УДК 517.5

А. С. Федоренко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО НАЙКРАЩІ m-ЧЛЕННІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТА ОРТОГОНАЛЬНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСІВ $L^{\psi}_{\beta,\rho}$

We obtain estimates exact in order for the best trigonometric and orthogonal-trigonometric approximations of classes of $L^{\psi}_{\beta,p}$-functions of one variable in the space L_q in the case where $2 < p \le q < \infty$.

Одержано точні за порядком оцінки найкращих тригонометричних та ортогональних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ функцій однієї змінної в просторі L_q у випадку $2 < p \le q < < \infty$.

В цій роботі продовжується дослідження (розпочате в [1, 2]) поведінки величин

$$e_m(F, L_q) \overset{\text{def}}{=} \sup_{f \in F} \inf_{\Theta_m} \inf_{P(\Theta_m; x)} \| f - P(\Theta_m; x) \|_q, \tag{1}$$

де F — деякий функціональний клас, $P(\Theta_m; x)$ — поліноми вигляду $\sum_{k=1}^{m} a_k e^{in_k x}$, Θ_m — набір із m цілих чисел $n_1, \ldots, n_m$, a_k — довільні коефіцієнти, L_q — простір 2π-періодичних функцій $f(x)$ із скінченною нормою

$$\| f(x) \|_q = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | f(x) |^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \le q < \infty,$$

на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$. Зокрема, в [2] було доведено таку теорему.

Теорема 1. *Нехай* $1 < p \le 2 < q < \infty$, $\psi \in D$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(k) k^{1/p+\varepsilon}$ *не зростає,* $\beta \in R$. *Тоді має місце співвідношення*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p}; L_q) \asymp \psi(m) m^{1/p-1/2}.$$

Зокрема, D — множина незростаючих послідовностей $\psi(k)$ таких, що для будь-якого $k \in N$ $\psi(k) > 0$ і $\psi(k)/\psi(2k) \le C$. Ми дотримуємося позначень, прийнятих в [2]. Зазначимо також, що там же наведено бібліографію, що пов'язана з даною тематикою.

Теорема 2. *Нехай* $2 < p \le q < \infty$, $\psi \in D$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(k) k^{1/2+\varepsilon}$ *не зростає,* $\beta \in R$. *Тоді має місце співвідношення*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p}; L_q) \asymp \psi(m).$$

Доведення. Оцінка зверху випливає із теореми 1 при $p = 2$, згідно з вкладенням $L^{\psi}_{\beta,p} \subseteq L^{\psi}_{\beta,2}$, оскільки у цьому випадку

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p}; L_q) >> e_m(L^{\psi}_{\beta,2}; L_q) \asymp \psi(m), \quad p \ge 2.$$

Встановимо оцінку знизу. Для цього нам знадобиться результат Рудіна–Шапіро (див., наприклад, [3, с. 155]). Сформулюємо його.

Лема. *Для кожного* $s \in N$ *знайдеться поліном*

$$R_s(x) = \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} \varepsilon_k e^{ikx}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

такий, що

$$\| R_s(x) \|_\infty << 2^{s/2}.$$

Продовжимо доведення теореми. Воно буде базуватися на використанні співвідношення двоїстості (див., наприклад, [4, с. 42]): для $f \in L_q(-\pi; \pi)$

$$e_m(f, L_q) = \inf_{\Theta_m} \inf_{P(\Theta_m; x)} \| f(x) - P(\Theta_m; x) \|_q = \inf_{\Theta_m} \sup_{\substack{P \in L^\perp(\Theta_m) \\ \|P\|_{q'} \le 1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) P(x) dx,$$

де $L^\perp(\Theta_m)$ — множина функцій, які ортогональні підпростору тригонометричних поліномів з „номерами” гармонік із множини Θ_m, а $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.

Виберемо l таким чином, щоб було $2m \le 2^l < 3m$, і розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{1}{2^{l/2}} \psi(2^l) f_1(x), \tag{2}$$

де $f_1(x) = \sum_{s \le l} R_s(x)$, а $R_s(x)$ — поліном Рудіна–Шапіро.

Покажемо, що існує стала C_1 така, що $f^*(x) = C_1^{-1} f(x) \in L^\psi_{\beta,p}$. Для цього достатньо пересвідчитися, що $\| f^\psi_\beta(x) \|_p \le C_1$. Згідно з [5], для $f_1(x)$ маємо

$$\| (f_1)^\psi_\beta(x) \|_p << \psi^{-1}(2^l) \| f_1(x) \|_p, \quad 1 < p < \infty. \tag{3}$$

Внаслідок леми

$$\| (f_1)^\psi_\beta(x) \|_p << \psi^{-1}(2^l) 2^{\frac{l}{2}}. \tag{4}$$

Співставляючи (2) – (4), одержуємо

$$\| f^\psi_\beta(x) \|_p << \psi^{-1}(2^l) 2^{\frac{l}{2}} 2^{\frac{-1}{2}} \psi(2^l),$$

що доводить належність функції $f^*(x) = C_1^{-1} f(x)$ до класу $L^\psi_{\beta,p}$.

Нехай далі $u(x) = \sum'_{s \le l} R_s(x)$ — функція, що містить тільки ті гармоніки функції $f_1(x)$, які мають номери із множини Θ_m.

Покладемо $P_1(x) = f_1(x) - u(x)$ і оцінимо $\| P_1(x) \|_{q'}$. Оскільки $q' \le 2$, то, враховуючи лему, маємо

$$\| P_1(x) \|_{q'} << \| f_1(x) \|_{q'} + \| u_1(x) \|_2 << 2^{\frac{l}{2}} + m^{\frac{1}{2}} << m^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, що поліном $P(x) = m^{-1/2} P_1(x)$ задовольняє вимоги правої частини рівності (3). Підставляючи побудовані функції $f^*(x)$ і $P(x)$ в (3) і враховуючи вибір l, одержуємо оцінку

$$e_m(L^\psi_{\beta,p}; L_q) >> 2^{-\frac{l}{2}} \psi(2^l) m^{-\frac{1}{2}} (2^l - m) >> 2^{-\frac{l}{2}} \psi(2^l) m^{-\frac{1}{2}} 2^l >> \psi(m),$$

яка і доводить теорему.

Найкращим ортогональним тригонометричним наближенням функцій класу $L^{\psi}_{\beta,p}$ в метриці простору L_q називають величину

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p}; L_q) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{\Theta_m} \| f(x) - S(\Theta_m; x)\|_q,$$

де $S(\Theta_m; x) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{in_k x}$, c_k — коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

Теорема 3. *Нехай* $2 < p \le q < \infty$, $\psi \in D$ *і, крім того, послідовність* $\psi(k)k^{1/p-1/q}$ *не зростає*, $\beta \in R$. *Тоді справедливе співвідношення*

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p}; L_q) \asymp \psi(m)m^{1/p-1/q}.$$

Доведення. Оцінка зверху випливає із наближення сумами Фур'є (див. [6, с. 215]) та оцінки $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p}; L_q) << \mathscr{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p}; L_q)$.

Встановимо оцінку знизу. Будемо користуватися відомим співвідношенням (див., наприклад, [4, с. 392])

$$\|f\|_q = \sup_{\|g\|_{p'}\le 1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx \right|, \quad f\in L_p[-\pi;\pi], \quad 1\le p\le\infty, \quad 1/p + 1/p' = 1,$$

згідно з яким для $\|f(x) - S_m(f;x)\|_q$ одержимо

$$\|f(x) - S_m(f;x)\|_q = \sup_{\|g\|_{q'}\le 1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_m(f;x)) g(x) dx \right|. \tag{5}$$

За заданим m виберемо l із умови $2m < 2^l \le 3m$ і розглянемо функцію $f_1(x) = \sum_{s\le l} \sum_{k\in\rho(s)} e^{ikx}$. На підставі [5, с. 94] і оцінки з роботи [6, с. 214] маємо $\|(f_1)^{\psi}_{\beta}(x)\|_p << \psi^{-1}(2^l)\| f_1(x)\|_p \asymp \psi^{-1}(2^l)2^{l(1-1/p)}$, $1 < p < \infty$, що доводить належність функції $f(x) = C_1^{-1} 2^{-l(1-1/p)} \psi(2^l) f_1(x)$ до класу $L^{\psi}_{\beta,p}$.

За $g(x)$ візьмемо поліном $g(x) = C_2^{-1} 2^{-l/q} f_1(x)$. Зазначимо, що $q' \in (1, 2)$. Використовуючи теорему Літтлвуда–Пелі (див., наприклад, [2, с. 358]), нерівність $|a+b|^{\alpha} \le |a|^{\alpha} + |b|^{\alpha}$, $0\le\alpha<1$, маємо $\|f_1\|_{q'} << 2^{l/q}$, звідки випливає, що вибраний нами поліном $g(x)$ задовольняє умову правої частини рівності (5). Підставляючи вибрані нами $f(x)$ і $g(x)$ в (5), одержуємо оцінку знизу. Теорему доведено.

1. *Романюк А. С.* Неравенства типа Бора–Фавара и наилучшие M-членные приближения классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Некоторые вопросы теории приближения функций и их приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 98–108.
2. *Федоренко А. С.* Наилучшие m-членные тригонометрические приближения функций классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Ряди Фур'є: теорія і застосування. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – С. 356–364.
3. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Тригонометрические ряды. – М.: Наука, 1984. – 495 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
5. *Романюк А. С.* Неравенства для L_p-норм $(\psi\,\beta)$-производных и поперечники по Колмогорову классов функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Исследования по теории аппроксимации функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 92–105.
6. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 286 с.

Одержано 08.06.99