УДК 518.9

**Н. А. Перестюк, Е. В. Остапенко** (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

# УПРАВЛЯЕМОЕ ИМПУЛЬСНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ В ИГРАХ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОКОНЧАНИЯ

We construct optimal strategies of players and determine sets of initial positions favorable for one or another player.

Побудовано оптимальні стратегії гравців та визначено множини початкових позицій, сприятливих для того чи іншого гравця.

Будем рассматривать дифференциальные игры с динамикой, которая подвержена управляемому импульсному воздействию в фиксированные моменты времени. В постановке задачи используется теория дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [1]. Результаты статьи опираются на понятия и методы теории дифференциальных игр [2]. В линейном случае указан класс игр, для которых удается конструктивно описать множество начальных позиций, благоприятных для того или иного игрока.

**Постановка задачи.** В евклидовом $n$-мерном пространстве $E^n$ рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением с импульсным воздействием

$$\dot{z} = f(z, u, \nu), \qquad t \neq \tau, \tag{1}$$

$$\Delta z|_{t=\tau} = \Gamma_\tau(u_\tau, \nu_\tau) z - z, \tag{2}$$

где $z \in E^n$, $u \in U$, $\nu \in V$, $u_\tau \in U_\tau$, $\nu_\tau \in V_\tau$ и $U$, $V$, $U_\tau$, $V_\tau$ — компакты в евклидовых пространствах, $\Gamma_\tau(u_\tau, \nu_\tau)$ — непрерывный оператор, действующий из пространства $E^n$ в $E^n$.

Параметрами $u$ и $\nu$ распоряжаются соответственно игроки $P$ (догоняющий) и $E$ (убегающий). Под допустимыми управлениями игроков $P$ и $E$ будем понимать измеримые функции $u(t)$ и $\nu(t)$ со значениями в $U$ и $V$ соответственно. Множества всех допустимых управлений игроков $P$ и $E$, определенных на отрезке $[a, b]$, будем обозначать соответственно через $U[a, b]$ и $V[a, b]$.

Далее считаем, что функция $f$, множества $U$ и $V$, оператор $\Gamma_\tau(u_\tau, \nu_\tau)$ удовлетворяют следующим предположениям:

1. Функция $f(z, u, \nu)$ непрерывна по совокупности переменных и локально липшицева по $z$.

2. Существует константа $C \geq 0$ такая, что для всех $z \in E^n$, $u \in U$, $\nu \in V$ выполняется неравенство

$$|\langle z, f(z, u, \nu)\rangle| \leq C(1 + \|z\|^2).$$

3. Множество $f(z, U, \nu)$ выпукло для всех $z \in E^n$, $\nu \in V$.

4. При фиксированном $\nu_\tau \in V_\tau$ функция трех переменных $\Gamma_\tau(u_\tau, \nu_\tau) z$ непрерывна по совокупности переменных $u_\tau$ и $z$.

Предположения 1 и 2 гарантируют существование, единственность и продолжимость решения $z(t)$ на полуось $[0, +\infty)$.

Помимо уравнения (1) дифференциальная игра описывается терминальным множеством $M \subset E^n$ и множеством фазовых ограничений $N \subset E^n$. Множества $M$ и $N$ предполагаются замкнутыми, причем $M \subset N$.

Рассмотрим игру с фиксированным временем окончания $\theta$. Цель игрока $P$ — добиться включений $z(\theta) \in M$, $z(t) \in N$ для любого $t \in [0, \theta]$, т. е. вывести траекторию на $M$ в момент $\theta$, удержав ее во множестве $N$. Цель игрока $E$ — противоположна.

**Основные результаты.** Для случая, когда динамика игры описывается уравнением (1), введем следующие понятия [2].

Пусть

$$P_\varepsilon(M, \nu(\cdot)) = \bigcup_{u \in U[0,\varepsilon]} \{z_0 \in E^n: \; z(\varepsilon) = z(t \,|\, u(\cdot), \nu(\cdot), z_0) \in M\}$$

— оператор, который каждому замкнутому $M \subset E^n$ ставит в соответствие множество $P_\varepsilon(M, \nu(\cdot))$ всех точек $z_0 \in E^n$ таких, что для фиксированного допустимого управления $\nu(t)$, $t \in [0, \varepsilon]$, игрока $E$ существует допустимое управление $u(t)$ игрока $P$ такое, что соответствующая траектория $z(t) = z(t \,|\, u(\cdot), \nu(\cdot), z_0)$ с началом в $z_0$ попадает на $M$ в момент $\varepsilon$, т. е. $z(\varepsilon) \in M$.

Определим

$$P_\varepsilon(M) = \bigcap_{\nu \in V[0,\varepsilon]} \bigcup_{u \in U[0,\varepsilon]} \{z_0 \in E^n: \; z(\varepsilon) = z(t \,|\, u(\cdot), \nu(\cdot), z_0) \in M\}.$$

Положим $P_{N,\varepsilon} M = (P_\varepsilon M) \cap N$.

Пусть $\omega = \{\tau_0 = 0 \le \tau_1 \le \tau_2 \le \ldots \le \tau_k = t\}$ — конечное разбиение отрезка $[0, t]$. Положим

$$P_N^\omega M = P_{N,\delta_1} \ldots P_{N,\delta_k} M,$$

где $\delta_j = \tau_j - \tau_{j-1}$, $j = 1, \ldots, k$.

Определим

$$\tilde{P}_{N,t} M = \bigcap_{|\omega| = t} P_N^\omega M.$$

Опишем теперь ход игры задачи (1), (2). Игрок $E$ выбирает разбиение $\omega = \{\tau_0 = 0 \le \tau_1 \le \tau_2 \le \ldots \le \tau_i = \tau \le \tau_{i+1} \le \tau_{i+2} \le \ldots \le \tau_{i+k} = \theta\}$, где точки $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i$ выбираются в начальный момент времени, а точки $\tau_{i+1}, \tau_{i+2}, \ldots, \tau_{i+k}$ — в момент времени $\tau$. На каждом интервале $[\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j = 1, \ldots, i+k$, игрок $E$ строит свое управление $\nu(t)$, пользуясь тем, что значение $z(\tau_{j-1})$ известно. Игрок $P$ выбирает свое управление $u(t)$ на $[\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j = 1, \ldots, i+k$, пользуясь знанием $z(\tau_{j-1})$ и управления $\nu(t)$, $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j)$. В момент $\tau$ игрок $E$ выбирает параметр $\nu_\tau$, зная значение $z(\tau) = z(\tau_i)$; игрок $P$ выбирает параметр $u_\tau$, пользуясь тем, что $z(\tau)$ и $\nu_\tau$ известны. Такой процесс имеет название $\varepsilon$-стратегии.

**Лемма 1.** *Множество*

$$\bigcap_{\nu_\tau \in V_\tau} \bigcup_{u_\tau \in U_\tau} \Gamma_\tau^{-1}(u_\tau, \nu_\tau) M$$

*является замкнутым для замкнутого множества* $M$.

***Доказательство.*** Достаточно показать замкнутость множества

$$\bigcup_{u_\tau \in U_\tau} \Gamma_\tau^{-1}(u_\tau, \nu_\tau) M.$$

Пусть $\{z_k\}$ — последовательность из $\bigcup_{u_\tau \in U_\tau} \Gamma_\tau^{-1}(u_\tau, \nu_\tau) M$, сходящаяся к $z_0$. Покажем, что

$$z_0 \in \bigcup_{u_\tau \in U_\tau} \Gamma_\tau^{-1}(u_\tau, \nu_\tau) M.$$

Пусть $z_k \in \bigcup_{u_\tau \in U_\tau} \Gamma_\tau^{-1}(u_\tau, \nu_\tau) M$, т. е. существуют такие $u_\tau^k \in U_\tau$ и $m_k \in \in M$, что $z_k = \Gamma_\tau^{-1}(u_\tau^k, \nu_\tau) m_k$ или $m_k = \Gamma_\tau(u_\tau^k, \nu_\tau) z_k$. Поскольку, согласно предположению, $U_\tau$ — компакт, то, не ограничивая общности, можно считать, что $u_\tau^k$ сходится к $u_\tau^0 \in U_\tau$. Согласно предположению 4 $m_k$ сходится к $m_0 = \Gamma_\tau(u_\tau^0, \nu_\tau) z_0$ и $m_0 \in M$. Отсюда $z_0 = \Gamma_\tau^{-1}(u_\tau^0, \nu_\tau) m_0$ и $z_0 \in \in \bigcup_{u_\tau \in U_\tau} \Gamma_\tau^{-1}(u_\tau, \nu_\tau) M$.

Опишем множества всех начальных позиций, благоприятных для того или иного игрока, предполагая, что для любых $u_\tau$ и $\nu_\tau$ имеем $\Gamma_\tau^{-1}(u_\tau, \nu_\tau) M \subset N$. Положим

$$\Phi_{N,\theta} M = \tilde{P}_{N,\tau} \bigcap_{\nu_\tau \in V_\tau} \bigcup_{u_\tau \in U_\tau} \Gamma_\tau^{-1}(u_\tau, \nu_\tau) \tilde{P}_{N,\theta-\tau} M.$$

Согласно лемме 1 оператор $\Phi_{N,\theta} M$ определен корректно. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** 1. *Пусть* $z_0 \in \Phi_{N,\theta} M$. *Тогда существует* $\varepsilon$*-стратегия игрока* $P$ *такая, что для соответствующей траектории* $z(t)$ *с началом в* $z_0$ *выполняется* $z(\theta) \in M$ *и* $z(t) \in N$ *для всех* $t \in [0, \theta]$.

2. *Пусть* $z_0 \notin \Phi_{N,\theta} M$. *Тогда существует* $\varepsilon$*-стратегия игрока* $E$ *такая, что для соответствующей траектории* $z(t)$ *с началом в* $z_0$ *выполняется или* $z(\theta) \notin M$, *или существует такое* $t \in [0, \theta]$, *что* $z(t) \notin N$.

***Доказательство.*** 1. Пусть $z_0 \in \Phi_{N,\theta} M$ и игрок $E$ использует разбиение $\omega = \{\tau_0 = 0 \le \tau_1 \le \tau_2 \le \ldots \le \tau_i = \tau \le \tau_{i+1} \le \tau_{i+2} \le \ldots \le \tau_{i+k} = \theta\}$ отрезка $[0, \theta]$. В момент времени $\tau_0 = 0$ игрок $E$ строит свое управление $\nu(\cdot) \in \in V[0, \tau_1)$. Из того факта, что $\tilde{P}_{N,t_1+t_2} M = \tilde{P}_{N,t_1} \tilde{P}_{N,t_2} M$, следует

$$z_0 \in \tilde{P}_{N,\tau_1} \tilde{P}_{N,\tau-\tau_1} \bigcap_{\nu_\tau \in V_\tau} \bigcup_{u_\tau \in U_\tau} \Gamma_\tau^{-1}(u_\tau, \nu_\tau) \tilde{P}_{N,\theta-\tau} M.$$

Согласно [2, с. 58], существует управление $u(\cdot) \in U[0, \tau_1)$ такое, что

$$z(\tau_1) \in \tilde{P}_{N,\tau-\tau_1} \bigcap_{\nu_\tau \in V_\tau} \bigcup_{u_\tau \in U_\tau} \Gamma_\tau^{-1}(u_\tau, \nu_\tau) \tilde{P}_{N,\theta-\tau} M \quad \text{и} \quad z(t) \in N \quad \forall t \in [0, \tau_1).$$

Примем $z(\tau_1)$ за начальную позицию и повторим процесс. На $i$-м шаге получим

$$z(\tau_i) = z(\tau) \in \bigcap_{\nu_\tau \in V_\tau} \bigcup_{u_\tau \in U_\tau} \Gamma_\tau^{-1}(u_\tau, \nu_\tau) \tilde{P}_{N,\theta-\tau} M \quad \text{и} \quad z(t) \in N \quad \forall t \in [0, \tau).$$

В момент времени $\tau$ игрок $E$ выбирает параметр $\nu_\tau \in V_\tau$. Тогда существует параметр $u_\tau \in U_\tau$ такой, что $z(\tau+) = \Gamma_\tau(u_\tau, \nu_\tau) z(\tau) \in \tilde{P}_{N,\theta-\tau} M$, причем $z(\tau+) \in N$, поскольку, согласно предположению, оператор $\Gamma_\tau(u_\tau, \nu_\tau)$ не выводит из множества $N$. Примем позицию $z(\tau+) = \Gamma_\tau(u_\tau, \nu_\tau)z(\tau)$ за начальную. Продолжая описанный алгоритм, на $(i+k)$-м шаге получим $z(\theta) \in \in M$ и $z(t) \in N$ для всех $t \in [0, \theta]$.

2. Пусть $z_0 \notin \Phi_{N,\theta}M$. Тогда существует такое разбиение $\omega_1 = \{\tau_0 = 0 \le \le \tau_1 \le \tau_2 \le \ldots \le \tau_i = \tau\}$ отрезка $[0, \tau]$, что

$$z_0 \notin P_N^{\omega_1} \bigcap_{\nu_\tau \in V_\tau} \bigcup_{u_\tau \in U_\tau} \Gamma_\tau^{-1}(u_\tau, \nu_\tau)\tilde{P}_{N,\theta-\tau} M.$$

Это означает, что или $z_0 \notin N$, или существует такое $\nu(\cdot) \in V[0, \tau_1)$, что для произвольного $u(\cdot) \in U[0, \tau_1)$ выполняется

$$z(\tau_1) \notin \tilde{P}_{N,\delta_2} \ldots \tilde{P}_{N,\delta_i} \bigcap_{\nu_\tau \in V_\tau} \bigcup_{u_\tau \in U_\tau} \Gamma_\tau^{-1}(u_\tau, \nu_\tau)\tilde{P}_{N,\theta-\tau} M,$$

где $\delta_j = \tau_j - \tau_{j-1}$, $j = 1, \ldots, i$. Примем позицию $z(\tau_1)$ за начальную и повторим процесс.

На $i$-м шаге будет построено такое управление $\nu(\cdot) \in V[0, \tau_j)$, что для соответствующей траектории $z(t)$ выполняется:

или $z(\tau_j) \notin N$, $j < i$,

или $z(\tau_i) = z(\tau) \notin \bigcap_{\nu_\tau \in V_\tau} \bigcup_{u_\tau \in U_\tau} \Gamma_\tau^{-1}(u_\tau, \nu_\tau)\tilde{P}_{N,\theta-\tau} M$.

Тогда существует такое $\nu_\tau \in V_\tau$, что для произвольного $u_\tau \in U_\tau$ выполняется $z(\tau+) = \Gamma_\tau(u_\tau, \nu_\tau)z(\tau) \notin \tilde{P}_{N,\theta-\tau} M$. Примем позицию $z(\tau+) = \Gamma_\tau(u_\tau, \nu_\tau)z(\tau)$ за начальную. По определению существует разбиение $\omega_2 = \{\tau'_0 = 0 \le \tau'_1 \le \le \tau'_2 \le \ldots \le \tau'_k = \theta - \tau\}$ отрезка $[0, \theta - \tau]$ такое, что $z(\tau+) \notin P_N^{\omega_2} M$. Пусть разбиение $\omega$ имеет $k$ точек. Тогда будем считать, что общее разбиение отрезка $[0, \theta]$ имеет вид $\omega = \{\tau_0 = 0 \le \tau_1 \le \ldots \le \tau_i = \tau = \tau_{i+0} \le \tau_{i+1} \le \ldots \ldots \le \tau_{i+k} = \theta\}$, где $\tau_{i+j} = \tau_i + \tau'_j$, $j = 0, \ldots, k$. Получим $z(\tau_{i+0}) \notin P_N^{\omega_2} M$. Это означает, что или $z(\tau_{i+0}) \notin N$, или существует такое $\nu(\cdot) \in V[\tau_i, \tau_{i+1})$, что для произвольного $u(\cdot) \in U[\tau_i, \tau_{i+1})$ выполняется $z(\tau_{i+1}) = z(\tau + \tau'_1) \notin \notin P_{N,\delta_{i+2}} \ldots P_{N,\delta_{i+k}} M$, где $\delta_{i+j} = \tau'_j - \tau'_{j-1}$, $j = 1, \ldots, k$. Примем позицию $z(\tau_{i+1})$ за начальную и продолжим алгоритм. В результате на $k$-м шаге получим или $z(\tau_{i+j}) \notin N$, $j < k$, или $z(\tau_{i+k}) = z(\theta) \notin M$. Теорема доказана.

**Линейная задача.** Приведем некоторые предварительные рассуждения. Напомним определения $H$-выпуклых и матрично-выпуклых множеств [2, 3].

**Определение 1.** *Пусть $H \subset \{x^* \in E^n\colon \|x^*\| = 1\}$. $H$-выпуклым полупространством называется полупространство вида $\{x \in E^n\colon \langle x, x^*\rangle \le c\}$, где $x^* \in H$, $c$ — число. Множество $M \subset E^n$ называется $H$-выпуклым, если оно представимо в виде пересечения $H$-выпуклых полупространств, т. е. $M$ является $H$-выпуклым множеством, если его можно представить в виде*

$$M = \bigcap_{x^* \in H} \{x \in E^n\colon \langle x, x^*\rangle \le c(x^*)\},$$

*где $c(x^*)$ — некоторые числа, которые могут принимать значение $+\infty$.*

**Определение 2.** *Пусть $\mathfrak{R} = \{C(t),\ t \in [0, 1]\}$ — ограниченное измеримое семейство линейных операторов, для которых $\int_0^1 C(t)\,dt = E$. Множество $M \subset E^n$ называется $\mathfrak{R}$-выпуклым, если*

$$\int_0^1 C(t)\, M\, dt = M,$$

*где*

$$\int_0^1 C(t)\, M\, dt = \bigcup_{x(\cdot)} \left\{ \int_0^1 C(t)\, x(t)\, dt \right\},$$

*причем объединение берется по всем измеримым ограниченным отображениям $x(t)$ таким, что $x(t) \in M$ для всех $t \in [0, 1]$.*

Обозначим через $H$ множество единичных векторов $x^* \in E^n$ таких, что $C^*(t) x^* = \lambda(t \mid x^*)\, x^*$ для почти всех $t \in [0, 1]$; $\lambda(t \mid x^*) \geq 0$ для почти всех $t \in [0, 1]$. Тогда, согласно [2, с. 131], верны следующие утверждения.

**Лемма 2.** *Пусть $M \subset E^n$ является $H$-выпуклым множеством. Тогда $M$ — $\mathfrak{R}$-выпуклое множество.*

**Лемма 3.** *Пусть $M \subset E^n$ является $\mathfrak{R}$-выпуклым множеством и $\operatorname{int} M \neq \varnothing$. Тогда $M$ — $H$-выпуклое множество.*

Рассмотрим семейство $\mathfrak{I} = \{ G(t),\ t \in [0, 1] \}$ линейных операторов, которое удовлетворяет таким условиям:

1) $\mathfrak{I}$ — компактно; 2) $\mathfrak{I}$ — выпукло; 3) $\mathfrak{I}$ — $\mathfrak{R}$-выпукло;

4) для любого $G$ из $\mathfrak{I}$ выполняется $G^* H \subset \operatorname{con} H$.

**Лемма 4.** *Для $H$-выпуклого множества $K$ и семейства операторов $\mathfrak{I} = \{ G(t),\ t \in [0, 1] \}$, удовлетворяющего условиям 1–4, семейство множеств $\mathfrak{I} K$ — $\mathfrak{R}$-выпукло.*

*Доказательство.* Согласно определению $\mathfrak{R}$-выпуклого множества требуется доказать, что

$$\int_0^1 C(t)\, \mathfrak{I} K\, dt = \mathfrak{I} K,$$

где

$$\int_0^1 C(t)\, \mathfrak{I} K\, dt = \bigcup_{G(\cdot),\, x(\cdot)} \left\{ \int_0^1 C(t)\, G(t)\, x(t)\, dt \right\},$$

причем объединение берется по всем измеримым ограниченным отображениям $G(t)$ и $x(t)$ таким, что $G(t) \in \mathfrak{I}$ и $x(t) \in M$ для почти всех $t \in [0, 1]$. Для таких произвольных $G(t) \in \mathfrak{I}$ и $x(t) \in M$ покажем, что

$$\int_0^1 C(t)\, G(t)\, x(t)\, dt \in \mathfrak{I} K.$$

Из условия 4 следует, что для любого $x^* \in H$ существуют $y^*(x^*) \in H$ и $\mu(G \mid x^*) \geq 0$ такие, что $G^* x^* = \mu(G \mid x^*)\, y^*(x^*)$. Обозначим $\mu(t \mid x^*) = \mu(G(t) \mid x^*)$ . Тогда для произвольного $x^* \in H$ имеем

$$\int_0^1 \langle C(t)\, G(t)\, x(t), x^* \rangle\, dt =$$

$$= \int_0^1 \langle x(t), G^*(t)\, C^*(t)\, x^* \rangle\, dt = \int_0^1 \langle x(t), \lambda(t \mid x^*)\, \mu(t \mid x^*)\, y^*(x^*) \rangle\, dt =$$

$$= \left\langle \int_0^1 \lambda(t\,|\,x^*)\,\mu(t\,|\,x^*)\,x(t)\,dt\,,\,y^*(x^*)\right\rangle.$$

Из выпуклости $K$ и того, что $\mu(t\,|\,x^*) > 0$, следует существование $\bar{x} \in K$ такого, что

$$\int_0^1 \lambda(t\,|\,x^*)\,\mu(t\,|\,x^*)\,x(t)\,dt = \int_0^1 \lambda(t\,|\,x^*)\,\mu(t\,|\,x^*)\,dt\,\bar{x}\,.$$

Определим оператор $G_0 = \int_0^1 C(t)\,G(t)\,dt$. Из условия 4 следует, что $G_0 \in \in \Im$. Тогда

$$\int_0^1 \langle C(t)\,G(t)\,x(t),\,x^*\rangle\,dt = \langle \bar{x},\,G_0^*\,x^*\rangle = \langle G_0\,\bar{x},\,x^*\rangle \le W_{G_0 K}(x^*),$$

где $W_{G_0 K}(\cdot)$ — опорная функция. Поскольку $G_0 K$ — выпуклое множество, то

$$\int_0^1 C(t)\,G(t)\,x(t)\,dt \in G_0 K \subset \Im K.$$

Обратное включение очевидно и

$$\int_0^1 C(t)\,\Im K\,dt = \Im K.$$

*Замечание.* Если в условиях леммы $\Im K$ имеет непустую внутренность, то $\Im K$ — $H$-выпукло.

Рассмотрим игру с линейной динамикой, подверженной импульсному воздействию в некоторый момент времени:

$$\dot{z} = Az + B(u, \nu), \qquad t \ne \tau, \tag{3}$$

$$\Delta z|_{t=\tau} = \Gamma_\tau(u_\tau, \nu_\tau)\,z - z, \tag{4}$$

где $A: E^n \to E^n$ — линейный оператор, $B: U \times V \to E^n$ — непрерывная по совокупности переменных функция, $\Gamma_\tau(u_\tau, \nu_\tau)$ — линейный оператор. Введем следующие операторы:

$$P^*_{N,\varepsilon} M = \bigcap_{\nu \in V} \bigcup_{u \in U} \left\{ z \in N:\; e^{A\varepsilon} + \int_0^1 e^{A(\varepsilon - t)}\,dt\,B(u, \nu) \in M \right\},$$

$$\Phi^*_{N,\varepsilon} M = P^*_{N,\tau} M \bigcap_{\nu_\tau \in V_\tau} \bigcup_{u_\tau \in U_\tau} \Gamma_\tau^{-1}(u_\tau, \nu_\tau)\,P^*_{N,\varepsilon-\tau} M\,.$$

Пусть множества $M$, $N$, $B(U, \nu)$ являются $H$-выпуклыми, семейство операторов $\Gamma_\tau^{-1}(u_\tau, \nu_\tau)$ удовлетворяет условиям $1-4$. Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** 1. *Пусть* $z_0 \in \Phi^*_{N,\theta} M$. *Тогда существуют отображения* $u_{z_0}$: $V \to U$ *и* $u_{z(\tau+)}$: $V \to U$ *такие, что для произвольного* $\nu(\cdot) \in V[0, \theta]$:

a) $u_*(\nu(t)) = \begin{cases} u_{z_0}(\nu(t)), & t \in [0, \tau], \\ u_{z(\tau+)}(\nu(t)), & t \in (\tau, \theta], \end{cases}$

— *допустимое управление игрока* $P$;

б) *для траектории* $z(t)$ *с началом в* $z_0$, *соответствующей управлениям* $u_*(\nu(t))$ *и* $\nu(t)$, *выполняются включения* $z(\theta) \in M$ *и* $z(t) \in N$ *для всех* $t \in \in [0, \theta]$;

2. *Пусть* $z_0 \notin \Phi^*_{N,\theta} M$. *Тогда или* $z_0 \notin N$, *или существуют такие* $\nu_{z_0} \in \in V$ *и* $\nu_{z(\tau+)} \in V$, *что для траектории* $z(\tau)$ *с началом в* $z_0$, *соответствующей произвольному управлению* $u(\cdot) \in U[0, \theta]$ *и управлению*

$$\nu_*(t) = \begin{cases} \nu_{z_0}, & t \in [0, \tau], \\ \nu_{z(\tau+)}, & t \in (\tau, \theta], \end{cases}$$

*выполняется* $z(\theta) \notin M$.

Лемма 4 позволяет повторить метод, разработанный в [2], для доказательства теоремы.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
2. *Пшеничный Б. Н., Остапенко В. В.* Дифференциальные игры . – Киев: Наук. думка, 1991. – 264 с.
3. *Остапенко В. В.* Матричная выпуклость // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 64–69.

Получено 30.11.99,
после доработки — 27.03.2000