УДК 517.928

Н. И. Шкиль, Г. В. Завизион (Нац. пед. ун-т, Киев)

СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЯМИ

We construct asymptotic solutions of singularly perturbed homogeneous and heterogeneous systems of integro-differential Fredholm type equations having degenerate matrix with a derivative.

Будуються асимптотичні розв'язки сингулярно збуреної однорідної і неоднорідної систем інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженою матрицею при похідній.

В [1 – 3] строились асимптотические решения системы линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами и сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с вырождениями в случае простых и кратных корней характеристического уравнения. В данной статье предлагаются методы интегрирования интегро-дифференциальных уравнений с вырождениями в случае, когда соответствующий пучок матриц регулярный и имеет кратные „конечные" и „бесконечные" элементарные делители.

Рассмотрим системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма

$$\varepsilon^h B(t;\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t;\varepsilon)x + \rho\int_0^L K(t;s;\varepsilon)x(s;\varepsilon)\,ds, \tag{1}$$

$$\varepsilon^h B(t;\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t;\varepsilon)x + \rho\int_0^L K(t;s;\varepsilon)x(s;\varepsilon) + f(t;\varepsilon)\exp\left(\frac{\theta(t)}{\varepsilon^h}\right), \tag{2}$$

где $\varepsilon\ (0<\varepsilon\le\varepsilon_0)$ — малый параметр, $h\in N$, $t\in[0;L]$, $s\in[0;L]$, ρ — произвольный параметр; $A(t;\varepsilon)$, $B(t;\varepsilon)$, $K(t;s;\varepsilon)$ — $(n\times n)$-мерные матрицы, $f(t;\varepsilon)$, $x(t;\varepsilon)$ — n-мерные векторы, $\theta(t)$ — скалярная функция.

1. Формальные решения однородной системы. Предположим, что выполняются условия: 1) матрицы $A(t;\varepsilon)$, $B(t;\varepsilon)$, $K(t;s;\varepsilon)$ допускают разложения по степеням малого параметра

$$A(t;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r A_r(t), \quad B(t;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r B_r(t),$$

$$K(t;s;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r K_r(t;s);$$

2) $\det B_0(t)\equiv 0$ для всех $t\in[0;L]$; 3) коэффициенты $A_r(t)$, $B_r(t)$, $K_r(t;s)$ бесконечно дифференцируемые по t для всех $t\in[0;L]$, $s\in[0;L]$; 4) $\det A_0(t)\neq 0$ для всех $t\in[0;L]$; 5) если ρ — собственное значение ядра $K(t;s) = -A_0^{-1}(t)K_0(t;s)$, то $\det a_{ij}(t)\neq 0$, где

$$a_{ij}(t) = \int_0^L A_0^{-1}(t)\left(-\alpha B_0(t)q_i'(t) + A_1(t)q_i(t) + \rho\int_0^L K_1(t;\xi)\,q_i(\xi)\,d\xi\right)\eta_j(t)\,dt,$$

$q_i(t)$, $\eta_j(t)$ — собственные векторы соответственно ядра $K(t;s)$ и сопряженного ядра $\overline{K}(t;s)$, $i,j=\overline{1,r}$, причем $\alpha=1$, если $h=1$, и $\alpha=0$, если $h>1$.

Предположим также, что регулярный пучок матриц $A_0(t)-wB_0(t)$ имеет один „конечный" элементарный делитель $(w-w_0)^p$ и бесконечный элементарный делитель кратности $q=n-p$. Согласно [2], матрица $A_0(t)$ имеет B_0-жорданову цепочку векторов длины p, состоящую из собственного вектора $\varphi(t)=$

$= \varphi_1(t)$, соответствующего собственному значению $w_0(t)$, и $(p-1)$ B_0-присоединенных векторов $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_p(t)$, которые удовлетворяют соотношениям

$$(A_0(t) - w_0 B_0(t))\varphi_1 = 0, \quad (A_0(t) - w_0 B_0(t))\varphi_i(t) = B_0 \varphi_{i-1}(t), \quad i = \overline{2, p}. \tag{3}$$

Матрица $B_0(t)$ имеет A_0-жорданову цепочку векторов длины q, состоящую из собственного вектора $\overline{\varphi}(t) = \overline{\varphi}_1(t)$, соответствующего нулевому собственному значению, и $(q-1)$ A_0-присоединенных векторов $\overline{\varphi}_2(t), \ldots, \overline{\varphi}_q(t)$, которые удовлетворяют соотношениям

$$B_0 \overline{\varphi}_1(t) = 0, \quad B_0 \overline{\varphi}_j(t) = A_0 \overline{\varphi}_{j-1}(t), \quad j = \overline{2, q}. \tag{4}$$

Использовав соотношения (3), (4), выберем $\varphi(t)$, $\overline{\varphi}(t)$, $\psi(t)$, $\overline{\psi}(t)$ так, чтобы выполнялись условия

$$\left(B_0(HB_0)^{p-1}\varphi; \psi\right) = 1, \quad \left(A_0(\sigma A_0)^{q-1}\overline{\varphi}; \overline{\psi}\right) = 1,$$

$$\left(A_0(\sigma A_0)^{j-1}\overline{\varphi}; \overline{\psi}\right) = 0, \quad \left(B_0(HB_0)^{i-1}\varphi; \psi\right) = 0, \quad i = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, q-1}.$$

Здесь $\psi(t)$, $\overline{\psi}(t)$ — соответственно элементы нуль-пространств матриц $(A_0(t) - w_0 B_0(t))^*$, $B_0^*(t)$, а $H(t)$, $\sigma(t)$ — обобщенные обратные матрицы соответственно к матрицам $A_0(t) - w_0 B_0(t)$ и $B_0(t)$.

Теорема 1. *Если пучок матриц $A_0(t) - wB_0(t)$ регулярный для всех $t \in [0; L]$, имеет „конечный" элементарный делитель $(w - w_0)^p$ кратности $p > 1$ и „бесконечный" элементарный делитель кратности q, а также выполняются условия $1-5$ и, кроме того, справедливы соотношения*

$$(A_1(t)\varphi(t); \psi(t)) - w_0(t)(B_1(t)\varphi(t), \psi(t)) - \delta_{h1}\left(B_0(t)\varphi'(t), \dot{\psi}(t)\right) \neq 0,$$

$$(B_1(t)\overline{\varphi}(t), \overline{\psi}(t)) \neq 0 \quad \forall\, t \in [0; L],$$

то на этом отрезке система (1) *имеет p формальных решений вида*

$$x(t;\mu) = u(t;\mu)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda(t;\mu)\,dt\right) + \rho\int_0^L p(t;s;\mu)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^s \lambda(t;\mu)\,dt\right)ds \tag{5}$$

и q формальных решений вида

$$x(t;\mu_1) = v(t;\mu_1)\exp\left(\mu_1^{-qh-1}\int_0^t \frac{dt}{\xi(t;\mu_1)}\right) + \rho\int_0^L q(t;s;\mu_1)\exp\left(\mu_1^{-qh-1}\int_0^s \frac{dt}{\xi(t;\mu_1)}\right)ds, \tag{6}$$

где n-мерные векторы $u(t;\mu)$, $v(t;\mu_1)$, $p(t;s;\mu)$, $q(t;s;\mu_1)$ и скалярные функции $\lambda(t;\mu)$, $\xi(t;\mu_1)$ представляются в виде

$$u(t;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k u_k(t), \quad \lambda(t;\mu) = w_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\lambda_k(t), \tag{7}$$

$$p(t;s;\mu) = \sum_{k=\beta_1}^{\infty}\mu^k p_k(t;s), \quad v(t;\mu_1) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu_1^k v_k(t),$$
$$\xi(t;\mu_1) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu_1^k\xi_k(t), \quad q(t;s;\mu_1) = \sum_{k=\beta_2}^{\infty}\mu_1^k q_k(t;s). \tag{8}$$

Здесь $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$, $\mu_1 = \sqrt[q]{\varepsilon}$, причем $\beta_1 = \beta_2 = 0$, если знаменатель Фредгольма $D(\rho) \neq 0$ ядра $K(t;s)$, или $\beta_1 = -p$, $\beta_2 = -q$, если $D(\rho) = 0$.

Доказательство. Покажем, что коэффициенты разложений (7), (8) можно определить так, чтобы векторы (5), (6) удовлетворяли системе (1) в смысле равенства формальных рядов. Докажем сначала утверждение теоремы относительно решений (5), которые отвечают „конечным" элементарным делителям. Подставив (5) в (1) и изменив порядок интегрирования в повторном интеграле, получим

$$(\varepsilon^h B(t;\varepsilon)\,u'(t;\mu) + B(t;\varepsilon)\,u(t;\mu)\,\lambda(t;\mu) -$$

$$- A(t;\varepsilon)\,u(t;\mu))\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \lambda(t;\mu)\,dt\right) = \rho\int\limits_0^L \Big(A(t;\varepsilon)\,p(t;s;\mu) +$$

$$+ K(t;s;\mu)\,u(s;\mu) + \rho\int\limits_0^L K(t;\xi;\mu)\,p(\xi;s;\mu)\,d\xi -$$

$$- \varepsilon^h B(t;\varepsilon)\,p'(t;s;\mu)\Big)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^s \lambda(t;\mu)\,dt\right)ds. \tag{9}$$

Для того чтобы вектор $x(t;\mu)$ был формальным решением системы (1), достаточно, чтобы $u(t;\mu)$, $\lambda(t;\mu)$, $p(t;s;\mu)$ удовлетворяли равенствам

$$\varepsilon^h B(t;\varepsilon)\,u'(t;\mu) + B(t;\varepsilon)\,u(t;\mu)\,\lambda(t;\mu) = A(t;\varepsilon)\,u(t;\mu)), \tag{10}$$

$$\varepsilon^h B(t;\varepsilon)\,p'(t;s;\mu) = A(t;\varepsilon)\,p(t;s;\mu) + K(t;s;\varepsilon)\,u(s;\mu) +$$

$$+ \rho\int\limits_0^L K(t;\xi;\varepsilon)\,p(\xi;s;\mu)\,d\xi, \tag{11}$$

где $p'(t;s;\mu)$ — производная функции $p(t;s;\mu)$ по переменной t.

Подставив (7) в (10) и решив полученную систему векторных уравнений методом, приведенным в [2], найдем неизвестные $u_k(t)$, $\lambda_k(t)$. Для нахождения $p(t;s;\mu)$ отдельно рассмотрим случаи, когда ρ — регулярное значение ядра $K(t;s)$ и ρ — собственное значение ядра $K(t;s)$. В первом случае, подставив (7) в (11) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим систему интегральных уравнений

$$A_0(t)\,p_k(t;s) = f_k(t;s) - \rho\int\limits_0^L K_0(t;\xi)\,p_k(\xi;s)\,d\xi, \tag{12}$$

где

$$f_k(t;s) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-ph}{p}\right]} B_i(t)\,p'_{k-ph-pi}(t;s) - \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{p}\right]} K_i(t;s)\,u_{k-pi}(s) -$$

$$- \rho\sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{p}\right]}\int\limits_0^L K_i(t;\xi)\,p_{k-pi}(\xi;s)\,d\xi - \sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{p}\right]} A_i(t)\,u_{k-pi}(t;s), \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Обозначив через $\Gamma(t;s;\rho)$ резольвенту ядра $K(t;s)$, решение (12) запишем в виде

$$p_k(t;s) = A_0^{-1}(t)\, f_k(t;s) + \rho\int\limits_0^L \Gamma(t;\xi;\rho)\, A_0^{-1}(\xi)\, f_k(\xi;s)\,d\xi, \quad k=0,1,\ldots. \tag{13}$$

В случае, когда ρ — собственное значение ядра $K(t;s)$, векторы $p_{-l}(t;s)$, $p_k(t;s)$, $l=\overline{1,p}$, $k=0,1,\ldots$, удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} A_0(t)p_{-l}(t;s) &= -\rho\int\limits_0^L K_0(t;\xi)\, p_{-l}(\xi;s)\,d\xi, \\ A_0(t)p_k(t;s) &= -\rho\int\limits_0^L K_0(t;\xi)\, p_k(\xi;s)\,d\xi + f_k(t;s), \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$f_k(t;s) = \sum_{i=1}^{\left[\frac{k+1}{p}\right]}\Bigg(A_i(t)\, p_{k-pi}(t;s) - K_{i-1}(t;s)\, u_{k+1-pi}(s) - $$

$$- \rho\int\limits_0^L K_i(t;\xi)\, p_{k-pi}(\xi;s)\,d\xi\Bigg) + \sum_{i=-1}^{\left[\frac{k-hp}{p}\right]} B_{k-pi-hi}(t)\,\frac{dp_i(t;s)}{dt}, \quad k=0,1,\ldots.$$

Обозначив $F_k(t;s) = A_0^{-1}(t)f_k(t;s)$, $k=0,1,\ldots$, систему (14) запишем в виде

$$p_{-l}(t;s) = \rho\int\limits_0^L K(t;\xi)\, p_{-l}(\xi;s)\,d\xi, \tag{15}$$

$$p_k(t;s) = \rho\int\limits_0^L K(t;\xi)\, p_k(\xi;s)\,d\xi + F_k(t;s), \quad l=\overline{1,p}. \tag{16}$$

Система интегральных уравнений (15) при $l=p$ имеет решение

$$p_{-p}(t;s) = \sum_{i=1}^{r} c_{-pi}(s)\, q_i(t), \tag{17}$$

где $c_{-pi}(s)$ — пока произвольные функции, $q_i(t)$, $i=\overline{1,r}$, — собственные векторы ядра $K(t;s)$.

Для того чтобы уравнение (16) при $k=0$ имело решение, нужно, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_0^L F_0(t;s)\,\eta_j(t)\,dt = 0, \quad j=\overline{1,r}, \tag{18}$$

где $\eta_j(t)$ — собственные векторы сопряженного интегрального уравнения

$$\eta_j(t) = \rho\int\limits_0^L \overline{K}(t;s)\,\eta_j(s)\,ds.$$

Согласно (17) условие (18) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{r} c_{-pi}(s)\, a_{ij} + b_{-pj}(s) = 0, \tag{19}$$

где

$$b_{-pj}(s) = \int_0^L A_0^{-1}(t)\, K_0(t; s)\, u_0(s)\, \eta_j(t)\, dt.$$

При выполнении условия 5 система алгебраических уравнений (18) имеет единственное решение $c_{-pi}(s)$, $i = \overline{1, r}$, которое определяет $p_{-p}(t; s)$. Уравнение (16) при $k = 0$ запишем в виде

$$p_0(t; s) = \sum_{i=1}^{r} c_{0i}(s)\, q_i(t) + F_0(t; s) + \rho \int_0^L \Gamma(t; \xi; \rho)\, F_0(\xi; s)\, d\xi,$$

где $\Gamma(t; s; \rho)$ — резольвента ядра

$$L(t; s) = K(t; s) - \sum_{i=1}^{r} \begin{Vmatrix} \overline{\eta}_{1i}(t)\, \overline{q}_{1i}(s) & \ldots & \overline{\eta}_{1i}(t)\, \overline{q}_{ri}(s) \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \overline{\eta}_{ri}(t)\, \overline{q}_{1i}(s) & \ldots & \overline{\eta}_{ri}(t)\, \overline{q}_{ri}(s) \end{Vmatrix}.$$

Функции $c_{0i}(s)$ определяются из условия существования решения уравнения (16) при $k = p$, а функции

$$p_{-p+l}(t; s) = \sum_{i=1}^{r} c_{(-p+l);i}(s)\, q_i(t), \quad l = 1, 2, \ldots p - 1,$$

— из условия существования решения уравнения (16) при $k = l$. Аналогично, методом математической индукции, показывается, что указанным алгоритмом можно определить любую функцию $p_k(t; s)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Докажем, что система (1) имеет формальное решение вида (6). Подставив (6) в (4) и изменив порядок интегрирования в повторном интеграле, будем иметь

$$\frac{1}{\mu_1^q \xi(t; \mu_1)} B(t; \mu_1^q)\, v(t; \mu_1) = A(t; \mu_1^q)\, v(t; \mu_1) - \mu_1^{hq} B(t; \mu_1^q)\, v'(t; \mu_1),$$

$$\mu_1^{hq} B(t; \mu_1^q)\, q'(t; s; \mu_1) = A(t; \mu_1^q)\, q(t; s; \mu_1) + K(t; s; \mu_1^q)\, v(s; \mu_1) +$$

$$+ \rho \int_0^L K(t; \xi; \mu_1^q)\, q(\xi; s; \mu_1)\, d\xi.$$

Приравняв здесь коэффициенты при одинаковых степенях μ_1, получим бесконечную систему уравнений

$$\begin{gathered} B_0(t) v_0(t) = 0, \quad B_0(t) v_k(t) = a_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \\ A_0(t)\, q_k(t; s) = g_k(t; s) - \rho \int_0^L K_0(t; \xi)\, q_k(\xi; s)\, d\xi, \quad k = 0, 1, \ldots, \end{gathered} \tag{20}$$

если ρ — регулярное значение ядра $K(t; s)$;

$$A_0(t)\,q_{-l}(t;s) = -\rho\int_0^L K_0(t;\xi)\,q_{-l}(\xi;s)\,d\xi,$$

$$A_0(t)\,q_k(t;s) = g_{1k}(t;s) - \rho\int_0^L K_0(t;\xi)\,q_k(\xi;s)\,d\xi, \tag{21}$$

$$l = \overline{1,q}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

если ρ — собственное значение ядра $K(t;s)$, причем

$$a_k(t) = \sum_{i=0}^{k-1}\xi_i(t)\,A_0(t)\,v_{k-1-i}(t) + b_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$b_k(t) = \sum_{i=0}^{k-q-1}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1-i}{q}\right]}\xi_i(t)\,A_j(t)\,v_{k-1-i-qj} -$$

$$-\sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{q}\right]}B_i(t)\,v_{k-qi}(t) - \sum_{i=0}^{k-qh-1}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-qh-1-i}{q}\right]}\xi_i(t)\,B_j(t)\,v'_{k-qh-1-i-qj}(t), \quad k = q,\, q+1, \ldots,$$

$$g_k(t;s) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-qh}{q}\right]}B_i(t)\,q'_{k-qh-qi}(t;s) - \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{q}\right]}K_i(t;s)\,v_{k-qi}(s) -$$

$$-\rho\sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{q}\right]}\int_0^L K_i(t;\xi)\,q_{k-qi}(\xi;s)\,d\xi - \sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{q}\right]}A_i(t)\,q_{k-qi}(t;s), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$g_{1k}(t;s) = -\sum_{i=1}^{\left[\frac{k+1}{q}\right]}\Big(A_i(t)\,q_{k-qi}(t;s) -$$

$$-K_{i-1}(t;s)\,v_{k+1-qi}(t;s) - \rho\int_0^L K_i(t;\xi)\,q_{k-qi}(\xi;s)\,d\xi\Big) +$$

$$+\sum_{i=-1}^{\left[\frac{k-hq}{q}\right]}B_{k-iq-ih}(t)\,\frac{dq_i(t;s)}{dt}.$$

Для последовательного определения $v_k(t)$, $\xi_k(t)$ используем метод из работы [2]. Решая системы (20), (21) таким же образом, как и системы (12), (13), получаем: 1) если ρ — регулярное значение ядра $K(t;s)$, то

$$q_k(t;s) = A_0^{-1}(t)\,g_k(t;s) + \rho\int_0^L \Gamma(t;\xi;\rho)A_0^{-1}(\xi)\,g_k(\xi;s)\,d\xi, \quad k = 0, 1, \ldots;$$

2) если ρ — собственное значение ядра $K(t;s)$, то

$$q_{-l}(t;s) = \sum_{i=1}^{r}c_{-l;i}(s)\,q_i(t),$$

$$q_k(t;s) = \sum_{i=1}^{r} c_{k_i}(s)\, q_i(t) + F_{1k}(t;s) + \rho\int_0^L \Gamma_1(t;\xi;\rho)\, F_{1k}(\xi;s)\, d\xi,$$

где $F_{1k}(t;s) = A_0^{-1}(t)\, g_{1k}(t;s)$, $\Gamma(t;s;\rho)$ и $\Gamma_1(t;s;\rho)$ — резольвенты ядер соответственно $K(t;s)$ и $L(t;s)$.

2. Неоднородная система уравнений. При построении частных решений системы (2) рассматриваются „нерезонансный" и „резонансный" случаи. „Нерезонансный" — когда функция $k(t) = d\theta(t)/dt$ не равна ни одному из корней характеристического уравнения. „Резонансный" — когда $k(t) = w_0(t)$ $\forall\, t \in [0; L]$, где $w_0(t)$ — один из корней характеристического уравнения $\det\|A_0(t) - wB_0(t)\| = 0$.

Теорема 2. *Если справедлива теорема 1, то в „нерезонансном" случае система (2) имеет частное формальное решение вида*

$$x(t;\varepsilon) = u(t;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\theta(t)\right) + \rho\int_0^L p(t;s;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\theta(s)\, ds\right), \tag{22}$$

где $u(t;\varepsilon)$, $p(t;s;\varepsilon)$ — n-мерные векторы, которые представляются в виде формальных разложений

$$u(t;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r u_r(t), \quad p(t;s;\varepsilon) = \sum_{r=\beta}^{\infty} \varepsilon^r p_r(t;s), \tag{23}$$

причем $\beta = 0$, если $D(\rho) \neq 0$, и $\beta = -1$, если $D(\rho) = 0$.

Доказательство. Подставив (22) в (2), получим уравнения

$$\varepsilon^h B(t;\varepsilon)u'(t;\varepsilon) + B(t;\varepsilon)u(t;\varepsilon)k(t) = A(t;\varepsilon)u(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon),$$

$$\varepsilon^h B(t;\varepsilon)p'(t;s;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)p(t;s;\varepsilon) +$$

$$+ K(t;s;\varepsilon)u(s;\varepsilon) + \rho\int_0^L K(t;\xi;\varepsilon)\, p(\xi;s;\varepsilon)\, d\xi.$$

Приравняв в них коэффициенты при одинаковых степенях ε и приняв во внимание (23), будем иметь системы алгебраических и интегральных уравнений:

$$\left(A_0(t) - k(t)B_0(t)\right) u_k(t) = b_k(t), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{24}$$

$$A_0(t)p_k(t;s) = f_k(t;s) - \rho\int_0^L K_0(t;\xi)\, p_k(\xi;s)\, d\xi, \tag{25}$$

если ρ — регулярное значение ядра $K(t;s)$, и

$$A_0(t)p_{-1}(t;s) = -\rho\int_0^L K_0(t;\xi)\, p_{-1}(\xi;s)\, d\xi, \tag{26}$$

$$A_0(t)p_k(t;s) = -\rho\int_0^L K_0(t;\xi)\, p_k(\xi;s)\, d\xi + g_k(t;s), \tag{27}$$

если ρ — собственное значение ядра $K(t;s)$. Здесь

$$b_k(t) = k(t)\sum_{i=1}^{k} B_i(t)\,u_{k-i}(t) - \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\,u_{k-i}(t) + \sum_{i=0}^{k-h} B_i(t)\,u'_{k-h-i}(t) + \\ + f_k(t), \quad k = 0, 1, \ldots ,$$

$$f_k(t; s) = \sum_{i=0}^{k-h} B_i(t)\,p'_{k-i-h}(t; s) - \sum_{i=0}^{k} K_i(t; s)\,u_{k-i}(s) - \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\,p_{k-i}(t; s) - \\ - \rho\sum_{i=1}^{k}\int_0^L K_i(t;\xi)\,p_{k-i}(\xi; s)\,d\xi, \quad k = 0, 1, \ldots ,$$

$$g_k(t; s) = -\sum_{i=1}^{k+1}\Big(A_i(t)\,p_{k-i}(t; s) - K_{i-1}(t; s)\,u_{k+1-i}(s) - \\ - \rho\int_0^L K_i(t;\xi)\,p_{k-i}(\xi; s)\,d\xi\Big) + \sum_{i=-1}^{k-h} B_{k-i-h}(t)\,p'_i(t; s).$$

Решение алгебраических уравнений (24) находится методом, приведенным в [2], а интегральное уравнение (25) имеет решение вида (13). Уравнение (26) имеет решение $p_{-1}(t; s) = \sum_{i=1}^{r} c_{-1i}(s)\,q_i(t)$, где числа $c_{-1i}(s)$ находятся из условия разрешимости уравнения (27) при $k = 0$. Аналогично функция $p_k(t; s)$, $k = 0, 1, \ldots$, полностью определяется из условия разрешимости $k+1$ уравнения системы (27). Теорема доказана.

Теорема 3. *Если $w_0(t)$ — кратный корень характеристического уравнения системы* (2), *которое соответствует конечному элементарному делителю, и выполняются условия теоремы* 1, *то в случае „резонанса" система* (2) *имеет частное формальное решение вида*

$$x(t; \varepsilon) = v(t; \varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\theta(t)\right) + \rho\int_0^L p(t; s; \varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\theta(s)\right)ds,$$

где n-мерные векторы $v(t; \varepsilon)$ и $p(t; s; \varepsilon)$ имеют формальное разложение

$$v(t; \varepsilon) = \sum_{r=-1}^{\infty} \varepsilon^r v_r(t), \quad p(t; s; \varepsilon) = \sum_{r=\beta}^{\infty} \varepsilon^r p_r(t; s).$$

Здесь $\beta = 0$, если ρ — регулярное значение ядра $K(t; s)$, или $\beta = -1$, если ρ — собственное значение ядра $K(t; s)$.

Доказательство. Векторы $p_k(t; s)$ удовлетворяют интегральным уравнениям (25) – (27), а векторы $v_r(t)$, $r = -1, 0, 1, \ldots$, будут определяться из системы уравнений

$$\begin{aligned} (A_0(t) - w_0(t)\,B_0(t))\,v_{-1}(t) &= 0, \\ (A_0(t) - w_0(t)\,B_0(t))\,v_k(t) &= b_k(t), \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$b_k(t) = w_0(t)\,B_1(t)\,v_{k-1}(t) - A_1(t)\,v_{k-1}(t) + \delta_{h,1}\,B_0(t)\,v'_{k-1}(t) + \\ + w_0(t)\sum_{i=2}^{k+1} B_i(t)\,v_{k-i}(t) - \sum_{i=2}^{k+1} A_i(t)\,v_{k-i}(t) + \sum_{i=\delta_{h;1}}^{k+1-h} B_i(t)\,v_{k-h-i}(t) + f_k(t), \\ k = 0, 1, \ldots .$$

Решение системы алгебраических уравнений (28) находится методом из [2].

3. Асимптотический характер формальных решений. Согласно теореме 1 система (1) имеет p формальных решений вида

$$x^{(i)}(t;\varepsilon) = u^{(i)}(t;\mu)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda^{(i)}(t;\mu)\,dt\right) +$$

$$+ \rho\int_0^L p^{(i)}(t;s;\mu)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda^{(i)}(t;\mu)\,dt\right),$$

соответствующих конечному элементарному делителю $(w-w_0)^p$, и q формальных решений вида

$$x^{(j)}(t;\varepsilon) = v^{(j)}(t;\mu_1)\exp\left(\mu_1^{-qh-1}\int_0^t \frac{dt}{\xi^{(j)}(t;\mu_1)}\right) +$$

$$+ \rho\int_0^L q^{(j)}(t;s;\mu_1)\exp\left(\mu_1^{-qh-1}\int_0^s \frac{dt}{\xi^{(j)}(t;\mu_1)}\right)ds, \quad j=\overline{p+1,n},$$

соответствующих бесконечному элементарному делителю. Обозначим через $x_m^{(i)}(t;\varepsilon)$, $x_m^{(j)}(t;\varepsilon)$ m-е приближенные решения, которые определяются равенствами

$$x_m^{(i)}(t;\varepsilon) = u_m^{(i)}(t;\mu)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_m^{(i)}(t;\mu)\,dt\right) +$$

$$+ \rho\int_0^L p_m^{(i)}(t;s;\mu)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_m^{(i)}(t;\mu)\,dt\right)ds,$$

$$x_m^{(j)}(t;\varepsilon) = v_m^{(j)}(t;\mu_1)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \frac{dt}{\xi_m^{(j)}(t;\mu_1)}\right) +$$

$$+ \rho\int_0^L q_m^{(j)}(t;s;\mu_1)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \frac{dt}{\xi_m^{(j)}(t;\mu_1)}\right)ds,$$

$$u_m^{(i)}(t;\mu) = \sum_{k=0}^m \mu^k u_k^{(i)}(t), \quad \lambda_m^{(i)}(t;\mu) = w_0^{(i)}(t) + \sum_{k=1}^m \mu^k \lambda_k^{(i)}(t),$$

$$p_m^{(i)}(t;s;\mu) = \sum_{k=\beta_1}^m \mu^k p_k^{(i)}(t;s),$$

$$v_m^{(j)}(t;\mu_1) = \sum_{k=0}^m \mu_1^k v_k^{(j)}(t), \quad \xi_m^{(j)}(t;\mu_1) = \sum_{k=0}^m \mu_1^k \xi_k^{(j)}(t),$$

$$q_m^{(j)}(t;s;\mu_1) = \sum_{k=\beta_2}^m \mu_1^k q_m^{(i)}(t;s), \quad i=\overline{1,p}, \quad j=\overline{p+1,n},$$

Справедлива следующая теорема об асимптотическом характере формальных решений системы (1) в смысле [4].

Теорема 4. *Если выполняются условия теоремы* 1, *а также условия*

$$\sum_{k=0}^{ph-1} \mu^k \operatorname{Re}\lambda_k^{(i)}(t) < 0, \quad i = \overline{1, p},$$

$$\sum_{k=0}^{qh} \mu_1^k \operatorname{Re}\xi_k^{(j)}(t) < 0, \quad j = \overline{p+1, n},$$

то на отрезке $[0; L]$ *для каждого формального решения* $x_m^{(i)}(t;\varepsilon)$, $x_m^{(j)}(t;\varepsilon)$ *существуют точные решения* $\overline{x}^{(i)}(t;\varepsilon)$, $\overline{x}^{(j)}(t;\varepsilon)$ *системы* (1), *для которой данное формальное решение является асимптотическим при* $\varepsilon \to 0$. *Для целого* m *и достаточно малых* ε *выполняются неравенства*

$$\left\| x_m^{(i)}(t;\varepsilon) - \overline{x}^{(i)}(t;\varepsilon) \right\| \le C\mu^{m+1-ph+\frac{p(1-\delta)}{\delta}},$$

$$\left\| x_m^{(j)}(t;\varepsilon) - \overline{x}^{(j)}(t;\varepsilon) \right\| \le C\mu_1^{m-qh+\frac{q(1-\delta)}{\delta}},$$

$$\delta = \max(p; q).$$

Для неоднородной системы (2) асимптотический характер формальных решений устанавливает такая теорема.

Теорема 5. *Если выполняются условия теорем* 2, 3, *а также условие*

$$\operatorname{Re}\theta(t) < 0 \quad \forall\, t \in [0; L],$$

то в случае „нерезонанса" для формального решения системы (2) *выполняется неравенство*

$$\| x_m(t;\varepsilon) - \overline{x}(t;\varepsilon) \| \le C\varepsilon^{m-h},$$

а в случае „резонанса" — неравенство

$$\| x_m(t;\varepsilon) - \overline{x}(t;\varepsilon) \| \le C\varepsilon^{m-2h},$$

где $x_m(t;\varepsilon)$, $\overline{x}(t;\varepsilon)$ — *соответственно* m-*е приближение и точное решение системы* (2).

1. *Шкиль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – Київ: Вища шк., 1971. – 226 с.
2. *Шкиль Н. И.* Об асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений и их применении. – Киев, 1996. – 198 с.
3. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – Киев: Выща шк., 1991. – 207 с.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1963. – 412 с.

Получено 22.01.98