УДК 531.38

В. Н. Кошляков, В. Л. Макаров (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

We develop the method of structural transformations of dynamical systems suggested in the previous works of the first author by applying it to the systems which contain nonconservative positional structures. The method under consideration is based on a structural transformation which enables one to exclude nonconservative positional terms from the initial system without changing its properties of stability.

Методика структурних перетворень динамічних систем, запропонована в попередніх роботах першого з авторів, розвивається стосовно систем, що містять неконсервативні позиційні структури. Методика ґрунтується на структурному перетворенні, яке дає можливість, не змінюючи властивостей стійкості вихідної системи, виключити з неї неконсервативні позиційні члени.

1. Объектом исследования является матричное уравнение вида

$$J\ddot{x} + (D + HG)\dot{x} + (\Pi + P)x = X(x, \dot{x}), \tag{1}$$

где $x = \operatorname{colon}(x_1, \ldots, x_m)$ — искомый вектор; $J = J^T$, $D = D^T$, $G = -G^T$, $\Pi = \Pi^T$, $P = -P^T$ (знак $(\cdot)^T$ означает транспонирование) — постоянные матрицы размера $m \times m$; $X(x, \dot{x})$ — m-мерный вектор-столбец, содержащий компоненты векторов x и $\dot{x}$ в степенях выше первой; $H > 0$ — некоторый большой скалярный параметр. Матрицу J будем считать положительно определенной, матрицу Π — неотрицательно определенной, а матрицы G и P — невырожденными.

Уравнением (1) описывается возмущенное движение многих динамических систем, находящихся под действием диссипативных, гироскопических, потенциальных и неконсервативных позиционных сил. В системах, содержащих гироскопы, под J следует понимать симметричную матрицу тензора инерции рассматриваемой системы.

В прикладной теории гироскопов наряду с уравнением (1) часто рассматривается уравнение, называемое прецессионным. Оно получается из (1) в результате пренебрежения первым слагаемым:

$$(D + HG)\dot{u} + (\Pi + P)u = U(u, \dot{u}). \tag{2}$$

Интерпретация замены исходного уравнения приближенным уравнением (2) соответствует, по сути дела, учету в общей кинетической энергии системы лишь той ее части, которая обусловлена предположенным быстрым вращением гироскопов. При этом порядок получающейся системы оказывается в два раза меньше исходной, что представляет несомненное удобство в практическом применении уравнения (2).

Тем не менее переход к уравнениям прецессионной теории не всегда правомерен. Обоснованию допустимости перехода от уравнения (1) к уравнению (2) посвящены исследования ряда авторов, относящиеся к математической части проблемы [1, 2]. В связи с этим укажем, например, на методы интегральных многообразий и расщепляющих преобразований, приводящие к разделению уравнений на медленные (прецессионные) и быстрые (нутационные) [2].

Определенным препятствием на пути формального перехода к уравнениям прецессионной теории является наличие в исходных уравнениях неконсервативных позиционных членов, характеризующихся матрицей P в (1). В этом случае асимптотически устойчивое решение, полученное в рамках прецессионной теории, может оказаться, в силу расходимости быстрых нутационных колебаний, неустойчивым в точных уравнениях. Кроме того, наличие неконсервативных позиционных структур в уравнениях возмущенного движения гироскопической системы исключает прямое применение теорем Томсона – Тета – Четаева [3].

Излагаемая ниже теория, в отличие от метода расщепляющих преобразований, не требует использования асимптотических разложений, а основывается на рассмотренном в [4, 5] структурном преобразовании, позволяющем исключить из преобразованных уравнений неконсервативные позиционные члены. Такой подход позволяет преодолеть определенные трудности, связанные с наличием в исходных уравнениях неконсервативных позиционных структур, и, в частности, в ряде случаев допускает прямое применение теорем Томсона – Тета – Четаева.

2. Перейдем в (1) к новой векторной переменной ξ, полагая

$$x = L\xi, \tag{3}$$

где матрица L определяется ниже. Преобразование (3), являющееся обратным используемому в работах [4, 5], оказывается в данном случае более удобным. В результате приходим к уравнению

$$JL\ddot{\xi} + [2J\dot{L} + (D+HG)L]\dot{\xi} + [J\ddot{L} + (D+HG)\dot{L} + (\Pi+P)L]\xi = \Xi, \tag{4}$$

где Ξ — вектор-столбец, содержащий компоненты векторов ξ и $\dot{\xi}$ в степенях выше первой. Линейное уравнение, соответствующее (4), имеет вид

$$\ddot{\xi} + L^{-1}[2\dot{L} + J^{-1}(D+HG)L]\dot{\xi} +$$
$$+ L^{-1}[\ddot{L} + J^{-1}(HG\dot{L} + \Pi L + D\dot{L} + PL)]\xi = 0. \tag{5}$$

Выполнение условия

$$D\dot{L} + PL = 0 \tag{6}$$

дает возможность исключить матрицу P из уравнения (5). Условие (6), аналогичное второму из условий (2. 6) статьи [5], может быть представлено в виде матричного уравнения

$$\dot{L} = AL \quad (A = D^{-1}P^T), \tag{7}$$

откуда

$$L = e^{At}L(0), \tag{8}$$

где матрица $L(0)$ соответствует начальному значению t.

При ограниченности $L(t)$ и $\dot{L}(t)$ на интервале $[0, \infty)$, а также при $|\det L(t)| \geq \delta > 0$ матрица $L(t)$ будет матрицей Ляпунова [6]. В этом случае преобразование (3) не изменяет свойств устойчивости линейной части уравнения (1).

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *При сделанных предположениях относительно матриц D и P и при $L(0) = E$ (E — единичная матрица) решение задачи Коши для уравнения* (7) *будет матрицей Ляпунова.*

Доказательство. Поскольку матрица D — самосопряженная и положительно определена, то существуют единственные, самосопряженные, положительно определенные матрицы $D^{1/2}$, $D^{-1/2}$ [6]. Обозначим

$$\tilde{L}(t) = D^{1/2}L(t)D^{1/2}, \qquad \tilde{P} = D^{-1/2}PD^{-1/2}. \tag{9}$$

Тогда задача Коши для (7) примет вид

$$\dot{\tilde{L}} = -\tilde{P}\tilde{L}(t), \qquad \tilde{L}(0) = D. \tag{10}$$

При этом матрица $\tilde{P}$, как и матрица P, оказывается кососимметрической.

Из (9) и (10) имеем

$$L(t) = D^{-1/2}\exp(-\tilde{P}t)D^{1/2}, \tag{11}$$

откуда следует

$$\|L(t)\| \leq \|D^{-1/2}\| \, \|\exp(-\tilde{P}t)\| \, \|D^{1/2}\| = \|D^{-1/2}\| \, \|D^{1/2}\|,$$

$$\|\dot{L}(t)\| \leq \|D^{-1/2}\| \, \|\tilde{P}\| \, \|\exp(-\tilde{P}t)\| \, \|D^{1/2}\| =$$

$$= \|D^{-1/2}\| \, \|\tilde{P}\| \, \|D^{1/2}\| \qquad \forall t \geq 0.$$

При этом использовано известное тождество

$$\|\exp(-\tilde{P}t)\| \equiv 1.$$

В силу тождества Якоби [7] имеем

$$\det L(t) = \det D^{-1/2} \det\{\exp(-\tilde{P}t)\} \det D^{1/2} = \det\{Sp(-\tilde{P}t)\} = 1, \tag{12}$$

что и завершает доказательство леммы.

Учитывая уравнение (6), заменяем $\dot{L}$ и $\ddot{L}$ в уравнении (5), после чего оно приводится к виду

$$\ddot{\xi} + Q\dot{\xi} + R\xi = 0, \tag{13}$$

где

$$Q = L^{-1}VL, \quad R = L^{-1}WL. \tag{14}$$

При этом

$$V = J^{-1}(D + HG) + 2A, \quad W = A^2 + J^{-1}(\Pi + HGA). \tag{15}$$

3. Существует достаточно широкий класс динамических систем, которые иногда называют собственно-неконсервативными. Этому классу соответствует $\Pi \equiv 0$ в (1) и (15). К числу подобных систем относятся, в частности, гироскопические указатели горизонта, оснащенные управлением по типу радиальной коррекции [8, 9].

Далее будем полагать, что действующие на систему силы, моделируемые матрицей D, обусловлены лишь сопротивлением среды. В этом случае суммарный момент сил сопротивления (диссипацию будем полагать полной) зависит вообще не только от физических свойств среды, но и от распределения масс системы. Положим [8]

$$D = \mu J, \tag{16}$$

где $\mu > 0$ — малый постоянный скалярный параметр, зависящий от свойств среды.

С учетом изложенного обратимся к уравнению (13) и выражениям (14), (15). В случае выполнения соотношений

$$V = L^{-1}(t)VL(t), \quad W = L^{-1}(t)WL(t) \qquad \forall t \geq 0, \tag{17}$$

или

$$L(t)V = VL(t), \quad L(t)W = WL(t), \tag{18}$$

т. е. когда матрицы $L(t)$, V и соответственно $L(t)$, W коммутируют, исследование уравнения (13) значительно упрощается, поскольку оно сводится к уравнению

$$\ddot{\xi} + V\dot{\xi} + W\xi = 0 \tag{19}$$

с постоянными матрицами V и W, определяющимися формулами (15).

Для выяснения условий, при которых соотношения (17), (18) выполняются, полагаем, что матрицы G и P в (1) являются трехдиагональными:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & 0 & & \\ & & & & 0 \\ -g_1 & 0 & g_2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & -g_2 & 0 & & g_{2n-1} \\ & & & \ddots & \\ & 0 & -g_{2n-1} & & 0 \end{bmatrix},$$
$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & 0 & & \\ & & & & 0 \\ -p_1 & 0 & p_2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & -p_2 & 0 & & p_{2n-1} \\ & & & \ddots & \\ & 0 & -p_{2n-1} & & 0 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

где $g_k, p_k \geq 0$, $k = \overline{1, 2n-1}$. Матрицу J далее считаем диагональной: $J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_{2n})$.

Частным случаем матриц (20) являются клеточно-диагональные матрицы с клетками 2×2

$$G = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & g_1 \\ -g_1 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & g_{2n-1} \\ -g_{2n-1} & 0 \end{bmatrix}\right),$$
$$P = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & p_1 \\ -p_1 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & p_{2n-1} \\ -p_{2n-1} & 0 \end{bmatrix}\right), \tag{21}$$
$$g_{2j-1} > 0, \quad p_{2j-1} > 0, \quad j = \overline{1, n},$$

если в (20) положить

$$p_{2r} = g_{2r} = 0, \qquad r = \overline{1, n-1}. \tag{22}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть векторы* $\operatorname{colon}(g_1, \ldots, g_{2n-1})$, $\operatorname{colon}(p_1, \ldots, p_{2n-1})$ *не являются коллинеарными, т. е. не существует такой постоянной* α, *для которой*

$$P = \alpha HG. \tag{23}$$

Тогда для того чтобы имели место соотношения (17), (18), *необходимо и достаточно выполнения условий* (22).

Доказательство. Пусть выполнены условия (22). Тогда матрицы G и P будут иметь вид (21). Что касается L, то, пользуясь уравнением (6) и выражениями (21), при условии $L(0) = E$ имеем

$$L(t) = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} \cos\Omega_i t & -\sqrt{\dfrac{b_{2i}}{b_{2i-1}}}\sin\Omega_i t \\ \sqrt{\dfrac{b_{2i-1}}{b_{2i}}}\sin\Omega_i t & \cos\Omega_i t \end{bmatrix}\right)_{i=\overline{1,n}},$$

где $\Omega_i = \dfrac{p_{2i-1}}{\sqrt{b_{2i-1}b_{2i}}}$. В этом случае матрицы V и W с учетом (16) принимают вид

$$V = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} \mu+2\dfrac{p_{2i-1}^2}{\mu^2 J_{2i-1}J_{2i}} & H\dfrac{g_{2i-1}}{J_{2i-1}} \\ -H\dfrac{g_{2i-1}}{J_{2i-1}} & \mu+2\dfrac{p_{2i-1}^2}{\mu^2 J_{2i-1}J_{2i}} \end{bmatrix}\right)_{i=\overline{1,n}},$$

$$W = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} \dfrac{p_{2i-1}^2}{\mu^2 J_{2i-1}J_{2i}} + \dfrac{H}{\mu}\dfrac{g_{2i-1}p_{2i-1}}{J_{2i-1}J_{2i}} & 0 \\ 0 & \dfrac{p_{2i-1}^2}{\mu^2 J_{2i-1}J_{2i}} + \dfrac{H}{\mu}\dfrac{g_{2i-1}p_{2i-1}}{J_{2i-1}J_{2i}} \end{bmatrix}\right)_{i=\overline{1,n}}.$$

Отсюда следует, что вторые соотношения в (17), (18) выполняются. Поскольку матрицу V можно представить в виде

$$V = \operatorname{diag}\left(\left(\mu + 2\frac{p_{2i-1}^2}{\mu^2 J_{2i-1}J_{2i}}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)_{i=\overline{1,n}} + \operatorname{diag}\left(Hg_{2i-1}\begin{bmatrix} 0 & J_{2i-1}^{-1} \\ -J_{2i}^{-1} & 0\end{bmatrix}\right)_{i=\overline{1,n}},$$

то для выполнения первых соотношений в (17), (18) необходимо, чтобы

$$\begin{bmatrix} \cos\Omega_i t & -\sqrt{\dfrac{b_{2i}}{b_{2i-1}}}\sin\Omega_i t \\ \sqrt{\dfrac{b_{2i-1}}{b_{2i}}}\sin\Omega_i t & \cos\Omega_i t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & J_{2i-1}^{-1} \\ -J_{2i}^{-1} & 0\end{bmatrix} -$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & J_{2i-1}^{-1} \\ -J_{2i}^{-1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\Omega_i t & -\sqrt{\dfrac{b_{2i}}{b_{2i-1}}}\sin\Omega_i t \\ \sqrt{\dfrac{b_{2i-1}}{b_{2i}}}\sin\Omega_i t & \cos\Omega_i t \end{bmatrix} \equiv 0 \qquad \forall t \geq 0.$$

Последнее тождество очевидно при учете (16). *Необходимость* доказана.

Достаточность может быть установлена с помощью метода математической индукции. При этом условимся для удобства снабжать соответствующие матрицы нижним индексом, равным половине их размерности.

Пусть выполняются соотношения (18). Тогда на основании (6) имеем

$$D_n^{-1}P_n V_n = V_n D^{-1}P_n, \qquad D_n^{-1}P_n W_n = W_n D^{-1}P_n. \tag{24}$$

Используя определение матриц V, W (15), из (24), в силу предположенной невырожденности матриц P_n, J_n^{-1}, получаем

$$G_n J_n^{-1} P_n - P_n J_n^{-1} G_n = 0. \tag{25}$$

При $n = 2$ из (25) находим

$$G_2 J_2^{-1} P_2 - P_2 J_2^{-1} G_2 =$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_2^{-1}(p_2g_1-p_1g_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_3^{-1}(p_3g_2-p_2g_3) \\ -J_2^{-1}(p_2g_1-p_1g_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_3^{-1}(p_3g_2-p_2g_3) & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,
$$

что, в свою очередь, имеет место при

$$
p_2g_1 - p_1g_2 = 0, \quad p_2g_3 - p_3g_2 = 0. \tag{26}
$$

Условия (26) можно рассматривать как систему уравнений относительно p_2 и g_2, имеющую единственное решение $p_2 = g_2 = 0$, когда $\Delta \equiv p_1g_3 - g_1p_3 \neq 0$. Если $\Delta = 0$, то с учетом (26) имеем

$$
\frac{g_1}{p_1} = \frac{g_2}{p_2} = \frac{g_3}{p_3} = c,
$$

где c — произвольная постоянная, которую всегда можно принять равной $(\alpha H)^{-1}$. Однако это противоречит условию теоремы 1. Поэтому следует положить $p_2 = g_2 = 0$. Таким образом, при $n = 2$ утверждение теоремы справедливо. Пусть оно справедливо при $n = k$. Покажем, что оно будет также справедливо и при $n = k+1$. Поскольку при любом $n \geq 2$ элементы матрицы в левой части (25) с индексами (1.3), (2.4), (3.1), (4.2) не изменяются, снова получаем уравнения (26), решением которых, как было показано выше, будет $p_2 = g_2 = 0$. Таким образом, матрицы G_{k+1}, P_{k+1} представляются в виде

$$
G_{k+1} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & g_1 & \\ & & 0 \\ -g_1 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \overline{G}_k \end{array}\right],
$$

$$
P_{k+1} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & p_1 & \\ & & 0 \\ -p_1 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \overline{P}_k \end{array}\right], \tag{27}
$$

где черта сверху в кососимметричных трехдиагональных блоках $\overline{G}_k$, $\overline{P}_k$ означает, что они построены с помощью последовательностей $\{g_3, g_4, \ldots, g_{2k+1}\}$ и $\{p_3, p_4, \ldots, p_{2k+1}\}$ соответственно. Из (25) при $n = k+1$ с учетом (27) следует равенство

$$
\overline{G}_k \overline{J}_k^{-1} \overline{P}_k - \overline{P}_k \overline{J}_k^{-1} \overline{G}_k = 0.
$$

Последнее равенство в соответствии с предположением индукции будет иметь место при

$$
p_{2r} = g_{2r} = 0, \quad r = 2, 3, \ldots, k.
$$

А это означает, что при любом n из (18) следует (22). Достаточность, а вместе с ней и теорема доказаны.

Отметим, что устойчивость собственно-неконсервативной системы в случае $P = \alpha HG$ рассмотрена с помощью прямого метода Ляпунова в статье [10].

4. В соответствии с изложенным обратимся к уравнению (13) для случая клеточно-диагональных матриц 2×2, определяемых согласно (21). Умножая уравнение (19) слева на J, имеем

$$J\ddot{\xi} + V_{(1)}\dot{\xi} + W_{(1)}\xi = 0. \tag{28}$$

Полагая $J = \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_{2n})$ и учитывая (16), имеем

$$V_{(1)} = JV = D + \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & p_1 \\ -p_1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & p_{2n-1} \\ -p_{2n-1} & 0 \end{bmatrix}\right). \tag{29}$$

Здесь

$$h_{2k-1} = \mu^{-1}(H\mu g_{2k-1} - 2p_{2k-1}), \qquad k = \overline{1, n}.$$

Соответственно

$$W_{(1)} = JW = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_{2n}), \tag{30}$$

где

$$c_{2k-1} = \mu^{-2} J_{2k}^{-1}(Hg_{2k-1}\mu - p_{2k-1}), \qquad c_{2k} = c_{2k-1}J_{2k}/J_{2k-1}. \tag{31}$$

Матрицы (29) и (30) постоянны, причем $W_{(1)}$ диагональна и, следовательно, не имеет неконсервативных структур. Поэтому к уравнению (19) применимы теоремы Томсона – Тета – Четаева.

Действительно, если нет диссипативных и гироскопических сил (они входят в силу (29) в состав матрицы $V_{(1)}$), то положительность всех величин c_i (они являются коэффициентами Пуанкаре для данного случая [3]) обеспечивается посредством неравенств

$$Hg_{2k-1}\mu - p_{2k-1} > 0, \qquad k = \overline{1, n}, \tag{32}$$

следующих из (31). Они соответствуют устойчивости (неасимптотической) тривиального решения уравнения (28) для указанных условий. При выполнении неравенств (32) добавление сил сопротивления с полной диссипацией и произвольных гироскопических сил (последним отвечают $h_{2k-1} \neq 0$) обеспечивает, согласно соответствующей теореме Томсона – Тета – Четаева, асимптотическую устойчивость уравнения (19) и, следовательно, погашение нутационных колебаний.

Из неравенств (32) можно получить оценки снизу величины коэффициента диссипации μ в виде

$$\mu > \max_k \frac{p_{2k-1}}{Hg_{2k-1}}, \qquad k = \overline{1, n}, \tag{33}$$

обеспечивающие погашение нутации.

5. В заключение приведем условия коммутативности матрицы $L(t)$ с матрицами V и W в случае произвольных матриц P, G, J, Π.

Теорема 2. *Пусть P, G — произвольные, невырожденные кососимметрические матрицы, J, Π — произвольные симметрические матрицы, причем матрица J — положительно определенная и удовлетворяет условию* (16). *Тогда для того чтобы имели место соотношения коммутативности* (18), *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$GJ^{-1}P = PJ^{-1}G, \tag{34}$$

$$\Pi J^{-1}P = PJ^{-1}\Pi. \tag{35}$$

Доказательство. Пусть выполняются условия (34), (35). Тогда из (15) следует, что имеют место соотношения

$$J^{-1}PV = VJ^{-1}P, \quad J^{-1}PW = WJ^{-1}P. \tag{36}$$

Используя представление матричной экспоненты $L(t)$

$$L(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(D^{-1}P^T\right)^l \frac{t^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(-\mu^{-1}J^{-1}P\right)^l \frac{t^l}{l!},$$

справедливое для любого конечного t, приходим к (18).

Пусть теперь имеют место соотношения коммутативности (18). Тогда справедливы равенства

$$\dot{L}(0)V = V\dot{L}(0), \quad \dot{L}(0)W = W\dot{L}(0)$$

или

$$D^{-1}PV = VD^{-1}P, \quad D^{-1}PW = WD^{-1}P,$$

что с учетом (15) приводит к (36). Теорема доказана.

1. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. – М.: Наука, 1974. – 344 с.
2. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
3. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. – М.: Гостехиздат, 1955. – 207 с.
4. *Кошляков В. Н.* О структурных преобразованиях уравнений возмущенного движения некоторого класса динамических систем // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 4. – С. 535–539.
5. *Кошляков В. Н.* О структурных преобразованиях динамических систем с гироскопическими силами // Прикладная математика и механика. – 1997. – **61**, вып. 5. – С. 774–780.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
7. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
8. *Булгаков Б. В.* Прикладная теория гироскопов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 400 с.
9. *Ройтенберг Я. Н.* Гироскопы. – М.: Наука, 1975. – 592 с.
10. *Агафонов С. А.* Об устойчивости неконсервативных систем // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1972. – № 4. – С. 87–90.

Получено 26.01.2000