 2$, $\mathrm{eq}(c^*, b^*) \geq 2$, и $\mu(c \Rightarrow b) \geq 4$.

14.3. $l(\sigma) > 1$, $\mathrm{eq}(\sigma^*) = 1$, $|\hat{C}| = 1$. Пусть сначала $l(a, c) = 0$ (случай $l(c, b) = 0$ аналогичен), $l(c, b) > 0$. $|\mathcal{A}''| = 1$ ввиду $\mathrm{eq}(\sigma^*) = 1$, и $\mathcal{A}' = \varnothing$, так как при $z \in \mathcal{A}'$ $z \asymp \{b, c\}$ и имеем $l(c, b) \neq 0$, $\mathrm{eq}(c, b) \neq 0$, $\mathrm{eq}(c^*, b^*) \neq 0$. Пусть теперь $l(a, c) \neq 0$, $l(c, b) \neq 0$. Пусть $|\hat{\mathcal{A}}| > 1$. $\mathcal{A}'$, по-прежнему, пусто. Пусть $\mathcal{A}'' \ni \mathcal{X} = (x, x_2, \ldots)$, $x \neq a$ из-за $\mathrm{eq}(\sigma^*) = 1$. $\mathcal{X} \asymp \{C, \mathcal{B}\}$, $x_2 \asymp \{c^*, b^*\}$, $a^* < x_2$, $(t, x_2) \asymp \{c^* \Rightarrow b^*\}$, значит, t и x_2 сравнимы (лемма 4.5), $t < x_2$ (если $x_2 < t$, то $a < t$). Поэтому $x < c$ (иначе $(c, t) < \mathcal{X}$). Но $l(x, b) \geq 2$ ($x < c$, $l(c, b) \neq 0$) и $\mathrm{eq}(x^*, b^*) \geq 2$ ($(t, x_2) \asymp (x^*, b^*)$) — противоречие с условием $\mathrm{IV}_\varnothing$.

Предложение 9.6 и теорема 4.4 доказаны.

Замечание. Назовем вектроид *матрично конечным*, если $|\mathrm{Is}^{m \times n}| < \infty$ при любых m и n. Ясно, что из конечной представимости следует матричная конечность. Применяя лемму Габриеля, мы фактически пользовались тем, что для чум эти два понятия совпадают [11]. С другой стороны, везде, где мы доказывали бесконечную представимость, мы в действительности доказывали и матричную бесконечность. Таким образом, из наших рассмотрений следует, что эти два понятия совпадают и для вектроидов размерности 2.

1. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления и формы слабо пополненных чум // Линейная алгебра и теория представлений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 19 – 54.
2. *Nazarova L. A., Roiter A. V.* Representations of bipartite completed posets // Comment. math. helv. – 1988. – **63**. – P. 498 – 526.
3. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления биинволютивных чум I. – Киев, 1991. – 31 с. – (Препринт / АН УССР; Ин-т математики).
4. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления биинволютивных чум II. – Киев, 1994. – 72 с. – (Препринт / НАН Украины; Ин-т математики).
5. *Guidon T.* Representations of dyadic. Sets 2: Diss. Univ. Zürich. – 1996. – P. 1 – 47.
6. *Hassler U.* Representations of dyadic. Sets 1: Diss. Univ. Zürich. – 1996. – P. 1 – 62.
7. *Guidon T., Hassler U., Nazarova L. A., Roiter A. V.* Two representation algorithms for dyadic sets // Comptes-Rendus Acad. Sci. Paris. Ser. I. – 1996. – **322**. – P. 915 – 920.
8. *Guidon T., Hassler U., Nazarova L. A., Roiter A. V.* Dyadic sets S: a dichotomy for indecomposable S-matrices // Ibid. – 1997. – **324**. – P. 1205 – 1210.
9. *Roiter A. V., Belousov K. I., Nazarova L. A.* Representation of finitely represented dyadic sets // Proc. ICRA VIII – Canadian Math. Soc. Conf. Proc. – 1998. – P. 61 – 76.
10. *Gabriel P., Roiter A. V.* Representations of finite-dimensional algebras // Encyclopedia Math. Sci. Algebra. – 1992. – **73**. – 177 p.
11. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – **28**. – С. 5 – 31.
12. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen I // Manuscr. math. – 1972. – **6**. – P. 71 – 103.
13. *Басс X.* Алгебраическая K-теория. – М.: Мир, 1973. – 592 с.
14. *Белоусов К. И., Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В.* Элементарные и мультиэлементарные представления вектроидов // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 11. – С. 5 – 31.
15. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Категорные матричные задачи и проблема Брауэра–Трелла. – Киев: Наук. думка, 1973. – 98 с.
16. *Ringel C. M.* Tame algebras and integral quadranic forms // Sect. Notes Math. – 1984. – **1099**.
17. *Gabriel P., Nazarova L. A., Roiter A. V., Sergeichuk V. V., Vossieck D.* Tame and wild subspace problems // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 3. – С. 313 – 352.
18. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – **28**. – С. 32 – 41.
19. *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра. – М.: Физматгиз, 1962. – 516 с.

Получено 01.06.99