УДК 519.21

Ю. В. Козаченко, О. О. Курченко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ГАУССІВСЬКИХ ОДНОРІДНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

On the basis of limit theorem for quadratic variation, we construct a consistent estimate for parameters of the Gaussian homogeneous random field of certain class. Wee find confidence ellipsoids for the estimates of this sort.

На основі граничної теореми для квадратичної варіації побудовано слушну оцінку для параметрів гауссівського однорідного поля певного класу. Знайдено еліпсоїди надійності для таких оцінок.

Вступ. У 1940 р. П. Леві [1] довів, що для стандартного броунівського руху $\{w(t)\colon t\in[0,1]\}$ сума квадратів приростів прямує у середньому квадратичному (а при додаткових умовах і майже напевне) до одиниці за умови, що діаметр розбиття відрізка $[0,1]$ прямує до нуля. Бакстер [2] узагальнив цей результат для широкого класу гауссівських випадкових процесів. Такі граничні теореми називають тепер бакстерівськими теоремами або теоремами Леві – Бакстера. Для випадкових процесів і полів ці теореми доводились багатьма авторами.

У статті [3] О. П. Бесклінська та Р. Є. Майборода на основі теореми Леві – Бакстера побудували статистичну оцінку параметра гауссівського стаціонарного випадкового процесу, вказали інтервали надійності та дослідили асимптотику їх кінців. У даній роботі за допомогою теореми бакстерівського типу побудовано слушні оцінки параметрів гауссівських однорідних випадкових полів певного класу. Знайдено еліпсоїди надійності для таких оцінок.

Координатні квадратичні варіації гауссівського випадкового поля. Нехай $X(t)$, $t=(t_1,t_2,\ldots,t_m)\in R^m$, — гауссівське однорідне випадкове поле з нульовим математичним сподіванням і кореляційною функцією $r(t)=\mathrm{E}X(0)\times$ $\times X(t)$. Для рівномірного розбиття $\lambda_n=\{0,1/a_n,\ldots,(a_n-1)/a_n,1\}$ з кроком $1/a_n$ відрізка $[0,1]$ j-ї координатної осі, $1\le j\le m$, розглянемо прирости

$$\Delta_j X_{k,n} = X(t^j_{k+1,n}) - X(t^j_{k,n}),$$

де $t^j_{k,n}=(0,\ldots,0,k/a_n,0,\ldots,0)$ — вектор, який лежить на j-й координатній осі, $0\le k\le a_n-1$, a_n — натуральне число, $n\ge 1$. Розглянемо суму квадратів приростів

$$S_{j,n} = \sum_{k=0}^{a_n-1}(\Delta_j X_{k,n})^2, \quad n\ge 1, \quad 1\le j\le m. \tag{1}$$

Виявляється, що при деяких умовах на кореляційну функцію гауссівського однорідного випадкового поля X послідовність випадкових величин $\{S_{j,n}: n\ge$ $\ge 1\}$, $1\le j\le m$, збігається у середньому квадратичному до детермінованої сталої $C_j\ge 0$ при $a_n\to\infty$. Якщо послідовність $\{a_n: n\ge 1\}$ прямує до нескінченності достатньо швидко, то ця збіжність послідовності $\{S_{j,n}: n\ge 1\}$ має місце майже напевне.

Нехай кореляційна функція $r(t)$, $t\in R^m$, гауссівського однорідного випадкового поля X неперервна на одиничному m-вимірному кубі $[0,1]^m$, двічі неперервно диференційовна за j-ю змінною при $t_j\ne 0$, причому частинні похідні другого порядку за j-ю змінною обмежені сталою M, $1\le j\le m$. З формули Тейлора та критерію Коші існування границі функції в точці випливає існування односторонніх границь

$$d_j = \lim_{t_j \to 0+} D_j r(0, \ldots, 0, t_j, 0, \ldots, 0), \quad 1 \le j \le m. \tag{2}$$

Покладемо

$$C_j = -2 d_j, \quad 1 \le j \le m. \tag{3}$$

Зауважимо, що $\{X(0, \ldots, 0, t_j, 0, \ldots, 0)\colon t_j \in R\}$ — гауссівський стаціонарний випадковий процес. З теореми 1 статті [4] випливає наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $X(t)$, $t \in R^m$, — гауссівське однорідне випадкове поле з нульовим математичним сподіванням, кореляційною функцією $r \in C([0, 1]^m)$ і виконуються наступні умови:* 1) *кореляційна функція двічі неперервно диференційовна за змінною t_j при $t_j \ne 0$, причому* $\sup\{D_{jj} r(t) : t \in [0, 1]^m,\ t_j \ne 0\} = M < \infty$, $1 \le j \le m$; 2) $a_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

Тоді для довільного j, $1 \le j \le m$,

$$S_{j,n} \to C_j \tag{4}$$

у середньому квадратичному при $n \to \infty$, де сталі C_j визначені співвідношеннями (2), (3).

Зауваження. Якщо ряд з загальним членом $1/a_n$ збіжний, то збіжність у (4) має місце майже напевне. Це випливає із співвідношення $\operatorname{Var} S_{j,n} = O(1/a_n)$ та леми Бореля – Кантеллі.

Постановка задачі оцінювання параметрів. Нехай кореляційна функція $r(t)$, $t \in R^m$, гауссівського однорідного випадкового поля $X(t)$, $t \in R^m$, з нульовим середнім задовольняє умови теореми 1. Тоді, як неважко переконатися, для довільного j, $1 \le j \le m$, виконується нерівність

$$\left| r(t^{(j)}) - r(0) + \beta_j t_j \right| \le M t_j^2,$$

де $\beta_j = -d_j$, $t^{(j)} = (0, \ldots, 0, t_j, 0, \ldots, 0)$, $0 \le t_j \le 1$.

Для оцінювання параметра $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)^t$ (тут і далі верхній індекс t означає транспонування) за спостереженнями гауссівського однорідного випадкового поля $X(\ )$ у точках вигляду $k/2^n$, $0 \le k \le 2^n$, $n \ge 1$, координатних осей одиничного m-вимірного куба $[0, 1]^m$ застосуємо теорему 1 при $a_n = n$. Розглянемо статистику

$$\beta_n = 0{,}5\,(S_{1,n}, S_{2,n}, \ldots, S_{m,n})^t, \quad n \ge 1, \tag{5}$$

де випадкові величини $S_{j,n}$, $1 \le j \le n$, визначені рівністю (1). Якщо кореляційна функція $r(t)$, $t \in R^m$, гауссівського однорідного випадкового поля задовольняє умови теореми 1, то $C_j = 2\beta_j$, $1 \le j \le m$, і тому на підставі цієї теореми $\beta_n \to \beta$ у середньому квадратичному при $n \to \infty$. Отже, β_n — слушна у середньому квадратичному оцінка параметра β.

Лема 1. *Нехай кореляційна функція $r(t)$, $t \in R^m$, гауссівського однорідного випадкового поля задовольняє умови теореми 1. Тоді для довільного j, $1 \le j \le m$, виконуються нерівності*

$$\left| \beta_j - \mathrm{E}\beta_{j,n} \right| \le M/n, \tag{6}$$

$$\operatorname{Var} \beta_{j,n} \le \left(6(\beta_j + M/n)^2 + M^2/(2n)\right)/n. \tag{7}$$

Доведення. Символом $t_n^{(j)}$ позначимо вектор $(0, \ldots, 0, 1/n, 0, \ldots, 0) \in R^m$, в якому j-та координата дорівнює $1/n$. Маємо

$$\left|\beta_j - \mathrm{E}\beta_{j,n}\right| = \left|0{,}5\mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_j X_{k,n})^2 - \beta_j\right)\right| =$$

$$= \left|n\left(r(0) - r(t_n^{(j)})\right) - \beta_j\right| = n\left|r(0) - r(t_n^{(j)}) - \beta_j/n\right| \le M/n.$$

Для математичного сподівання добутку випадкових величин $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, які мають сумісний гауссівський розподіл з нульовим математичним сподіванням, справедлива формула [5, с. 29]

$$\mathrm{E}(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4) = \mathrm{E}\eta_1\eta_2\mathrm{E}\eta_3\eta_4 + \mathrm{E}\eta_1\eta_3\mathrm{E}\eta_2\eta_4 + \mathrm{E}\eta_1\eta_4\mathrm{E}\eta_2\eta_3. \tag{8}$$

Застосуємо цю формулу при $\eta_1 = \eta_2 = \Delta_j X_{k,n}$, $\eta_3 = \eta_4 = \Delta_j X_{l,n}$, $0 \le k$, $l \le n - 1$. Маємо

$$\mathrm{Var}\,\beta_{j,n} = \mathrm{E}\left(\beta_{j,n} - \mathrm{E}\beta_{j,n}\right)^2 = \mathrm{E}\beta_{j,n}^2 - (\mathrm{E}\beta_{j,n})^2 =$$

$$= 0{,}5\sum_{k,l=0}^{n-1}\left(\mathrm{E}\,(\Delta_j X_{k,n}\Delta_j X_{l,n})\right)^2.$$

Цю суму розіб'ємо на дві суми Σ_1 і Σ_2. До першої суми Σ_1 ввійдуть доданки, для яких $|k - l| \le 1$, а до суми Σ_2 — всі останні доданки. Число доданків першої суми Σ_1 не перевищує $3n$ і тому

$$\Sigma_1 = 0{,}5\sum_{k,l=0,\,|k-l|\le 1}^{n-1}\left(\mathrm{E}\,(\Delta_j X_{k,n}\Delta_j X_{l,n})\right)^2 \le$$

$$\le 0{,}5\sum_{k,l=0,\,|k-l|\le 1}^{n-1}\mathrm{E}\,(\Delta_j X_{k,n})^2\,\mathrm{E}\,(\Delta_j X_{l,n})^2 =$$

$$= 0{,}5\sum_{k,l=0,\,|k-l|\le 1}^{n-1} 2\left(r(0) - r(t_n^{(j)})\right)^2 \le 6(\beta_j + M/n)^2/n.$$

Далі,

$$\Sigma_2 = 0{,}5\sum_{k,l=0,\,|k-l|>1}^{n-1}\left(\mathrm{E}\,(\Delta_j X_{k,n}\Delta_j X_{l,n})\right)^2 =$$

$$= 0{,}5\sum_{k,l=0,\,|k-l|>1}^{n-1}\left(2r\left((k-l)t_n^{(j)}\right) - r\left((k-l+1)t_n^{(j)}\right) - \right.$$

$$\left. - r\left((k-l-1)\,t_n^{(j)}\right)\right)^2 \le 0{,}5\,(M/n)^2.$$

З нерівностей для Σ_1 і Σ_2 випливає оцінка (7). Лему доведено.

Оцінка розподілу квадратичної форми від квадратично гауссівських випадкових величин. У роботі [6] наведено наступне означення квадратично гауссівського випадкового вектора.

Означення. *Випадковий вектор* $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)^t$ *називається квадратично гауссівським, якщо його компоненти* ζ_i, $1 \le i \le m$, *можна подати у вигляді*

$$\zeta_i = \eta^t B_i \eta - \mathrm{E}(\eta^t B_i \eta), \tag{9}$$

де η — d*-вимірний гауссівський випадковий вектор,* B_i — *симетрична матриця розміру* $d \times d$, *або компоненти вектора* ζ *є границями у середньому квадратичному випадкових величин вигляду* (9).

Відмітимо, що статистика β_n є квадратично гауссівським m-вимірним вектором.

У роботі [6] отримано наступну оцінку для розподілу квадратичної форми від квадратично гауссівських випадкових величин.

Лема 2. *Нехай* $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)^t$ — *квадратично гауссівський вектор,* B — *симетрична додатно визначена матриця розміру* $m \times m$, $\eta = \zeta^t B \zeta$. *Тоді для довільного* $x > 2$ *виконується нерівність*

$$P\{\eta/(\mathrm{E}\eta) > x\} \le W(x),$$

де

$$W(x) = (e/4)^{1/8} x^{1/4} \left((x/2)^{1/2} - 1\right) / \operatorname{sh}\left((x/2)^{1/2} - 1\right).$$

Оцінювання параметра β. Еліпсоїди надійності. Нехай K — деяка додатна стала, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)^t \in [0, K]^m$ — параметр, який входить до кореляційної функції $r(\ )$ гауссівського однорідного випадкового поля X. Оцінка $\beta_n = 0{,}5\,(S_{1,n}, S_{2,n}, \ldots, S_{m,n})^t$ — слушна у середньому квадратичному оцінка параметра β. Покладемо $Y_n = \beta_n - \mathrm{E}\beta_n$. Випадковий вектор Y_n — квадратично гауссівський. Нехай далі C — симетрична додатно визначена матриця розміру $m \times m$, $\eta_n = Y_n^t C Y_n$. На підставі леми 2 при $x > 2$ виконується нерівність

$$\mathrm{P}\{\eta_n/(\mathrm{E}\eta_n) > x\} \le W(x).$$

Покладемо $\| s \|_c = (s^t C s)^{1/2}$, $s \in R^m$. Ця функція є нормою у просторі R^m. Символом $B_c(s_0, r)$ позначимо замкнену кулю радіуса $r > 0$ з центром у точці $s_0 \in R^m$ у нормованому просторі $(R^m, \|\ \|_c)$.

Теорема 2. *Нехай* $X(t)$, $t \in R^m$, — *гауссівське однорідне випадкове поле з нульовим середнім, яке задовольняє умови теореми* 1. *Тоді статистика* β_n *є слушною оцінкою параметра* β *і для коефіцієнта довіри* $1 - p$ *виконується нерівність*

$$\mathrm{P}\{\beta \in B_c(0, r_n) + \beta_n\} \ge 1 - p, \tag{10}$$

де

$$r_n = (\| C \| m)^{1/2} \left(\left(x_p (6(K + M/n)^2 + M^2/(2n)) \right)^{1/2} + M/n \right),$$

x_p — *корінь рівняння* $W(x) = p$, $\| C \| = (\mathrm{Tr}(C^t C))^{1/2}$.

Доведення. З леми 2 випливає, що для довільного $x > 2$

$$1 - W(x) \le \mathrm{P}\{\eta_n/(\mathrm{E}\eta_n) \le x\} = \mathrm{P}\{\eta_n \le x \mathrm{E}\eta_n\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{Y_n \in B_c(0, (x\mathrm{E}\eta_n)^{1/2})\right\} = \mathrm{P}\left\{\beta_n \in B_c(\mathrm{E}\beta_n, (x\mathrm{E}\eta_n)^{1/2})\right\} \le$$

$$\le \mathrm{P}\left\{\beta \in B_c(\beta_n, (x\mathrm{E}\eta_n)^{1/2} + \|\beta - \mathrm{E}\beta_n\|_c)\right\}. \tag{11}$$

Для оцінки величин $E\eta_n$ та $\|\beta - E\beta_n\|_c$ застосуємо лему 1 та нерівність $\|s\|_c \leq (\|C\|)^{1/2}\|s\|$, $s \in R^m$, де $\|s\|$ — евклідова норма вектора s у просторі R^m:

$$\|\beta - E\beta_n\|_c \leq (\|C\|m)^{1/2} M/n, \tag{12}$$

$$E\eta_n \leq (\|C\|m/n)\left(6(K+M/n)^2 + M^2/(2n)\right). \tag{13}$$

З ланцюжка нерівностей (11) та оцінок (12), (13) випливає нерівність (10). Теорему доведено.

Зауважимо, що $r_n \sim (6x_p\|C\|m/n)^{1/2}K$, $n \to \infty$.

Кулі надійності. Нехай $C = I$ — одинична матриця розміру $m \times m$. У цьому випадку $\| \ \|_c = \| \ \|$ — звичайна евклідова норма в R^m,

$$E\eta_n \leq (m/n)\left(6(K+M/n)^2 + M^2/(2n)\right),$$

$$\|\beta - E\beta_n\| \leq m^{1/2} M/n.$$

З теореми 2 випливає така теорема.

Теорема 3. *Нехай $X(t)$, $t \in R^m$, — гауссівське однорідне випадкове поле з нульовим математичним сподіванням, яке задовольняє умови теореми* 1. *Тоді статистика β_n — слушна у середньому квадратичному оцінка параметра β і для коефіцієнта довіри $1-p$*

$$P\{\beta \in B(\beta_n, r_n)\} \geq 1 - p,$$

де $r_n = m(x_p/n)^{1/2}\left(6(K+M/n)^2 + M^2/(2n)\right)^{1/2} + mM/n$, x_p — корінь рівняння $W(x) = p$, $B(\ ,\ )$ — куля у просторі R^m з евклідовою нормою.

Зауважимо, що $r_n \sim (6x_p/n)^{1/2}Km$, $n \to \infty$.

Теорема 4. *Нехай виконуються припущення теореми* 3. *Тоді для довільного $\delta > 0$ існує випадковий номер $n_0 = n_0(\omega) < +\infty$ майже напевне такий, що з імовірністю одиниця при $n > n_0(\omega)$*

$$\beta \in B\left(\beta_n, (2+\delta)^{1/2}\alpha_n \ln n\right),$$

де $a_n = m\left(6(K+M/n)^2 + M^2/(2n)\right)^{1/2} + mM/n$.

Доведення. Дійсно,

$$P\left\{\beta \notin B(\beta_n, (2+\delta)^{1/2}\alpha_n \ln n)\right\} \leq W(x_n),$$

де $x_n = (2+\delta)\ln^2 n$. Оскільки числовий ряд з загальним членом $W(x_n)$ збіжний, то твердження теореми випливає з леми Бореля – Кантеллі.

Перевірка простої гіпотези про значення параметра β. Нехай гауссівське однорідне випадкове поле $X(t)$, $t \in R^m$, задовольняє умови теореми 1, $\beta_j = -d_j$, $1 \leq j \leq m$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)^m$, і коваріаційна функція $r(\ )$ випадкового поля $X(\ )$ повністю визначається значенням параметра β. За спостереженнями цього поля у точках вигляду $k/2^n$, $0 \leq k \leq 2^n$, $n \geq 1$, координатних осей одиничного m-вимірного куба $[0, 1]^m$ побудуємо критерій для перевірки простої гіпотези $\beta = \beta^0$. Покладемо

$$K_n = \eta_n / E_0\eta_n, \quad n \geq 1,$$

де β_n — статистика (5), побудована за спостереженнями поля, $\eta_n = (\beta_n -$

$-\mathrm{E}_0\beta_n)' C(\beta_n - \mathrm{E}_0\beta_n)$, C — симетрична, додатно визначена матриця, E_0 — символ математичного сподівання, яке відповідає розподілу випадкових величин при $\beta = \beta^0$.

Тут

$$\mathrm{E}_0\beta_n = \left(n(r(0) - r(t_n^{(1)})), \ldots, n(r(0) - r(t_n^{(m)}))\right), \quad \mathrm{E}_0\eta_n = \mathrm{Tr}(CB_n),$$

де $B_n = (r_{i,j}^{(n)})_{i,j=1}^m$ — коваріаційна матриця вектора $\beta_n - \mathrm{E}_0\beta_n$ при $\beta = \beta^0$,

$$r_{i,j}^{(n)} = 0{,}25\,\mathrm{E}_0((S_{i,n} - \mathrm{E}_0 S_{i,n})(S_{j,n} - \mathrm{E}_0 S_{j,n})) =$$

$$= 0{,}5 \sum_{k,l=0}^{n-1} (E_0(\Delta_i X_k \Delta_j X_l))^2 =$$

$$= 0{,}5 \sum_{k,l=0}^{n-1} \Big(r\big((k+1)t_n^{(j)} - (l+1)t_n^{(i)}\big) - r\big(kt_n^{(j)} - (l+1)t_n^{(i)}\big) -$$

$$- r\big((k+1)t_n^{(j)} - l t_n^{(i)}\big) + r\big(kt_n^{(j)} - l t_n^{(i)}\big)\Big)^2,$$

де $t_n^{(i)} = (0, \ldots, 0, 1/n, 0, \ldots, 0)$ — m-вимірний вектор, в якому тільки i-та координата відмінна від нуля, $1 \le i \le m$. При підрахунку елементів кореляційної матриці R_n використана формула (8).

Нехай далі p — додатне число менше одиниці, x_p — корінь рівняння $W(x) = p$. На підставі леми 2

$$P_0\left\{K_n > x_p\right\} \le p.$$

Нехай K_n — обчислене при деякому фіксованому n значення критерію. Якщо $K_n > x_p$, то гіпотеза $\beta = \beta^0$ відкидається. Якщо $K_n \le x_p$, то вважається, що спостереження не суперечить гіпотезі. При цьому рівень значущості залежить від n і не перевищує p. Для довільної альтернативи $\beta = \beta^1 \ne \beta^0$ статистика $\beta_n \to \beta^1$ в середньому квадратичному, $\mathrm{E}_0\beta_n \to \beta^0$, $\mathrm{E}_0\eta_n \to 0$ при $n \to \infty$ і тому послідовність випадкових величин $K_n \to \infty$ за ймовірністю при гіпотезі $\beta = \beta^1$ при $n \to \infty$. Тому для довільної альтернативи потужність критерію прямує до одиниці при $n \to \infty$.

Одним з критеріїв вибору додатно визначеної симетричної матриці C може бути мінімальність об'єму m-вимірного еліпсоїда

$$\left\{x \in R^m : (x - \mathrm{E}_0\beta_n)' C(x - \mathrm{E}_0\beta_n) / (\mathrm{Tr}(CB_n)) \le x_p\right\}.$$

З леми 3.1 та наслідку 3.2 роботи [7] випливає, що m-вимірний об'єм такого еліпсоїда буде мінімальним при $C = B_n^{-1}$.

Приклад. Нехай $X(t)$, $t \in R^m$, — гауссівське однорідне випадкове поле з нульовим математичним сподіванням та кореляційною функцією

$$r(t) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^m \beta_i |t_i|\right\} \prod_{i=1}^m \cos(\beta_i t_i), \qquad t \in R^m,$$

де параметр $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \in [0, K]^m$.

Неважко перевірити, що це випадкове поле задовольняє умови теореми 3 при $M \doteq 2K^2$, $C_j = 2\beta_j$, $1 \le j \le m$. На підставі теореми 3 для коефіцієнта довіри $1-p$ маємо

$$\mathrm{P}\{\|\beta - \beta_n\| \le r_n\} \ \ge\ 1 - p,$$

де $r_n = m\left\{(x_p/n)^{1/2}\left(6(K+2K^2/n)^2 + 2K^4/n\right)^{1/2} + 2K/n\right\}$.

1. *Levi P.* Le mouvement Brownian plan // Amer. J. Math. – 1940. – **62**, № 1. – P. 487 – 550.
2. *Baxter G.* A strong limit theorem for Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. – 1956. – **7**, № 3. – P. 522 – 525.
3. *Бесклинская Е. П., Майборода Р. Е.* О скорости сходимости некоторых оценок параметров стационарных гауссовских случайных процессов // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1993. – Вып. 35. – С. 13 – 19.
4. *Xavier Guyon.* Quelques resultats sur les variation de champs gaussiens stationnaires // C. r. Acad. sci. – 1981. – **293**. – P. 649 – 651.
5. *Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.* Гауссовские случайные процессы. – М.: Наука, 1970. – 384 с.
6. *Kozaçhenko Yu. V., Stus V. O.* Square – Gaussian random processes and estimators of covariance functions // Math. Communicat. – 1998. – **3**, № 1. – P. 83 – 94.
7. *Козаченко Ю. В., Стусь О. В.* Узагальнені строго передгауссові випадкові процеси // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1998. – Вип. 58, – С. 61 – 75.

Одержано 16.09.98